ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 1, с. 36–44

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.95

АНАЛИЗ ОПТИМИЗАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА КОШИ[1)]

П. Р. Месенев[2], А. Ю. Чеботарев[1,2,*]

[1] *690041 Владивосток, ул. Радио, 7, ИПМ ДВО РАН, Россия*

[2] *690922 Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10, ДВФУ, Региональный научно-образовательный математический центр Дальневосточный центр математических исследований, Россия*

**e-mail: cheb@iam.dvo.ru*

Поступила в редакцию 07.03.2021 г.
Переработанный вариант 17.09.2021 г.
Принята к публикации 17.09.2021 г.

Предложен оптимизационный метод решения краевой задачи с условиями типа Коши для уравнений радиационно-кондуктивного теплообмена в рамках P_1–приближения уравнения переноса излучения. Выполнен теоретический анализ соответствующей задачи граничного оптимального управления. Показано, что последовательность решений экстремальных задач сходится к решению краевой задачи с условиями типа Коши для температуры. Результаты теоретического анализа проиллюстрированы численными примерами. Библ. 33. Фиг. 2.

Ключевые слова: уравнения радиационно-кондуктивного теплообмена, диффузионное приближение, задача оптимального управления, условия типа Коши.

DOI: 10.31857/S0044466922010094

1. ВВЕДЕНИЕ

Стационарный радиационный и диффузионный теплообмен в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$ моделируется в рамках P_1–приближения для уравнения переноса излучения следующей системой эллиптических уравнений [1]–[3]

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = 0, \quad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{1}$$

Здесь θ – нормализованная температура, φ – нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям. Положительные физические параметры a, b, κ_a и α, описывающие свойства среды, определяются стандартным образом [3]. Подробный теоретический и численный анализ различных постановок краевых и обратных задач, а также задач управления для уравнений радиационного теплообмена в рамках P_1-приближения для уравнения переноса излучения представлен в [1]–[21]. Отметим также серьезный анализ интересных краевых задач, связанных с радиационным теплообменом, представленный в [22]–[27].

Будем предполагать, что на границе $\Gamma = \partial\Omega$ известно температурное поле,

$$\theta = \theta_b. \tag{2}$$

Для задания краевого условия для интенсивности излучения требуется знать функцию, описывающую отражающие свойства границы [4]. В том случае, если указанная функция неизвестна, естественно вместо краевого условия для интенсивности излучения задавать тепловые потоки на границе

$$\partial_n\theta = q_b. \tag{3}$$

Здесь через ∂_n обозначаем производную в направлении внешней нормали $\mathbf{n}$.

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 20-01-00113) и ИПМ ДВО РАН (номер темы: 075-01095-20-00).

Нелокальная разрешимость нестационарной и стационарной краевых задач для уравнений сложного теплообмена без краевых условий на интенсивность излучения и с условиями (2), (3) для температуры доказана в [20], [21].

Данная статья посвящена анализу предлагаемого оптимизационного метода решения краевой задачи (1)–(3) с условиями типа Коши для температуры. Указанный метод заключается в рассмотрении задачи граничного оптимального управления для системы (1) с “искусственными” краевыми условиями

$$a(\partial_n\theta + \theta) = r, \quad \alpha(\partial_n\varphi + \varphi) = u \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{4}$$

Функция $r(x)$, $x \in \Gamma$, является заданной, а неизвестная функция $u(x)$, $x \in \Gamma$, играет роль управления. Экстремальная задача заключается в отыскании тройки $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$ такой, что

$$J_\lambda(\theta, u) = \frac{1}{2}\int_\Gamma (\theta - \theta_b)^2 d\Gamma + \frac{\lambda}{2}\int_\Gamma u^2 d\Gamma \to \inf \tag{5}$$

на решениях краевой задачи (1), (4). Функция $\theta_b(x)$, $x \in \Gamma$, и параметр регуляризации $\lambda > 0$ заданы.

Как будет показано ниже, задача оптимального управления (1), (4), (5), если $r := a(\theta_b + q_b)$, где q_b – заданная на Γ функция, является при малых λ аппроксимацией краевой задачи (1)–(3).

Статья организована следующим образом. В разд. 2 вводятся необходимые пространства и операторы, приводится формализация задачи оптимального управления. Априорные оценки решения задачи (1), (4), на основе которых доказана разрешимость указанной краевой задачи и задачи оптимального управления (1), (4), (5), получены в разд. 3. В разд. 4 выводится система оптимальности. В разд. 5 показано, что последовательность $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda\}$, соответствующая решениям экстремальной задачи, сходится при $\lambda \to +0$ к решению краевой задачи (1)–(3) с условиями типа Коши для температуры. Наконец, в разд. 6 представлен алгоритм решения задачи управления, работа которого проиллюстрирована численными примерами.

2. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

В дальнейшем считаем, что $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная строго липшицева область, граница Γ которой состоит из конечного числа гладких кусков. Через L^p, $1 \le p \le \infty$, обозначаем пространство Лебега, а через H^s – пространство Соболева W_2^s. Пусть $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$, через V' обозначаем пространство, сопряженное с пространством V. Пространство H отождествляем с пространством H' так, что $V \subset H = H' \subset V'$. Обозначим через $\|\cdot\|$ стандартную норму в H, а через (f, v) – значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее со скалярным произведением в H, если $f \in H$. Через U обозначаем пространство $L^2(\Gamma)$ с нормой $\|u\|_\Gamma = \left(\int_\Gamma u^2 d\Gamma\right)^{1/2}$.

Будем предполагать, что

(i) $a, b, \alpha, \kappa_a, \lambda = \mathrm{Const} > 0$,

(ii) $\theta_b, q_b \in U$, $r = a(\theta_b + q_b)$.

Определим операторы $A : V \to V'$, $B : U \to V'$, используя следующие равенства, справедливые для любых $y, z \in V$, $w \in U$:

$$(Ay, z) = (\nabla y, \nabla z) + \int_\Gamma yz d\Gamma, \quad (Bw, z) = \int_\Gamma wz d\Gamma.$$

Билинейная форма (Ay, z) определяет скалярное произведение в пространстве V, а соответствующая норма $\|z\|_V = \sqrt{(Az, z)}$ эквивалентна стандартной норме V. Поэтому определен непрерывный обратный оператор $A^{-1} : V' \mapsto V$. Отметим, что для любых $v \in V$, $w \in U$, $g \in V'$ справедливы неравенства

$$\|v\|^2 \le C_0 \|v\|_V^2, \quad \|v\|_{V'} \le C_0 \|v\|_V, \quad \|Bw\|_{V'} \le \|w\|_\Gamma, \quad \left\|A^{-1}g\right\|_V \le \|g\|_{V'}. \tag{6}$$

Здесь постоянная $C_0 > 0$ зависит только от области Ω.

Далее используем следующее обозначение $[h]^s := |h|^s \operatorname{sign} h$, $s > 0$, $h \in \mathbb{R}$, для монотонной степенной функции.

Определение. Пара $\theta, \varphi \in V$ называется *слабым решением* задачи (1), (4), если

$$aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) = Br, \quad \alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) = Bu. \tag{7}$$

Для формулировки задачи оптимального управления определим оператор ограничений $F(\theta, \varphi, u) : V \times V \times U \to V' \times V'$,

$$F(\theta, \varphi, u) = \{aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) - Br, \, \alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) - Bu\}.$$

Задача (CP)**.** Найти тройку $\{\theta, \varphi, u\} \in V \times V \times U$ такую, что

$$J_\lambda(\theta, u) \equiv \frac{1}{2}\|\theta - \theta_b\|_\Gamma^2 + \frac{\lambda}{2}\|u\|_\Gamma^2 \to \inf, \quad F(\theta, \varphi, u) = 0. \tag{8}$$

3. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ (CP)

Докажем предварительно однозначную разрешимость краевой задачи (1), (4).

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* (i), (ii), $u \in U$. *Тогда существует единственное слабое решение задачи* (1), (4) *и при этом*

$$\begin{aligned} a\|\theta\|_V &\le \|r\|_\Gamma + \frac{C_0\kappa_a}{\alpha}\|r + bu\|_\Gamma, \\ \alpha b\|\varphi\|_V &\le \|r\|_\Gamma + \left(\frac{C_0\kappa_a}{\alpha} + 1\right)\|r + bu\|_\Gamma. \end{aligned} \tag{9}$$

Доказательство. Если второе уравнение в (7) умножить на b и сложить с первым, то получим равенства

$$A(a\theta + \alpha b\varphi) = B(r + bu), \quad a\theta + \alpha b\varphi = A^{-1}B(r + bu), \quad \varphi = \frac{1}{\alpha b}(A^{-1}B(r + bu) - a\theta).$$

Поэтому $\theta \in V$ является решением следующего уравнения:

$$aA\theta + \frac{\kappa_a}{\alpha}\theta + b\kappa_a[\theta]^4 = g. \tag{10}$$

Здесь

$$g = Br + \frac{\kappa_a}{\alpha}A^{-1}B(r + bu) \in V'.$$

Однозначная разрешимость уравнения (10) с монотонной нелинейностью хорошо известна (см., например, [28]). Следовательно, задача (7) однозначно разрешима.

Для получения оценок (9) умножим скалярно (10) на $\theta \in V$ и отбросим неотрицательные слагаемые в левой части. Тогда

$$a\|\theta\|_V^2 \le (g, \theta) \le \|g\|_{V'}\|\theta\|_V, \quad a\|\theta\|_V \le \|g\|_{V'}.$$

Неравенства (6) позволяют оценить $\|g\|_{V'}$ и $\|\varphi\|_V$:

$$\|g\|_{V'} \le \|r\|_\Gamma + \frac{C_0\kappa_a}{\alpha}\|r + bu\|_\Gamma, \quad \|\varphi\|_V \le \frac{1}{\alpha b}\|r + bu\|_\Gamma + \frac{a}{\alpha b}\|\theta\|_V.$$

В результате получаем оценки (9).

Полученные оценки решения управляемой системы позволяют доказать разрешимость задачи оптимального управления.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (i), (ii). *Тогда существует решение задачи* (CP).

Доказательство. Пусть $j_\lambda = \inf J_\lambda$ на множестве $u \in U$, $F(\theta, \varphi, u) = 0$. Выберем минимизирующую последовательность $u_m \in U$, $\theta_m \in V$, $\varphi_m \in V$,

$$J_\lambda(\theta_m, u_m) \to j_\lambda,$$
$$aA\theta_m + b\kappa_a([\theta_m]^4 - \varphi_m) = Br, \quad \alpha A\varphi_m + \kappa_a(\varphi_m - [\theta_m]^4) = Bu_m. \tag{11}$$

Из ограниченности последовательности u_m в пространстве U следуют, на основании леммы 1, оценки

$$\|\theta_m\|_V \le C, \quad \|\varphi_m\|_V \le C, \quad \|\theta_m\|_{L^6(\Omega)} \le C.$$

Здесь через $C > 0$ обозначена наибольшая из постоянных, ограничивающих соответствующие нормы и не зависящих от m. Переходя при необходимости к подпоследовательностям, заключаем, что существует тройка $\{\hat{u}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}\} \in U \times V \times V$,

$$u_m \to \hat{u} \text{ слабо в } U, \quad \theta_m, \varphi_m \to \hat{\theta}, \hat{\varphi} \text{ слабо в } V, \quad \text{сильно в } L^4(\Omega). \tag{12}$$

Заметим также, что $\forall v \in V$ имеем

$$\left|([\theta_m]^4 - [\hat{\theta}]^4, v)\right| \le 2\left\|\theta_m - \hat{\theta}\right\|_{L^4(\Omega)} \|v\|_{L^4(\Omega)} \left(\|\theta_m\|^3_{L_6(\Omega)} + \left\|\hat{\theta}\right\|^3_{L_6(\Omega)}\right). \tag{13}$$

Результаты о сходимости (12), (13) позволяют перейти к пределу в (11). Поэтому

$$aA\hat{\theta} + b\kappa_a([\hat{\theta}]^4 - \hat{\varphi}) = Br, \quad \alpha A\hat{\varphi} + \kappa_a(\hat{\varphi} - [\hat{\theta}]^4) = B\hat{u},$$

и при этом $j_\lambda \le J_\lambda(\hat{\theta}, \hat{u}) \le J_\lambda(\theta_m, u_m) = j_\lambda$. Следовательно, тройка $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\}$ есть решение задачи (CP).

4. УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Для получения системы оптимальности достаточно использовать принцип Лагранжа для гладко-выпуклых экстремальных задач [29], [30]. Проверим справедливость ключевого условия, что образ производной оператора ограничений $F(y, u)$, где $y = \{\theta, \varphi\} \in V \times V$, совпадает с пространством $V' \times V'$. Именно это условие гарантирует невырожденность условий оптимальности. Напомним, что

$$F(y, u) = \{aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) - Br, \alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) - Bu\}.$$

Лемма 2. *Пусть выполняются условия* (i), (ii). *Для любой пары* $\hat{y} \in V \times V$, $\hat{u} \in U$ *справедливо равенство*

$$\operatorname{Im} F'_y(y, u) = V' \times V'.$$

Доказательство. Достаточно проверить, что задача

$$aA\xi + b\kappa_a(4|\hat{\theta}|^3\xi - \eta) = f_1, \quad \alpha A\eta + \kappa_a(\eta - 4|\hat{\theta}|^3\xi) = f_2$$

разрешима для всех $f_{1,2} \in V'$. Данная задача равносильна системе

$$aA\xi + \kappa_a\left(4b|\theta|^3 + \frac{a}{\alpha}\right)\xi = f_1 + \frac{\kappa_a}{\alpha} f_3, \quad \eta = \frac{1}{\alpha b}(f_3 - a\xi).$$

Здесь $f_3 = A^{-1}(f_1 + bf_2) \in V$. Разрешимость первого уравнения указанной системы очевидным образом следует из леммы Лакса–Мильграма.

В соответствии с леммой 2 лагранжиан задачи (CP) имеет вид

$$L(\theta, \varphi, u, p_1, p_2) = J_\lambda(\theta, u) + (aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) - Br, p_1) + (\alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) - Bu, p_2).$$

Здесь $p = \{p_1, p_2\} \in V \times V$ – сопряженное состояние. Если $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\}$ – решение задачи (CP), то в силу принципа Лагранжа [29, теорема 1.5] справедливы вариационные равенства $\forall v \in V$, $w \in U$ имеем

$$(\hat{\theta} - \theta_b, v)_\Gamma + (aAv + 4b\kappa_a|\hat{\theta}|^3 v, p_1) - \kappa_a(4|\hat{\theta}|^3 v, p_2) = 0, \quad b\kappa_a(v, p_1) + (\alpha Av + \kappa_a v, p_2) = 0, \tag{14}$$

$$\lambda(\hat{u}, w)_\Gamma - (Bw, p_2) = 0. \tag{15}$$

Таким образом, из условий (14), (15) получаем следующий результат, который вместе с уравнениями (7) для оптимальной тройки определяет систему оптимальности задачи (CP).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (i), (ii). *Если* $\{\hat\theta, \hat\varphi, \hat u\}$ *– решение задачи* (CP)*, то существует единственная пара* $\{p_1, p_2\} \in V \times V$ *такая, что*

$$aAp_1 + 4|\hat\theta|^3\kappa_a(bp_1 - p_2) = B(\theta_b - \hat\theta), \quad \alpha Ap_2 + \kappa_a(p_2 - bp_1) = 0 \tag{16}$$

и при этом $\lambda\hat u = p_2$.

5. АППРОКСИМАЦИЯ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЯМИ ТИПА КОШИ

Рассмотрим краевую задачу (1)–(3) для уравнений сложного теплообмена, в которой нет краевых условий на интенсивность излучения. Существование $\theta, \varphi \in H^2(\Omega)$, удовлетворяющих (1)–(3), для достаточно гладких θ_b, q_b и достаточные условия единственности решения установлены в [21]. Покажем, что решения задачи (CP) при $\lambda \to +0$ аппроксимируют решение задачи (1)–(3).

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (i), (ii) *и существует решение задачи* (1)–(3). *Если* $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$ *– решение задачи (CP) для* $\lambda > 0$*, то существует последовательность* $\lambda \to +0$ *такая, что*

$$\theta_\lambda \to \theta_*, \quad \varphi_\lambda \to \varphi_* \quad \textit{слабо в } V, \quad \textit{сильно в } H,$$

где θ_*, φ_* *– решение задачи* (1)–(3).

Доказательство. Пусть $\theta, \varphi \in H^2(\Omega)$ – решение задачи (1)–(3), $u = \alpha(\partial_n\varphi + \varphi) \in U$. Тогда

$$aA\theta + b\kappa_a([\theta]^4 - \varphi) = Br, \quad \alpha A\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) = Bu,$$

где $r := a(\theta_b + q_b)$. Поэтому, с учетом того, что $\theta|_\Gamma = \theta_b$, получим

$$J_\lambda(\theta_\lambda, u_\lambda) = \frac{1}{2}\|\theta_\lambda - \theta_b\|_\Gamma^2 + \frac{\lambda}{2}\|u_\lambda\|_\Gamma^2 \le J_\lambda(\theta, u) = \frac{\lambda}{2}\|u\|_\Gamma^2.$$

Следовательно,

$$\|u_\lambda\|_\Gamma^2 \le C, \quad \|\theta_\lambda - \theta_b\|_\Gamma^2 \to 0, \quad \lambda \to +0.$$

Здесь и далее $C > 0$ не зависит от λ. Из ограниченности последовательности u_λ в пространстве U следуют, на основании леммы 1, оценки

$$\|\theta_\lambda\|_V \le C, \quad \|\varphi\|_\lambda \le C.$$

Поэтому можно выбрать последовательность $\lambda \to +0$ такую, что

$$u_\lambda \to u_* \quad \text{слабо в } U, \quad \theta_\lambda, \varphi_\lambda \to \theta_*, \varphi_* \quad \text{слабо в } V, \quad \text{сильно в } L^4(\Omega). \tag{17}$$

Результаты (17) позволяют перейти к пределу при $\lambda \to +0$ в уравнениях для $\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda$ и тогда

$$aA\theta_* + b\kappa_a([\theta_*]^4 - \varphi_*) = Br, \quad \alpha A\varphi_* + \kappa_a(\varphi_* - [\theta_*]^4) = Bu_*. \tag{18}$$

При этом $\theta_*|_\Gamma = \theta_b$. Из первого уравнения в (18), с учетом, что $r = a(\theta_b + q_b)$, выводим

$$-a\Delta\theta_* + b\kappa_a([\theta_*]^4 - \varphi_*) = 0 \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad \theta_* = \theta_b, \quad \partial_n\theta = q_b \quad \text{п.в. на } \Gamma.$$

Из второго уравнения в (18) следует, что $-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - [\theta]^4) = 0$ почти всюду в Ω. Таким образом, пара θ_*, φ_* – решение задачи (1)–(3).

Замечание. Из ограниченности последовательности u_λ в пространстве U следуют ее слабая относительная компактность и существование последовательности (возможно неединственной) $\lambda \to +0$ такой, что $u_\lambda \to u_*$ слабо в U. Для практического решения задачи (1)–(3) важно то, что *для любой последовательности* $\lambda \to +0$ справедлива оценка $\|\theta_\lambda - \theta_b\|_\Gamma^2 \le C\lambda$, а поскольку $\partial_n\theta_\lambda = \theta_b + q_b - \theta_\lambda$, то также $\|\partial_n\theta_\lambda - q_b\|_\Gamma^2 \le C\lambda$. Указанные неравенства гарантируют, что граничные значения $\theta_\lambda, \partial_n\theta_\lambda$ при малых λ аппроксимируют краевые условия задачи (1)–(3).

6. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Представим итерационный алгоритм решения задачи оптимального управления. Пусть $\tilde{J}_\lambda(u) = J_\lambda(\theta(u), u)$, где $\theta(u)$ компонента решения задачи (1), (3), соответствующая управлению $u \in U$.

В соответствии с (16) градиент функционала $\tilde{J}_\lambda(u)$ равен

$$\tilde{J}'_\lambda(u) = \lambda u - p_2.$$

Здесь p_2 – соответствующая компонента сопряженного состояния из системы (16), где $\hat{\theta} := \theta(u)$.

Алгоритм градиентного спуска

1: Выбираем значение градиентного шага ε,
2: Выбираем количество итераций N,
3: Выбираем начальное приближение для управления $u_0 \in U$,
4: **for** $k \leftarrow 0, 1, 2, \ldots, N$ **do**
5: Для данного u_k рассчитываем состояние $y_k = \{\theta_k, \varphi_k\}$ – решение задачи (1), (2).
6: Рассчитываем значение целевого функционала $J_\lambda(\theta_k, u_k)$.
7: Рассчитываем сопряженное состояние $p_k = \{p_{1k}, p_{2k}\}$ из уравнений (14), где $\hat{\theta} := \theta_k$, $\hat{u} = u_k$.
8: Пересчитываем управление $u_{k+1} = u_k - \varepsilon(\lambda u_k - p_2)$.

Значение параметра ε выбирается эмпирически таким образом, чтобы значение $\varepsilon(\lambda u_k - p_2)$ являлось существенной поправкой для u_{k+1}. Количество итераций N выбирается достаточным для выполнения условия $J_\lambda(\theta_k, u_k) - J_\lambda(\theta_{k+1}, u_{k+1}) < \delta$, где $\delta > 0$ определяет точность расчетов.

Примеры, рассмотренные ниже, иллюстрируют работоспособность предложенного алгоритма при малых, что важно, значениях параметра регуляризации $\lambda \le 10^{-12}$. В первом примере выполнены тестовые расчеты для куба. Во втором примере приводится сравнение расчетов по предложенному алгоритму с результатами работы [20].

Отметим, что для численного решения прямой задачи с заданным управлением использовался метод простой итерации для линеаризации задачи и ее решения методом конечных элементов. Решение сопряженной системы, которая является линейной при заданной температуре, не вызывает трудностей. Для численного моделирования использовался солвер FEniCS [31], [32].

Исходный код экспериментов можно найти по ссылке [33].

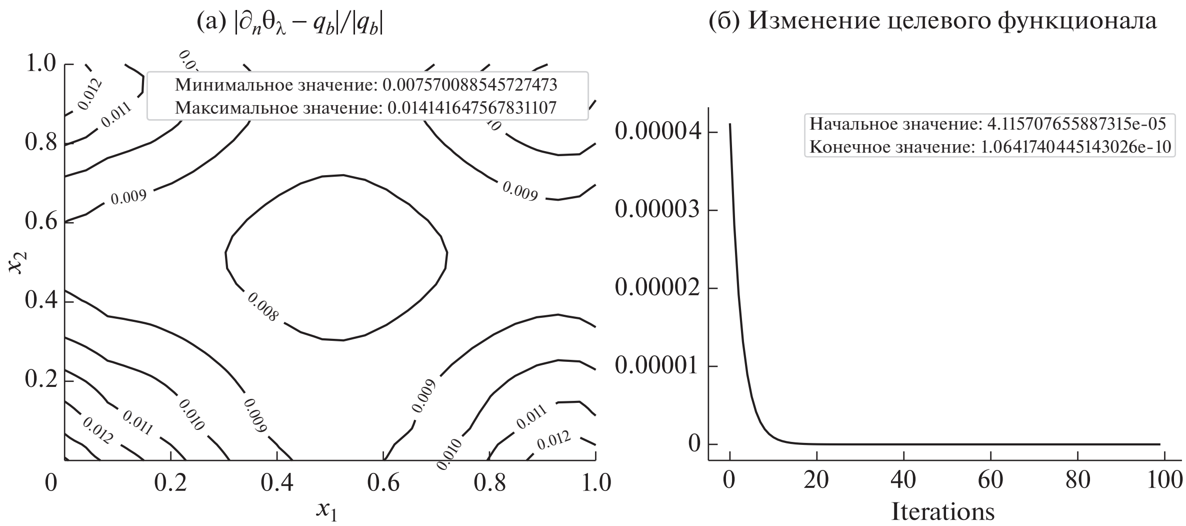
Пример 1. Рассмотрим куб $\Omega = (x, y, z)$, $0 \le x, y, z \le l$. Будем считать, что $l = 1$ см, $a = 0.006$ [см^2/с], $b = 0.025$ [см/с], $\kappa_a = 1$ [см$^{-1}$], $\alpha = 0.(3)$ [см]. Указанные параметры соответствуют стеклу [11]. Параметр регуляризации $\lambda = 10^{-12}$.

Пусть граничные данные r и u в (2) имеют вид:

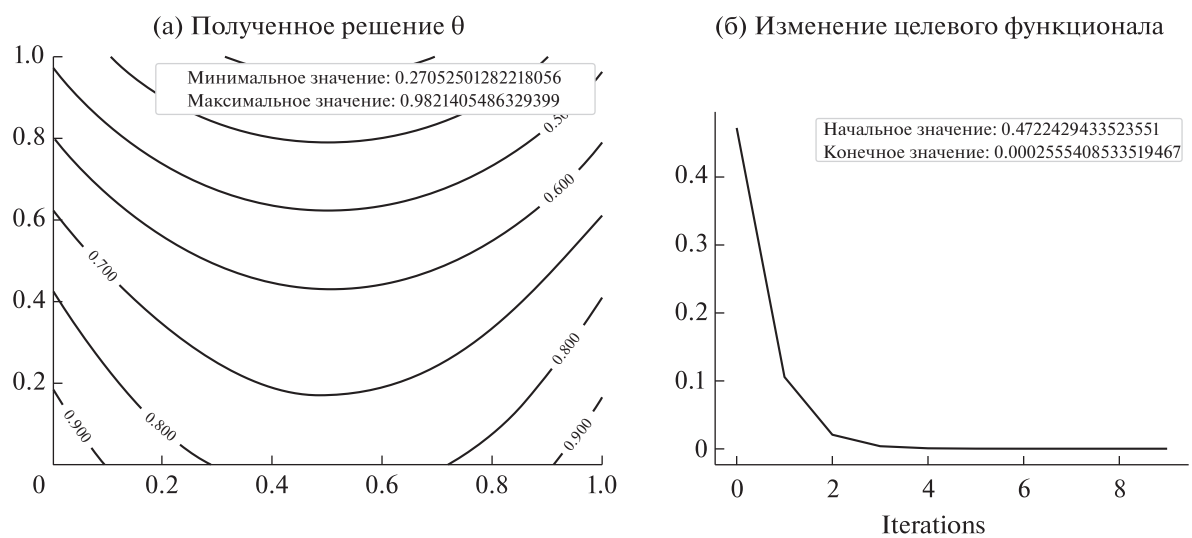
$$r = 0.7, \quad u = \hat{u} = 0.5.$$

Далее рассчитываем состояние θ и φ как решение задачи (1), (2) и в качестве θ_b выбираем граничные значения функции θ на Γ. Значения нормальной производной $\partial_n\theta$ на Γ должны соответствовать значениям $q_b = r/a - \theta_b$. Применяя предложенный алгоритм с начальным приближением $u_0 = 0.1$, находим приближенное решение $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda, u_\lambda\}$ задачи (CP). Для демонстрации того, что алгоритм находит приближенное решение задачи с данными Коши для температуры, важно сравнить значения $\partial_n\theta_\lambda$ на Γ с q_b.

На фиг. 1а, 1б представлены модуль относительного отклонения $\partial_n\theta_\lambda$ от q_b на грани куба в плоскости $z = l$, где $\partial_n\theta_\lambda = \partial\theta_\lambda/\partial z$ и динамика целевого функционала, определяющего норму разности $\|\theta_\lambda - \theta_b\|^2_\Gamma$. На остальных гранях куба значения относительного отклонения имеют тот же порядок малости.



Фиг. 1. Пример 1.



Фиг. 2. Пример 2.

Пример 2. Сравним работу предложенного алгоритма с результатами статьи [20], где соавтором был один из авторов данной работы. Задача рассматривается в области $\Omega\times(-L, L)$, где $\Omega = \{x = (x_1, x_2)\colon 0 < x_{1,2} < d\}$ и при больших L сводится к двумерной задаче с вычислительной областью Ω. Выбраны следующие значения параметров задачи: $d = 1$ (m), $a = 0.9210^{-4}$ (m^2/s), $b = 0.19$ (m/s), $\alpha = 0.0333$ (m) и $\kappa_a = 1$ (m^{-1}). Параметры соответствуют воздуху при нормальном атмосферном давлении и температуре 400°C.

Функции θ_b, q_b в краевом условии (3) заданы следующим образом: $\theta_b = \hat{\theta}\big|_\Gamma$, $q_b = \partial_n\hat{\theta}\big|_\Gamma$, где $\hat{\theta} = (x_1 - 0.5)^2 - 0.5x_2 + 0.75$.

Приближенное решение задачи с данными Коши, представленное в [20], получено путем решения эллиптической задачи четвертого порядка для температуры методом установления по времени. Использовались H^2 конформные конечные элементы Богнера–Фокса–Шмитта и солвер FeliCs, разработанный в техническом университете Мюнхена. Решение стабилизировалось через 120 с, но вычисления на каждом временном шаге потребовали довольно значительных затрат [20].

На фиг. 2а представлено температурное поле, полученное предложенным в данной статье методом, достаточно точно совпадающее с результатом в [20]. Величина $\|\partial_n\theta_\lambda - q_b\|_{L^2(\Gamma)} / \|q_b\|_{L^2(\Gamma)}$ равна 0.000567. Значение целевого функционала, определяющего норму разности $\|\theta_\lambda - \theta_b\|_\Gamma^2$, равно 0.000255 и стабилизируется после 10 итераций, как показано на фиг. 2б.

Представленные численные примеры демонстрируют, что предложенный алгоритм успешно справляется с нахождением численного решения задачи (1)–(3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pinnau R.* Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modeled by SP_1-system // Commun. Math. Sci. 2007. V. 5. № 4. P. 951–969.
2. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu.* An iterative method for solving a complex heat transfer problem // Appl. Math. Comput. 2013. V. 219. № 17. P. 9356–9362.
3. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 409. № 2. P. 808–815.
4. *Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю.* Стационарная задача сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 4. С. 711–719.
5. *Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю.* Стационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом // Дифференц. ур-ния. 2014. Т. 50. № 12. С. 1590–1597.
6. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive-convective-radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 412. № 1. P. 520–528.
7. *Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.* Нестационарная задача сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 11. С. 1806–1816.
8. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2015. V. 20. № 3. P. 776–784.
9. *Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.* Неоднородная нестационарная задача сложного теплообмена // Сиб. электрон. матем. изв. 2015. Т. 12. С. 562–576.
10. *Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.* Нестационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 2. С. 275–282.
11. *Grenkin G.V., Chebotarev A.Yu., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Boundary optimal control problem of complex heat transfer model // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 433. № 2. P. 1243–1260.
12. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Optimal boundary control of a steady-state heat transfer model accounting for radiative effects // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 439. № 2. P. 678–689.
13. *Chebotarev A.Yu., Kovtanyuk A.E., Grenkin G.V., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model // Appl. Math. Comput. 2016. V. 289. P. 371–380.
14. *Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю.* Нелокальная однозначная разрешимость стационарной задачи сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 5. С. 816–823.
15. *Chebotarev A.Yu., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E.* Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer // ESAIM Math. Model. Numer. Anal. 2017. V. 51. № 6. P. 2511–2519.
16. *Chebotarev A.Y., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions// Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 57 (2018). 290–298.
17. *Chebotarev A.Yu., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange // J. Math. Anal. Appl. 2018. V. 460. № 2. P. 737–744.
18. *Chebotarev A.Yu., Pinnau R.* An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 472. № 1. P. 314–327.
19. *Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.* Обратная задача для уравнений сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 8. С. 1420–1430.
20. *Chebotarev A.Y., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D.* Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 75 (2019) 262–269.
21. *Колобов А.Г., Пак Т.В., Чеботарев А.Ю.* Стационарная задача радиационного теплообмена с граничными условиями типа Коши // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 7. С. 1258–1263.
22. *Амосов А.А.* Глобальная разрешимость одной нелинейной нестационарной задачи с нелокальным краевым условием типа теплообмена излучением // Дифференц. ур-ния. Т. 41. № 1. 2005. С. 93–104.

23. *Amosov A.A.* Stationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on the radiation frequency // J. Math. Sc. 2010. V. 164. № 3. P. 309–344.
24. *Amosov A.* Unique Solvability of a Nonstationary Problem of Radiative - Conductive Heat Exchange in a System of Semitransparent Bodies // Russian J. of Math. Phys. 2016. V. 23. № 3. P. 309–334.
25. *Amosov A.A.* Unique Solvability of Stationary Radiative – Conductive Heat Transfer Problem in a System of Semitransparent Bodies // J. of Math. Sc. (United States). 2017. V. 224. № 5. P. 618–646.
26. *Amosov A.A.* Asymptotic Behavior of a Solution to the Radiative Transfer Equation in a Multilayered Medium with Diffuse Reflection and Refraction Conditions // J. of Math. Sc. (United States). 2020. V. 244. P. 541–575.
27. *Amosov A.A., Krymov N.E.* On a Nonstandard Boundary Value Problem Arising in Homogenization of Complex Heat Transfer Problems // J. of Math. Sc. (United States). 2020. V. 244. P. 357–377.
28. *Fučik S., Kufner A.* Nonlinear differential equations, New York: Elsevier, 1980.
29. *Fursikov A.V.* Optimal Control of Distributed Systems. Theory and Applications, American Math. Soc., 2000.
30. *Ioffe A.D., Tikhomirov V.M.* Theory of Extremal Problems, Amsterdam, North-Holland, 1979.
31. *Alnaes M.S., Blechta J., Hake J., Johansson A., Kehlet B., Logg A., Richardson C., Ring J., Rognes M.E., Wells G.N.* The FEniCS Project Version 1.5 Archive of Numerical Software, vol. 3, 2015.
32. *Logg A., Wells G.N.* DOLFIN: Automated Finite Element Computing ACM Transactions on Mathematical Software, vol. 37, 2010
33. https://github.com/mesenev/articles_src