

**ОБЩИЕ
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**

УДК 517.929

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ДЛИННЫХ
ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДАХ.
ПРОБЛЕМА ВЫЧИСЛЕНИЯ ВАХ.
ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ СКОРОСТИ
РОСТА ОШИБОК ОКРУГЛЕНИЯ**

© 2022 г. М. И. Зуев^{1,*}, С. И. Сердюкова^{1,**}

¹ 141980 Дубна, М.о., ул. Жолио-Кюри, 6, Объединенный институт ядерных исследований, Россия

*e-mail: zuevmax@jinr.ru

**e-mail: sis@jinr.ru

Поступила в редакцию 23.03.2021 г.
Переработанный вариант 23.03.2021 г.
Принята к публикации 17.09.2021 г.

При численных расчетах вольт-амперных характеристик обычно используется схема Рунге–Кутты четвертого порядка точности. Расчеты проводятся на больших интервалах времени и на каждом шаге по времени проводится четырехкратный пересчет правых частей уравнений. Чтобы сократить время счета, предложено использовать вместо схемы Рунге–Кутты “явную” схему второго порядка точности. При $\tau = h$ доказаны оценки $\|G^n\|$ для всех n , гарантирующие ограниченность скорости роста ошибок округления, где G – оператор перехода от слоя к слою; τ, h – шаги сетки по t, x соответственно. Разработан численно-аналитический алгоритм оценки ошибок округления для всех $\tau \leq h$. Установлена их ограниченность на всем интервале вычисления ВАХ длинных джозефсоновских переходов при использовании предлагаемой схемы. Расчеты проводились на суперкомпьютере GOVORUN с использованием системы REDUCE. Библ. 7. Фиг. 3.

Ключевые слова: длинные джозефсоновские переходы, вычисление ВАХ, конечно-разностный метод, оценка роста ошибок округления, численный метод, система REDUCE, суперкомпьютер GOVORUN.

DOI: 10.31857/S0044466922010124

ВВЕДЕНИЕ

Цель этой работы – показать, как можно оценивать скорость роста ошибок округления, используя цифровые методы.

Вычисление вольт-амперных характеристик систем n длинных джозефсоновских переходов (ДДП) связано (см. [1, (7)]) с решением системы n существенно нелинейных дифференциальных уравнений. Разработан алгоритм, позволяющий свести задачу к решению одного уравнения $u_n = -\beta u_t + u_{xx} - \sin(u) + I$. Для решения последнего предлагается использовать разностную аппроксимацию второго порядка точности:

$$\frac{u_v^{n+1} - 2u_v^n + u_v^{n-1}}{\tau^2} = -\beta \frac{u_v^{n+1} - u_v^{n-1}}{2\tau} + \frac{u_{v+1}^n - 2u_v^n + u_{v-1}^n}{h^2} - \sin(u_v^n) + I(n),$$

где τ, h – шаги сетки по t, x соответственно, ниже используются обозначения $\gamma = \tau/h, \delta = \beta\tau/2$. Линейная часть без $I(n)$ (см. замечание 2 в конце работы) рассматриваемого разностного уравнения эквивалентна системе разностных уравнений

$$\begin{aligned} u_v^{n+1} - u_v^n &= v_v^{n+1}, \\ \frac{v_v^{n+1} - v_v^n}{\tau^2} &= -\beta \frac{v_v^{n+1} + v_v^n}{2\tau} + \frac{u_{v+1}^n - 2u_v^n + u_{v-1}^n}{h^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Решается задача Коши, заданы начальные данные u_v^0, v_v^0 . После преобразования Фурье

$$U^n = \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{iv\phi} [u_v^n, v_v^n]^*$$

(знак * означает преобразование вектора-строки в вектор-столбец) и некоторых алгебраических манипуляций получаем векторную систему

$$U^{n+1} = A(e^{i\phi})U^n, \quad U^n = A^n(e^{i\phi})U^0.$$

Здесь $A(e^{i\phi})$ – характеристическая матрица

$$A(e^{i\phi}) = \begin{bmatrix} (1 - (4\gamma^2 \sin^2(\phi/2))/(1 + \delta)) & (1 - \delta)/(1 + \delta) \\ -(4\gamma^2 \sin^2(\phi/2))/(1 + \delta) & (1 - \delta)/(1 + \delta) \end{bmatrix}.$$

В случае $\tau = h$ получены (см. [2]) оценки норм $\|A^n(e^{i\phi})\|$ в пространстве L_2 для всех n :

$$\|A^n(e^{i\phi})\| \leq 5\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{2 + \frac{3.78}{\beta\tau} + O(\exp(-\beta\tau n))}, \quad t = \tau n.$$

Кроме того, было доказано, что при больших $\beta\tau n$ норма характеристической матрицы медленно убывает к некоторой константе:

$$\|A^n(e^{i\phi})\| \leq 5\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{2 + \frac{5.12}{\beta\tau\sqrt{\beta\tau n}} + O(\exp(-\beta\tau n))}.$$

Полученные оценки гарантируют ограниченность роста ошибок округления в l_2 -метрике для всех n . Особую трудность представляла оценка $\|(\lambda_1^n - \lambda_2^n)/(\lambda_1 - \lambda_2)\|$, где λ_1, λ_2 – собственные значения характеристической матрицы.

В настоящей работе разработан алгоритм прямого вычисления $\|(\lambda_1^n - \lambda_2^n)/(\lambda_1 - \lambda_2)\|$ при всех $\tau \leq h$ на всем интервале вычисления вольт-амперных характеристик ДДП. Это позволило выяснить качественное изменение $\|A^n\|$ в зависимости от n . Опишем этот алгоритм.

1. СВЕДЕНИЕ ОЦЕНКИ $\|A^n(e^{i\phi})\|$ К ОЦЕНКЕ $\|(\lambda_1^n - \lambda_2^n)/(\lambda_1 - \lambda_2)\|$

Собственные значения характеристической матрицы A удовлетворяют уравнению

$$\lambda^2 - 2\frac{1 - 2\gamma^2 \sin^2(\phi/2)}{1 + \delta}\lambda + \frac{1 - \delta}{1 + \delta} = 0.$$

Решая это уравнение, находим

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 - 2\gamma^2 \sin^2(\phi/2) \pm \sqrt{\delta^2 - 4\gamma^2 \sin^2(\phi/2) + 4\gamma^4 \sin^4(\phi/2)}}{1 + \delta}. \quad (2)$$

Доказано (см. [2]), что $|\lambda_1| \leq 1$ и $|\lambda_2| \leq 1$ для всех $\gamma \leq 1$ и всех $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Это необходимые условия устойчивости рассматриваемой задачи Коши в пространстве L_2 , гарантирующие отсутствие неустойчивости экспоненциального типа. Но при наличии кратных собственных значений $\lambda(e^{i\phi})$ может возникать неустойчивость степенного типа (см. [3]) $\|G^n\| \asymp n^\theta, \theta > 0$.

Матрица преобразования подобия

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ \lambda_1 - 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(T) = 1,$$

приводит матрицу A к треугольному виду:

$$T^{-1}AT = B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad B^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & D_n \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$D_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Сделав обратное преобразование, получаем

$$A^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^{n+1} + (1 - \lambda_1)\lambda_2^n & -\lambda_1(\lambda_1^n - \lambda_2^n) \\ (\lambda_1 - 1)(\lambda_1^n - \lambda_2^n) & (1 - \lambda_1)\lambda_1^n + \lambda_1\lambda_2^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1(1 - \lambda_1) & \lambda_1^2 \\ -(1 - \lambda_1)^2 & \lambda_1(\lambda_1 - 1) \end{bmatrix} D_n.$$

Элементы матрицы $A^n(e^{i\phi})$ являются тригонометрическими полиномами $p(e^{i\phi}) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{ik\phi}$. Норма p есть

$$\|p(e^{i\phi})\| = \sqrt{\sum_{k=-n}^n |a_k|^2} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |p(e^{i\phi})|^2 d\phi}.$$

Соответствующая матричная норма (см. [4]) есть

$$\|A^n(e^{i\phi})\|^2 = \sqrt{\sum_{k,j} \|a_{k,j}\|^2} = \sqrt{\sum_{k,j} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |a_{k,j}^n|^2 d\phi}.$$

Так как $|\lambda_i(e^{i\phi})| \leq 1$ для всех $0 \leq \phi \leq 2\pi$, справедлива следующая оценка:

$$\|A^n(e^{i\phi})\| \leq 7 + 5 \|D_n(e^{i\phi})\|.$$

Оценка скорости роста ошибок округления свелась к оценке

$$\|D_n\| = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} \right|^2 d\phi} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} \right|^2 d\phi}.$$

Так как λ_i являются функциями $\cos^2(\phi/2)$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n|^2 d\phi = 2 \int_0^{\pi} |D_n|^2 d\phi.$$

2. СВЕДЕНИЕ ОЦЕНКИ $\|D_n\|$ К ВЫЧИСЛЕНИЮ КЛАССИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛА

В [2] рассматривалось только $\gamma = 1$. В этом случае собственные значения имеют более простую структуру:

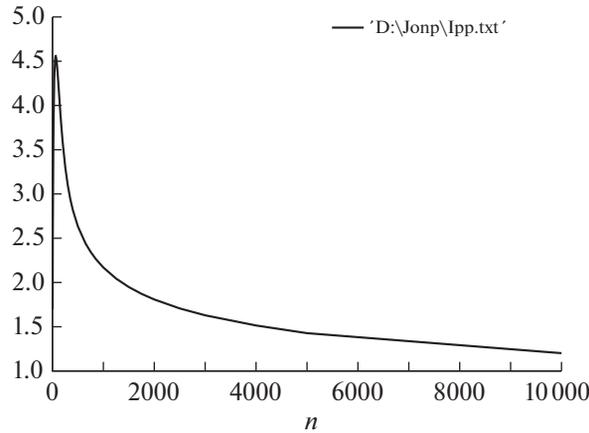
$$\lambda_{1,2} = \frac{\cos(\phi) \pm \sqrt{\delta^2 - \sin^2(\phi)}}{1 + \delta}.$$

Суть дела ясна в общем случае для $0 < \gamma \leq 1$. Из оценок, полученных в [2], следует, что $\|D_n\| < 9.525$ для всех n .

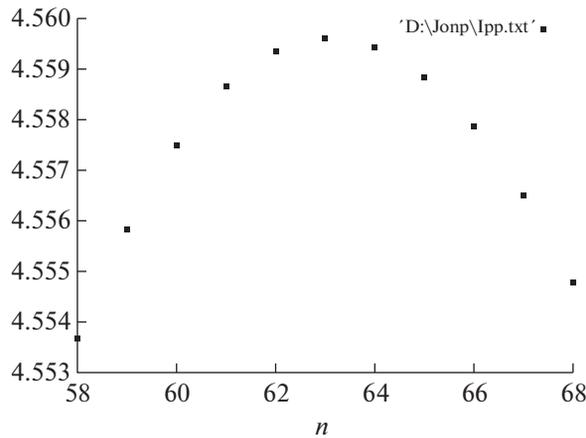
В этой работе разработан численно-аналитический алгоритм для определения значений $\|D_n\|$ на всем интервале вычисления ВАХ: $t \leq t_{\max}$. По этому алгоритму (в случае $\tau = h = 0.1, t_{\max} = 1000$) были вычислены значения

$$\|D_n\|, \quad n = 3, 7, 14, 21, 35, \dots, 5000, 10\,000,$$

по которым построен график (фиг. 1). Получена новая более точная оценка $\|D_n\| \leq 4.56$. Максимум достигается при $n = 63$, $\|D_{63}\| = 4.5596\dots$ (фиг. 2, где представлен график $\|D_n\|$ в окрестности пика).



Фиг. 1. График $\|D_n\|$, $n \leq 10\,000$, в случае $\tau = h = 0.1$, $t_{\max} = 1000$.



Фиг. 2. В окрестности пика фиг. 1 звездочками отмечены значения $\|D_n\|$. Максимум $\|D_n\|$ достигается при $n = 63$.

Обе оценки гарантируют ограниченность ошибок округления при решении системы (1) и тем самым доказывают достоверность вычисленных вольт-амперных характеристик ДДП. На фиг. 3 представлены графики $\|D_n\|$, $n \leq 5000$, для различных τ , h . Сравнивая эти графики, видим, что быстрее всего $\|D_n\|$ растет в случае $\gamma = 1/5$. При $\gamma = 0$ собственные значения становятся равными единице, а $\|D_n\| = n$.

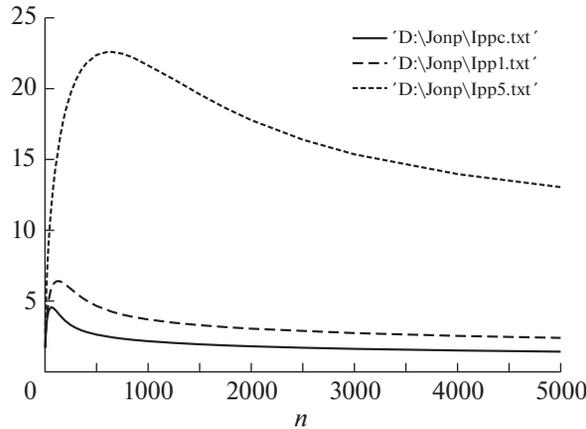
Сделав в (2) замену переменных $z = 1 - \gamma^2 + \gamma^2 \cos(\varphi)$, получаем

$$\lambda_{1,2} = \frac{z \pm \sqrt{z^2 + \delta^2 - 1}}{1 + \delta}.$$

После соответствующей подстановки в (3) и ряда алгебраических манипуляций, находим, что D_n есть многочлен степени $n - 1$ от z с вещественными коэффициентами: $D_n = P_n(z)/(1 + \delta)^{n-1}$,

$$P_n = \frac{(z + \sqrt{z^2 + \delta^2 - 1})^n - (z - \sqrt{z^2 + \delta^2 - 1})^n}{2\sqrt{z^2 + \delta^2 - 1}} = \sum_{k=1}^{nc} C_n^{k-1} z^{n-(2k-1)} (z^2 + \delta^2 - 1)^{k-1}. \quad (4)$$

Здесь nc есть целая часть $(n + 1)/2$, $nc = [(n + 1)/2]$. Если n – нечетное, то $P_n(z)$ и $P_n^2(z)$ – четные многочлены. Если n – четное, $n - (2k - 1)$ – нечетное, $P_n(z)$ – нечетный, но $P_n^2(z)$ – четный многочлен.



Фиг. 3. Графики $\|D_n\|$, $n \leq 5000$: сплошная линия — для $\tau = h = 0.1$, штриховая линия — для $\tau = h = 0.05$, пунктирная линия — для $h = 0.05$, $\tau = h/5$.

Заметим, что $z(0) = 1$, $z(\pi) = 1 - 2\gamma^2$, $dz = -\gamma^2 \sin(\phi)d\phi$,

$$\gamma^2 \cos(\phi) = z - 1 + \gamma^2, \quad \gamma^2 \sin(\phi) = \sqrt{Y(z)}, \quad d\phi = -\frac{dz}{\sqrt{Y(z)}},$$

где

$$Y(z) = \gamma^4 - (z - 1 + \gamma^2)^2. \tag{5}$$

Задача свелась к вычислению интегралов

$$\frac{1}{\pi} \int_{1-2\gamma^2}^1 P_n^2(z) \frac{dz}{\sqrt{Y(z)}}. \tag{6}$$

Заметим, что $Y(1) = Y(1 - 2\gamma^2) = 0$. В расчетах был использован хорошо известный алгоритм (см., например, [5]):

$$\int \frac{P_n^2(z)}{\sqrt{Y(z)}} dz = Q(z)\sqrt{Y(z)} + \lambda \int \frac{dz}{\sqrt{Y(z)}},$$

где полином $Q(z)$ и константа λ определяются соотношением

$$P_n^2(z) = Q'(z)Y(z) + \frac{1}{2}Q(z)Y'(z) + \lambda.$$

В рассматриваемом случае (см. (5)) соотношение принимает следующий вид:

$$P_n^2(z) = Q'(z)[-z^2 + 2z(1 - \gamma^2) - (1 - 2\gamma^2)] + Q(z)[-z + (1 - \gamma^2)] + \lambda. \tag{7}$$

В результате имеем

$$-\frac{1}{\pi} \int_1^{1-2\gamma^2} P_n^2(z) \frac{dz}{\sqrt{Y(z)}} = \frac{1}{\pi} \left(Q(z)\sqrt{Y(z)} \Big|_1^{1-2\gamma^2} + \lambda \int_{1-2\gamma^2}^1 \frac{dz}{\sqrt{Y(z)}} \right) = \lambda, \quad \|D_n\| = \frac{\sqrt{\lambda}}{(1 + \delta)^{n-1}}.$$

В заключение заметим, что

$$\frac{1}{\pi} \int_{1-2\gamma^2}^1 \frac{dz}{\sqrt{\gamma^4 - (z - 1 + \gamma^2)^2}} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{2}{\pi} \arcsin(1) = 1.$$

По ходу вычисления была сделана замена $z - 1 + \gamma^2 = \gamma^2 u$. В случае больших n трудность возникает уже при вычислении коэффициентов $P_n(z)$. Был разработан и реализован с использованием системы REDUCE (см. [6]) специальный алгоритм. При этом пришлось отдельно рассмат-

ривать случаи четных и нечетных n . Далее приводится алгоритм, реально реализованный на суперкомпьютере GOVORUN.

3. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ $\|D_n\|$, СЛУЧАЙ ЧЕТНЫХ n

В этом случае $n = 2nc$, (4) принимает вид

$$P_n(z) = z \sum_{k=1}^{nc} C_n^{2k-1} z^{2(nc-k)} (z^2 + \delta^2 - 1)^{k-1}. \quad (8)$$

Сделав подстановки $z^2 = (\delta^2 - 1)w^2$, получим

$$P_n(z) = z(\delta^2 - 1)^{nc-1} Pt(w), \quad P_n(z)^2 = z^2(\delta^2 - 1)^{n-2} Pt(w)^2,$$

где

$$Pt(w) = \sum_{k=1}^{nc} C_n^{2k-1} w^{2(nc-k)} (w^2 + 1)^{k-1}.$$

После замены $nc - k = \xi - 1$ имеем

$$Pt(w) = \sum_{\xi=1}^{nc} C_n^{2\xi-1} w^{2(\xi-1)} (w^2 + 1)^{nc-\xi} = \sum_{j=1}^{nc} g_j w^{2(j-1)}, \quad g_j = \sum_{k=1}^j C_n^{2k-1} C_{nc-k}^{j-k}.$$

На первых шагах был реализован тривиальный алгоритм вычисления g_j :

$$g_j = \frac{n!}{(nc-j)!} \sum_{k=1}^j \frac{(nc-k)!}{(j-k)!(2k-1)!(n-2k+1)!}, \quad 1 \leq j \leq nc.$$

В процессе серии численных экспериментов был найден алгоритм, позволивший сократить расчетное время более, чем в 7 раз:

$$g_1 = n; \quad g_j = \frac{n!}{(n-2j+1)!(2j-1)!} \sum_{k=1}^j p(k), \quad 2 \leq j \leq nc-1,$$

$$p(j) = 1, \quad p(k) = p(k+1) \frac{(2k+1)k}{(j-k)(n-2k+1)}, \quad g_{nc} = 2^{n-1}.$$

После того, как g_j определены, коэффициенты $P_n^2(z)$ вычисляются следующим образом:

$$Pt^2(w) = \sum_{k=1}^{n-1} b_k w^{2(k-1)}, \quad P_n^2(z) = \sum_{k=1}^{n-1} b_k (\delta^2 - 1)^{n-k-1} z^{2k}.$$

Заметим, что $b_1 = g_1^2 = n^2$, $b_{n-1} = g_{nc}^2 = 2^{2(n-1)}$,

$$b_k = \sum_{l=1}^k g_l g_{k-l+1} \quad \text{для } 1 \leq k \leq nc, \quad b_k = \sum_{l=k-nc+1}^{nc} g_l g_{k-l+1} \quad \text{для } k > nc.$$

Из определения (6) следует, что $Q(z)$ есть полином степени $2n-3$:

$$Q(z) = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k z^{2k-1} + c_k z^{2(k-1)}),$$

$$Q'(z) = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) a_k z^{2(k-1)} + \sum_{k=2}^{n-1} 2(k-1) c_k z^{2k-3}.$$

Вычисляем шаг за шагом

$$a_{n-1} = -\frac{b_{n-1}}{2(n-1)}, \quad c_{n-1} = \left(2 + \frac{1}{2n-3}\right) (1 - \gamma^2) a_{n-1},$$

$$a_{k-1} = -a_k(1 - 2\gamma^2) - \frac{b_k(\delta^2 - 1)^{n-k-1} + a_k(1 - 2\gamma^2)}{2(k-1)} + \left[2 + \frac{1}{2(k-1)}\right](1 - \gamma^2)c_k,$$

$$c_{k-1} = \left(2 + \frac{1}{2k-3}\right)(1 - \gamma^2)a_{k-1} - \left(1 + \frac{1}{2k-3}\right)(1 - 2\gamma^2)c_k, \quad k = n-1, n-2, \dots, 2.$$

После того, как величины a_1, c_1 определены, вычисляем $\|D_n\|$. Учитывая, что

$$P_n^2(0) = 0 \quad (\text{см. (8)}), \quad Q(0) = a_1, \quad Q'(0) = c_1, \quad Y(0) = 1 - 2\gamma^2, \quad Y'(0) = 2(1 - \gamma^2) \quad (\text{см. (5)}),$$

получаем, что при $z = 0$ соотношение (7) принимает вид

$$0 = -(1 - 2\gamma^2)a_1 + (1 - \gamma^2)c_1 + \lambda,$$

следовательно,

$$\lambda = (1 - 2\gamma^2)a_1 - (1 - \gamma^2)c_1, \quad \|D_n\| = \sqrt{\lambda}/(1 + \delta)^{n-1}.$$

4. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ $\|D_n\|$, СЛУЧАЙ НЕЧЕТНЫХ n

В этом случае $n = 2nc - 1$, (4) принимает вид

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{nc} C_n^{2k-1} z^{2(nc-k)} (z^2 + \delta^2 - 1)^{k-1}. \quad (9)$$

Сделав подстановку $z^2 = (\delta^2 - 1)w^2$, имеем

$$P_n(z) = (\delta^2 - 1)^{nc-1} Pt(w), \quad P_n^2(z) = (\delta^2 - 1)^{n-1} Pt^2(w),$$

$$Pt(w) = \sum_{k=1}^{nc} C_n^{2k-1} w^{2(nc-k)} (1 + w^2)^{k-1}, \quad Pt^2(w) = \sum_{k=1}^n b_j w^{2(j-1)}.$$

После замены $nc - k = \xi - 1$ получаем

$$Pt(w) = \sum_{\xi=1}^{nc} C_n^{n-2(\xi-1)} w^{2(\xi-1)} (1 + w^2)^{nc-\xi} = \sum_{j=1}^{nc} g_j w^{2(j-1)}, \quad g_j = \sum_{k=1}^j C_n^{n-2(k-1)} C_{nc-k}^\theta.$$

Здесь θ определяется соотношением $2(k-1) + 2\theta = 2(j-1)$, $\theta = j - k$. Первоначально g_j вычислялись напрямую:

$$g_j = \sum_{k=1}^j \frac{n!(nc-k)!}{(2(k-1))!(n-2(k-1))!(j-k)!(nc-j)!}.$$

В процессе серии численных экспериментов был найден алгоритм, позволивший сократить расчетное время более, чем в 7 раз:

$$g_1 = 1, \quad g_j = \frac{n!}{(n-2(j-1))!(2(j-1))!} \sum_{k=1}^j p(k), \quad 2 \leq j \leq nc-1, \quad g_{nc} = 2^{n-1},$$

$$p(j) = 1, \quad p(k) = p(k+1) \frac{k(2k-1)}{(j-k)[n-2(k-1)]}, \quad k = j-1, j-2, \dots, 1.$$

После того, как g_j определены, коэффициенты $P_n^2(z)$ вычисляются следующим образом.

$$P_n^2(z) = \sum_{k=1}^n b_k (\delta^2 - 1)^{n-k} z^{2(k-1)},$$

где

$$b_k = \sum_{l=1}^k g_l g_{k-l+1} \quad \text{для } k \leq nc, \quad b_k = \sum_{l=k}^{nc} g_l g_{k-l+1} \quad \text{для } k > nc.$$

В частности, имеем $b_1 = 1$, $b_n = 2^{2(n-1)}$. Из определения (6) следует, что $Q(z)$ есть полином степени $2n - 3$:

$$Q(z) = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k z^{2k-1} + c_k z^{2(k-1)}), \quad Q'(z) = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1)a_k z^{2(k-1)} + \sum_{k=2}^{n-1} 2(k-1)c_k z^{2k-3}.$$

И мы вычисляем последовательно

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= -\frac{b_n}{2(n-1)}, \quad c_{n-1} = a_{n-1}(1-\gamma^2)\left(2 + \frac{1}{2n-3}\right), \\ a_{k-1} &= -a_k(1-2\gamma^2) - \frac{b_k(\delta^2-1)^{n-k} + a_k(1-2\gamma^2)}{2(k-1)} + c_k\left[2 + \frac{1}{2(k-1)}\right](1-\gamma^2), \\ c_{k-1} &= a_{k-1}\left(2 + \frac{1}{2k-3}\right)(1-\gamma^2) - c_k\left(1 + \frac{1}{2k-3}\right)(1-2\gamma^2), \quad k = n-1, n-2, \dots, 2. \end{aligned}$$

После того, как a_1 , c_1 определены, вычисляем $\|D_n\|$. Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} P_n^2(0) &= (\delta^2 - 1)^{n-1} \quad (\text{см. (9)}), \quad Q(0) = c_1, \quad Q'(0) = a_1, \\ Y(0) &= -1 + 2\gamma^2, \quad Y'(0) = 2(1 - \gamma^2) \quad (\text{см. (5)}), \end{aligned}$$

получаем, что при $z = 0$ соотношение (7) принимает вид

$$P_n^2(0) = (-1 + 2\gamma^2)a_1 + (1 - \gamma^2)c_1 + \lambda,$$

следовательно,

$$\lambda = (1 - 2\gamma^2)a_1 - (1 - \gamma^2)c_1 + (\delta^2 - 1)^{n-1}, \quad \|D_n\| = \sqrt{\lambda}/(1 + \delta)^{n-1}.$$

Замечание 1. Большую часть времени занимает вычисление коэффициентов g_j . Использование многопроцессорных компьютеров упрощает проблему существенно. Мы можем одновременно вычислять g_j для $j = 1 + m \times k, 2 + m \times k, \dots, m + m \times k \leq nc$ на m процессорах.

Замечание 2. Ограниченность $\|A^n(e^{i\theta})\|$ гарантирует (в известной степени) корректность вычисления ВАХ длинных джозефсоновских переходов при использовании рассматриваемой разностной схемы с учетом отброшенных $-\sin(u_v^n) + I(n)$. Ошибки округления ϵ_v^n , η_v^n (соответствующие u_v^n , v_v^n) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \epsilon_v^{n+1} &= \epsilon_v^n + \frac{1-\delta}{1+\delta}\eta_v^n + \frac{\gamma^2}{1+\delta}(\epsilon_{v+1}^n - 2\epsilon_v^n + \epsilon_{v-1}^n) + f_v^n, \\ \eta_v^{n+1} &= \frac{1-\delta}{1+\delta}\eta_v^n + \frac{\gamma^2}{1+\delta}(\epsilon_{v+1}^n - 2\epsilon_v^n + \epsilon_{v-1}^n) + f_v^n. \end{aligned}$$

Здесь $f_v^n = \tau^2[\sin(u_v^n + \epsilon_v^n) - \sin(u_v^n)]/(1 + \delta)$. Справедливы оценки

$$\begin{aligned} |f_v^n| &= \left| \tau^2 2 \sin(\epsilon_v^n/2) \cos(u_v^n + \epsilon_v^n/2)/(1 + \delta) \right| \leq \left| \tau^2 \epsilon_v^n/(1 + \delta) \right|, \\ \|f^n\| &\leq \tau^2 \|\epsilon^n\|/(1 + \delta), \quad \|f^n\|^2 = \sum_v |f_v^n|^2, \quad \|\epsilon^n\|^2 = \sum_v |\epsilon_v^n|^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что система (1) определяет (с точностью до $O(\tau^2)$) оператор перехода от слоя к слою ошибок округления, возникающих при использовании предлагаемой разностной схемы.

Благодарим Е.А. Колганову за бесценную помощь на первой стадии вычислений, А.М. Рапортиренко, установившему REDUCE на суперкомпьютер GOVORUN. Благодарим Г.М. Кобелькова за полезные критические замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Башашин М.В., Земляная Е.В., Рахмонов И.Р., Шукринов Ю.М., Атанасова П.Х., Волохова А.В.* Вычислительная схема и параллельная реализация для моделирования системы длинных джозефсоновских переходов // Компьют. исслед. и моделирование. 2016. Т. 6. № 4. С. 593–604.
2. *Сердюкова С.И.* Моделирование динамических процессов в длинных джозефсоновских переходах. Проблема вычисления вольт-амперных характеристик. Оценки скорости роста ошибок округления для разностной схемы второго порядка точности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 1. С. 159–166.
3. *Урм В.Я.* О необходимых и достаточных условиях устойчивости систем разностных уравнений // Докл. АН СССР. 1961. Т. 139. № 1. С. 40–43.
4. *Ланкастер П.* Теория матриц. Гл. 6. М.: Физматлит, 1982. С. 179.
5. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. М.: Физматлит, 1959. С. 67.
6. REDUCE User's Guide for Unix Systems. Ver. 8 by Winfried Neun ZIB, 2004.
7. IT-ecosystem of the HybriLIT heterogeneous platform for high-performance computing and training of IT-specialists. Selected Papers of the 8th International Conference "Distributed Computing and Grid-technologies in Science and Education" (GRID 2018), Dubna, Russia, September 10–14, 2018, CEUR-WS.org/Vol-2267. by Gh. Adam, M. Bashashin, D. Belyakov et al.