УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ, РАЗРУШЕНИЕ И ГЁЛЬДЕРОВСКАЯ РЕГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ВОЛН В ПЛАЗМЕ. I. ФОРМУЛЫ ГРИНА[1)]

М. О. Корпусов[1,*], Е. А. Овсянников[1,]**

[1] *119991 Москва, Ленинские горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия*

**e-mail: korpusov@gmail.com*

***e-mail: evg.bud@yandex.ru*

Поступила в редакцию 29.11.2021 г.
Переработанный вариант 11.03.2022 г.
Принята к публикации 11.04.2022 г.

В статье дается вывод трех нелинейных уравнений из теории ионно-звуковых и дрейфовых волн в плазме. Затем строится фундаментальное решение общей линейной части выведенных нелинейных уравнений и изучаются его свойства гладкости. После этого строится вторая формула Грина в ограниченной области, из которой получается третья формула Грина в ограниченной области. Наконец, в определенном классе функций строятся два варианта третьих формул Грина во всем пространстве. Библ. 30.

Ключевые слова: нелинейные уравнения соболевского типа, фундаментальное решение, формулы Грина.

DOI: 10.31857/S0044466922090071

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе мы рассмотрим задачи Коши для следующих трех нелинейных уравнений, объединенных общей линейной частью:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta u(x,t) - u(x,t)) + \sum_{j=1}^{3}\omega_j^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j^2} + \frac{\partial u^2(x,t)}{\partial t} = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta u(x,t) - u(x,t)) + \sum_{j=1}^{3}\omega_j^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j^2} + \frac{\partial |D_x u|^2\ (x,t)}{\partial t} = 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta u(x,t) - u(x,t)) + \sum_{j=1}^{3}\omega_j^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 u^2(x,t)}{\partial t^2} = 0, \tag{1.3}$$

причем

$$\sum_{j=1}^{3}\omega_j^2 > 0$$

и мы имеем дело с уравнениями из теории ионно-звуковых волн, когда $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 > 0$, и с уравнениями из теории дрейфовых волн в плазме, когда $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $\omega_3 > 0$. Для соответствующих задач Коши мы докажем существование и единственность решений в классе

$$u(x,t) \in \mathbb{C}_b^{(2+2)}((1+|x|^2)^{\beta_1/2};\mathbb{R}^3\times[0,T]) \cap \mathbb{C}^{(2)}([0,T];\mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)), \quad \alpha\in(0,1),$$

[1)]Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” и программы стратегического академического лидерства РУДН.

для начальных функций

$$u_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}((1+|x|^2)^{\beta_2/2};\mathbb{R}^3), \quad \alpha \in (0,1), \quad \beta_2 \geqslant \beta_1 \geqslant 0,$$

$$u_1(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}((1+|x|^2)^{\beta_3/2};\mathbb{R}^3), \quad \alpha \in (0,1), \quad \beta_3 \geqslant \beta_1 \geqslant 0.$$

Причем для нелинейных уравнений (1.1) и (1.2) мы докажем существование непродолжаемых решений, а для уравнения (1.3) существование локального во времени решения. Для соответствующей задачи Коши для уравнения (1.1) энергетическим методом, развитым в работах [1]—[4], мы получим достаточные условия разрушения решения за конечное время и получим оценку сверху на время разрушения решения. Для соответствующей задачи Коши для уравнения (1.3) методом нелинейной емкости С.И. Похожаева [5] мы получим результат о разрушении решений за конечное время и два результата об отсутствии даже локальных решений, а также получим оценку сверху для времени разрушения решения.

Настоящая работа продолжает наши исследования, начатые в работах [6]—[14]. Особо отметим нашу работу [15], в которой, в частности, были изучены задачи Коши для соответствующих уравнениям (1.1) и (1.3) $1+1$—мерные уравнения следующего вида:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\big(u_{xx}(x,t) - u(x,t)\big) + \omega^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial(|u|^q u)(x,t)}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\big(u_{xx}(x,t) - u(x,t)\big) + \omega^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u^2(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad \omega > 0,$$

где $q > 0$, $\omega > 0$.

В этой работе изучались вопросы локальной разрешимости и разрушения классических решений задач Коши за конечное время.

В нашей работе, состоящей из трех частей, мы последовательно развиваем теорию потенциала для линейной части уравнений (1.1)—(1.3). Отметим, что теория потенциала для уравнения С.Л. Соболева была рассмотрена в работе [16]. Затем теория потенциала развивалась для более сложных уравнений в работах [17]—[19] (см. также работу [20]).

Отметим, что уравнения (1.1)—(1.3) относятся к нелинейным уравнениям соболевского типа. Для уравнений соболевского типа разработаны специальные методы исследования. Например, в работах [21]—[23] методом вырожденных полугрупп Г.А. Свиридюка были исследованы в достаточно общей форме разнообразные задачи для уравнений соболевского типа.

2. ДРЕЙФОВЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ

В этом разделе мы приведем вывод рассматриваемых ниже нелинейных уравнений дрейфовых волн в плазме во внешнем магнитном поле (см. работы [24]—[27]).

Пусть $\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{e}_3$ и $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — это прямоугольная правая декартова система координат. Рассмотрим систему уравнений квазистационарного электрического поля:

$$\begin{gathered} \operatorname{div}\mathbf{D} = -4\pi n_e, \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \\ n_e = n_{1e} + n_{2e}, \quad n_{1e} = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right), \end{gathered} \tag{2.1}$$

где n_{2e} — это концентрация свободных электронов, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$ — векторы напряженности, индукции электрического поля и вектор поляризации. Эти уравнения дополняются следующими уравнениями (см. работы [24]—[27]):

$$\begin{gathered} \mathbf{v} = -\frac{c}{B_0}\left\{-[\nabla\phi, \mathbf{e}_3] + \frac{1}{\omega_B}\frac{\partial}{\partial t}\nabla_\perp\phi\right\} + v_3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} = -\frac{e}{M}\frac{\partial\phi}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} = en_0\mathbf{v}, \end{gathered} \tag{2.2}$$

где $\mathbf{v}$ — вектор скорости ионов, c — скорость света, $\omega_B = eB_0/(Mc)$ — частота прецессии Лармора ионов в магнитном поле, M — масса ионов. Кроме того, рассмотрим следующие альтернативные уравнения:

$$\frac{\partial n_{2e}}{\partial t} + q_0\phi^2 = 0, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial n_{2e}}{\partial t} + m_0|\nabla\phi|^2 = 0, \tag{2.4}$$

$$n_{2e} = 0. \tag{2.5}$$

Из системы уравнений (2.1), (2.2) с учетом (2.3) вытекает следующее дифференциальное следствие:

$$\frac{u_A^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta\phi - 4\pi n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right)\right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_\perp\phi + \omega_B^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} + 4\pi e\frac{u_A^2}{c^2}q_0\frac{\partial\phi^2}{\partial t} = 0, \tag{2.6}$$

из уравнений (2.1), (2.2) с учетом (2.4) вытекает следующее дифференциальное следствие:

$$\frac{u_A^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta\phi - 4\pi n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right)\right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_\perp\phi + \omega_B^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} + 4\pi e\frac{u_A^2}{c^2}q_0\frac{\partial|\nabla\phi|^2}{\partial t} = 0, \tag{2.7}$$

из уравнений (2.1), (2.2) с учетом (2.5) вытекает следующее дифференциальное следствие:

$$\frac{u_A^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta\phi - 4\pi n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right)\right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_\perp\phi + \omega_B^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} = 0, \tag{2.8}$$

где

$$\Delta := \Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \Delta_\perp := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

$$u_A^2 := \frac{B_0^2}{4\pi n_0 M}, \quad \omega_B^2 = \left(\frac{eB_0}{Mc}\right)^2,$$

u_A — альфвеновская скорость ионов. В предположении, что температура ионов $T_i \ll T_e$, можно сделать в уравнениях (2.6) и (2.7) частичную линеаризацию

$$\exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right) \simeq 1 + \frac{e\phi}{kT_e}, \tag{2.9}$$

а в уравнении (2.8) сделать следующее упрощение:

$$\exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right) \simeq 1 + \frac{e\phi}{kT_e} + \frac{1}{2}\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right)^2. \tag{2.10}$$

Тогда уравнение (2.6) с учетом (2.9) перейдет в уравнение

$$\frac{u_A^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta\phi - \frac{4\pi n_0 e}{kT_e}\phi\right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_\perp\phi + \omega_B^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} + 4\pi e\frac{u_A^2}{c^2}q_0\frac{\partial\phi^2}{\partial t} = 0. \tag{2.11}$$

Уравнение (2.7) с учетом (2.9) перейдет в уравнение

$$\frac{u_A^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta\phi - \frac{4\pi n_0 e}{kT_e}\phi\right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_\perp\phi + \omega_B^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} + 4\pi e\frac{u_A^2}{c^2}q_0\frac{\partial|\nabla\phi|^2}{\partial t} = 0. \tag{2.12}$$

Уравнение (2.8) с учетом (2.10) перейдет в уравнение

$$\frac{u_A^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta\phi - \frac{4\pi n_0}{kT_e}\phi - \frac{2\pi n_0 e^2}{(kT_e)^2}\phi^2\right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_\perp\phi + \omega_B^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} = 0. \tag{2.13}$$

При помощи несложных замен уравнения (2.11), (2.12) и (2.13) можно записать в виде уравнений (1.1), (1.2) и (1.3), в которых

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 > 0.$$

3. ИОННО-ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ

Уравнения ионно-звуковых волн выводятся в предположении, что температура ионов T_i много меньше температуры электронов T_e. Это более подробно изложено в работе [28]. Тогда для скорости ионов справедлива следующая формула:

$$Mn_0 \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} - en_0 \nabla \phi. \tag{3.1}$$

Дополним полученное уравнение (3.1) уравнениями электрической части системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = -4\pi n_e, \quad \mathbf{D} = -\nabla \phi + 4\pi \mathbf{P}, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = en_0 \mathbf{v}_i, \tag{3.3}$$

где $\mathbf{D}$ – вектор индукции электрического поля, $\mathbf{P}$ – вектор поляризации, $n_e = n_{1e} + n_{2e}$, n_{2e} – концентрация свободных электронов, а для плотности n_{1e} связанных электронов справедливо равенство

$$n_{1e} = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right).$$

Для уравнения, связывающего концентрацию n_{2e} свободных электронов и потенциал ϕ электрического поля в плазме, воспользуемся тремя альтернативами:

$$\frac{\partial n_{2e}}{\partial t} + q_0 \phi^2 = 0, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial n_{2e}}{\partial t} + m_0 |\nabla \phi|^2 = 0, \tag{3.5}$$

$$n_{2e} = 0. \tag{3.6}$$

Из уравнений (3.1) и (3.3) получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} = -\frac{e^2 n_0}{M} \nabla \phi. \tag{3.7}$$

Теперь из уравнений (3.2), (3.4) и (3.7) получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta_3 \phi - 4\pi n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right)\right) + \omega_{pi}^2 \Delta_3 \phi + 4\pi q_0 \frac{\partial \phi^2}{\partial t} = 0. \tag{3.8}$$

Из уравнений (3.2), (3.5) и (3.7) приходим к такому уравнению:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta_3 \phi - 4\pi n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right)\right) + \omega_{pi}^2 \Delta_3 \phi + 4\pi q_0 \frac{\partial |\nabla \phi|^2}{\partial t} = 0, \tag{3.9}$$

а из уравнений (3.2), (3.6) и (3.7) приходим к такому уравнению:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta_3 \phi - 4\pi n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right)\right) + \omega_{pi}^2 \Delta_3 \phi = 0, \tag{3.10}$$

где

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \omega_{pi} = \left(\frac{4\pi e^2 n_0}{M}\right)^{1/2}.$$

Далее для уравнений (3.8) и (3.9) воспользуемся частичной линеаризацией (2.9), а для уравнения (3.10) воспользуемся упрощением (2.10). Тогда уравнения (3.8), (3.9) и (3.10) перейдут в следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta_3\phi - \frac{4\pi n_0 e}{kT_e}\phi\right) + \omega_{pi}^2\Delta_3\phi + 4\pi q_0\frac{\partial\phi^2}{\partial t} = 0, \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta_3\phi - \frac{4\pi n_0 e}{kT_e}\phi\right) + \omega_{pi}^2\Delta_3\phi + 4\pi q_0\frac{\partial|\nabla\phi|^2}{\partial t} = 0, \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta_3\phi - \frac{4\pi n_0 e}{kT_e}\phi - \frac{2\pi n_0 e^2}{(kT_e)^2}\phi^2\right) + \omega_{pi}^2\Delta_3\phi = 0. \tag{3.13}$$

При помощи несложных замен уравнения (3.11), (3.12) и (3.13) можно записать в виде уравнений (1.1), (1.2) и (1.3), в которых

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 > 0.$$

4. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Символом $[x,y]$ мы обозначаем отрезок, соединяющий точки $x, y \in \mathbb{R}^3$:

$$[x,y] = \left\{z \in \mathbb{R}^3 : z = sy + (1-s)x,\ s \in [0,1]\right\}.$$

Символом $|a,b|$ при $a, b \in \mathbb{R}^1$ мы обозначаем следующее множество:

$$|a,b| = \begin{cases} [a,b], & \text{если} \quad a \leqslant b; \\ [b,a], & \text{если} \quad b \leqslant a. \end{cases}$$

Символом $\mathbb{C}^{(m)}[0,T]$ при $m \in \mathbb{N}$ мы обозначаем линейное пространство непрерывно дифференцируемых функций, причем производные в граничных точках $t = 0$ и $t = T$ понимаются в смысле односторонних пределов.

В работе мы будем пользоваться обозначениями из [29]. Символом $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)$ мы обозначаем пространство непрерывных и ограниченных функций, норма которого имеет следующий вид:

$$|f|_0 := \sup_{x\in\mathbb{R}^3}|f(x)|.$$

Символом $\mathbb{C}_b^{(k)}(\mathbb{R}^3)$ при $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ мы обозначаем банахово пространство функций, у которых существуют, непрерывны и ограничены все частные производные по координатам $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ и ограничена следующая норма:

$$|f|_k = \sum_{|\beta|\leqslant k}\left|D^\beta f(x)\right|_0, \quad D_x^\beta = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}}\frac{\partial^{\beta_2}}{\partial x_2^{\beta_2}}\frac{\partial^{\beta_3}}{\partial x_3^{\beta_3}},$$

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{Z}_+^3, \quad |\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3.$$

Символом $\mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)$ мы обозначаем линейное подпространство функций из банахова пространства $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)$, для которых конечна норма

$$|f|_\alpha := |f|_0 + [f]_\alpha, \quad [f]_\alpha := \sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}, \quad \alpha \in (0,1).$$

Символом $\mathbb{C}^{k+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ при $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ мы обозначаем линейное пространство функций из банахова пространства $\mathbb{C}_b^{(k)}(\mathbb{R}^3)$, для которых конечна норма:

$$|f|_{k+\alpha} := |f|_k + \sum_{|\beta|=k}[D_x^\beta f(x)]_\alpha.$$

Кроме того, мы систематически будем использовать банаховы пространства абстрактных функций $\mathbb{C}([0,T];\mathbb{B})$, $\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{B})$ и $\mathbb{C}^{(2)}([0,T];\mathbb{B})$, где $\mathbb{B}$ – банахово пространство относительно нормы $|\cdot|_{\mathbb{B}}$. Линейное пространство $\mathbb{C}([0,T];\mathbb{B}) \ni f(t)$ определяется следующими свойствами:

$$f(t):[0,T]\to\mathbb{B},\quad |f(t_2)-f(t_1)|_{\mathbb{B}}\to+0\quad \text{при}\quad |t_2-t_1|\to+0,\quad t_1,t_2\in[0,T].$$

Линейное пространство $\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{B})$ определяется как такое подпространство линейного пространства $\mathbb{C}([0,T];\mathbb{B})$, что существует сильная производная

$$\frac{df}{dt}(t)\in\mathbb{C}([0,T];\mathbb{B}),\quad \left|\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}-\frac{df}{dt}(t)\right|_{\mathbb{B}}\to+0\quad \text{при}\quad |\Delta t|\to+0.$$

Линейное пространство $\mathbb{C}^{(2)}([0,T];\mathbb{B})$ определяется индуктивным образом. Линейные пространства $\mathbb{C}([0,T];\mathbb{B})$, $\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{B})$ и $\mathbb{C}^{(2)}([0,T];\mathbb{B})$ являются банаховыми относительно соответствующих норм

$$\|f(t)\|_T := \sup_{t\in[0,T]}|f(t)|_{\mathbb{B}},\quad \|f(t)\|_{1,T} := \sup_{t\in[0,T]}|f(t)|_{\mathbb{B}} + \sup_{t\in[0,T]}\left|\frac{df}{dt}(t)\right|_{\mathbb{B}},$$

$$\|f(t)\|_{2,T} := \sup_{t\in[0,T]}|f(t)|_{\mathbb{B}} + \sup_{t\in[0,T]}\left|\frac{df}{dt}(t)\right|_{\mathbb{B}} + \sup_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^2f}{dt^2}(t)\right|_{\mathbb{B}}.$$

Символом $\mathbb{C}_b^{(m+n)}(\mathbb{R}^3\times[0,T])$ мы обозначаем такие функции $f(x,t)$, что

$$D_t^k D_x^\beta f(x,t)\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3\times[0,T])$$

для всех $k=\overline{0,n}$ и $|\beta|\leqslant m$, причем все смешанные производные коммутируют. Аналогичным образом определяется $\mathbb{C}^{(2+2)}(\bar{\Omega}\times[0,T])$, где $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ – ограниченная область. Символом $\mathbb{C}_0^{(2+2)}(\mathbb{R}^3\times[0,T])$ мы обозначаем такие функции $f(x,t)$, что имеют место следующие соотношения:

$$D_t^k D_x^\beta f(x,t)\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3\times[0,T])$$

для всех $k=\overline{0,2}$ и $|\beta|\leqslant 2$, причем $f(x,T)=f'(x,T)=0$ и для каждого $t\in[0,T]$ носитель функции $f(x,t)$ компактен в $\mathbb{R}^3$.

В работе мы систематически будем использовать весовые аналоги пространств непрерывных и ограниченных функций, а также весовые пространства Гёльдера. Символом $\mathbb{C}_b^{(m+n)}((1+|x|^2)^{\gamma/2};\mathbb{R}^3\times[0,T])$ при $m,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ мы обозначаем такие функции, что

$$(1+|x|^2)^{\gamma/2}f(x,t)\in\mathbb{C}_b^{(m+n)}(\mathbb{R}^3\times[0,T]),\quad \gamma\geqslant 0.$$

Символом $\mathbb{C}^{k+\alpha}((1+|x|^2)^{\gamma/2};\mathbb{R}^3)$ мы обозначаем такие функции $f(x)$, что

$$(1+|x|^2)^{\gamma/2}f(x)\in\mathbb{C}^{k+\alpha}(\mathbb{R}^3),\quad \gamma\geqslant 0,\quad k\in\mathbb{N}\cup\{0\},\quad \alpha\in(0,1).$$

Отметим, что справедлива следующая

Лемма 4.1. *Если* $\beta_1\geqslant 0$ *и* $\alpha\in(0,1)$, *то имеет место следующее вложение*:

$$\mathbb{C}^{(2)}([0,T];\mathbb{C}^{2+\alpha}((1+|x|^2)^{\beta_1/2};\mathbb{R}^3))\subset\mathbb{C}^{(2)}([0,T];\mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))\cap\mathbb{C}_b^{(2+2)}((1+|x|^2)^{\beta_1/2};\mathbb{R}^3\times[0,T]).$$

Символами $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3\times(0,T))$ мы обозначаем пространства обобщенных функций, соответствующие пространствам основных функций $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3\times(0,T))$. Символом $L^p(\mathbb{R}^3)$ при $p\in[1,+\infty)$ мы обозначаем пространства Лебега, для нормы которых используем обозначение

$$\|f\|_p=\left(\int_{\mathbb{R}^3}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Наконец, символом $H^2(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – область, мы обозначаем пространство С.Л. Соболева

$$H^2(\Omega) = \{f(x) : f(x) \in L^2(\Omega),\ D_{x_j} f(x) \in L^2(\Omega),\ D^2_{x_j x_k} f(x) \in L^2(\Omega)\}$$

при $j,k \in \overline{1,3}$. Кроме того, символом $D_x f(x)$ мы обозначаем ковектор градиент наравне с более привычным обозначением $\nabla_x f(x)$, причем $|D_x f(x)|$ или $|\nabla_x f(x)|$ – евклидова норма этих ковекторов.

5. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Рассмотрим следующее уравнение в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta\mathcal{E} - \mathcal{E}) + \omega_1^2 \mathcal{E}_{x_1x_1} + \omega_2^2 \mathcal{E}_{x_2x_2} + \omega_3^2 \mathcal{E}_{x_3x_3} = \delta(x)\delta(t).$$

Рассмотрим преобразование Лапласа от обеих частей этого равенства и получим следующее равенство:

$$(p^2 + \omega_1^2)\overline{\mathcal{E}}_{x_1x_1}(x,p) + (p^2 + \omega_2^2)\overline{\mathcal{E}}_{x_2x_2}(x,p) + (p^2 + \omega_3^2)\overline{\mathcal{E}}_{x_3x_3}(x,p) - p^2\overline{\mathcal{E}}(x,p) = \delta(x).$$

Одним из решений этого уравнения является следующее:

$$\overline{\mathcal{E}}(x,p) = -\frac{1}{\sqrt{p^2+\omega_1^2}\sqrt{p^2+\omega_2^2}\sqrt{p^2+\omega_3^2}} \frac{\exp(-p|y|)}{4\pi|y|},$$

$$|y| := \left(\frac{x_1^2}{p^2+\omega_1^2} + \frac{x_2^2}{p^2+\omega_2^2} + \frac{x_3^2}{p^2+\omega_3^2}\right)^{1/2}.$$

Воспользуемся следующим равенством:

$$\exp(-|x|\alpha) = \frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{R}^1} \frac{e^{i\mu|x|}}{\mu^2+\alpha^2} d\mu.$$

Получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{E}}(x,p) &= -\frac{p}{\sqrt{p^2+\omega_1^2}\sqrt{p^2+\omega_2^2}\sqrt{p^2+\omega_3^2}} \frac{1}{4\pi^2|x|}\int_{\mathbb{R}^1} \frac{e^{i\mu|x|}}{\mu^2 + \dfrac{|y|^2}{|x|^2}p^2} d\mu = \\ &= -p\sqrt{p^2+\omega_1^2}\sqrt{p^2+\omega_2^2}\sqrt{p^2+\omega_3^2}\, \frac{1}{4\pi^2|x|}\int_{\mathbb{R}^1} \frac{1}{A(x,\mu,p)} e^{i\mu|x|} d\mu, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где

$$A(x,\mu,p) := \mu^2(p^2+\omega_1^2)(p^2+\omega_2^2)(p^2+\omega_3^2) +$$
$$+ p^2(p^2+\omega_2^2)(p^2+\omega_3^2)\frac{x_1^2}{|x|^2} + p^2(p^2+\omega_1^2)(p^2+\omega_3^2)\frac{x_2^2}{|x|^2} + p^2(p^2+\omega_1^2)(p^2+\omega_2^2)\frac{x_3^2}{|x|^2}.$$

Выражение для $A(x,p,\mu)$ можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} A(x,\mu,p) &= p^6(\mu^2+1) + p^4\left((\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)\mu^2 + (\omega_2^2+\omega_3^2)\frac{x_1^2}{|x|^2} + (\omega_1^2+\omega_3^2)\frac{x_2^2}{|x|^2} + (\omega_1^2+\omega_2^2)\frac{x_3^2}{|x|^2}\right) + \\ &+ p^2\left((\omega_1^2\omega_2^2 + \omega_2^2\omega_3^2 + \omega_3^2\omega_1^2)\mu^2 + \omega_2^2\omega_3^2\frac{x_1^2}{|x|^2} + \omega_1^2\omega_3^2\frac{x_2^2}{|x|^2} + \omega_1^2\omega_2^2\frac{x_3^2}{|x|^2}\right) + \omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2\mu^2 = \\ &= p^6(\mu^2+1)\left[1 + \frac{1}{p^2}\alpha_1(x,\mu) + \frac{1}{p^4}\alpha_2(x,\mu) + \frac{1}{p^6}\alpha_3(\mu)\right], \end{aligned} \tag{5.2}$$

где

$$\alpha_1(x,\mu) := \frac{1}{\mu^2+1}\left[(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)\mu^2 + (\omega_2^2+\omega_3^2)\frac{x_1^2}{|x|^2} + (\omega_1^2+\omega_3^2)\frac{x_2^2}{|x|^2} + (\omega_1^2+\omega_2^2)\frac{x_3^2}{|x|^2}\right], \tag{5.3}$$

$$\alpha_2(x,\mu) := \frac{1}{\mu^2+1}\left[(\omega_1^2\omega_2^2+\omega_2^2\omega_3^2+\omega_3^2\omega_1^2)\mu^2 + \omega_2^2\omega_3^2\frac{x_1^2}{|x|^2} + \omega_1^2\omega_3^2\frac{x_2^2}{|x|^2} + \omega_1^2\omega_2^2\frac{x_3^2}{|x|^2}\right], \tag{5.4}$$

$$\alpha_3(\mu) := \frac{\mu^2}{\mu^2+1}\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2. \tag{5.5}$$

Подставим выражение (5.2) для $A(x,\mu,p)$ в равенство (5.1) и получим следующее равенство:

$$\overline{\mathscr{E}}(x,p) = -\frac{1}{p^5}\sqrt{p^2+\omega_1^2}\sqrt{p^2+\omega_2^2}\sqrt{p^2+\omega_3^2}\times$$
$$\times\frac{1}{4\pi^2|x|}\int_{\mathbb{R}^1}\frac{1}{\mu^2+1}e^{i\mu|x|}\left[1+\frac{1}{p^2}\alpha_1(x,\mu)+\frac{1}{p^4}\alpha_2(x,\mu)+\frac{1}{p^6}\alpha_3(\mu)\right]^{-1}d\mu,$$

где функции α_1, α_2 и α_3 определены формулами (5.3), (5.4) и (5.5) соответственно.

Предположим, что $\operatorname{Re} p = \sigma \geqslant R > 0$ при достаточно большом $R > 0$, тогда будет справедливо следующее разложение в ряд:

$$\left[1+\frac{1}{p^2}\alpha_1(x,\mu)+\frac{1}{p^4}\alpha_2(x,\mu)+\frac{1}{p^6}\alpha_3(\mu)\right]^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left[\alpha_1(x,\mu)+\frac{1}{p^2}\alpha_2(x,\mu)+\frac{1}{p^4}\alpha_3(\mu)\right]^k\frac{1}{p^{2k}}.$$

Заметим, что

$$\overline{\phi}(p) := \frac{1}{p^5}\sqrt{p^2+\omega_1^2}\sqrt{p^2+\omega_2^2}\sqrt{p^2+\omega_3^2} = \frac{1}{p^2}\sqrt{1+\frac{\omega_1^2}{p^2}}\sqrt{1+\frac{\omega_2^2}{p^2}}\sqrt{1+\frac{\omega_3^2}{p^2}} =$$
$$= \frac{1}{p^2} + \sum_{k_1+k_2+k_3\geqslant 1}\binom{1/2}{k_1}\binom{1/2}{k_2}\binom{1/2}{k_3}\frac{\omega_1^{2k_1}\omega_2^{2k_2}\omega_3^{2k_3}}{p^{2k_1+2k_2+2k_3+2}}.$$

Тогда выражение для $\overline{\mathscr{E}}(x,p)$ можно переписать в следующем виде:

$$\overline{\mathscr{E}}(x,p) = -\frac{1}{4\pi|x|}e^{-|x|}\frac{1}{p^2} - \frac{1}{4\pi|x|}e^{-|x|}\overline{\phi}_1(p) + \overline{\Phi}(x,p),$$

где

$$\phi_1(p) := \sum_{k_1+k_2+k_3\geqslant 1}\binom{1/2}{k_1}\binom{1/2}{k_2}\binom{1/2}{k_3}\frac{\omega_1^{2k_1}\omega_2^{2k_2}\omega_3^{2k_3}}{p^{2k_1+2k_2+2k_3+2}},$$

$$\overline{\Phi}(x,p) = -\overline{\phi}(p)\frac{1}{4\pi^2|x|}\int_{\mathbb{R}^1}\frac{1}{\mu^2+1}e^{i\mu|x|}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left[\alpha_1(x,\mu)+\frac{1}{p^2}\alpha_2(x,\mu)+\frac{1}{p^4}\alpha_3(\mu)\right]^k\frac{1}{p^{2k}}d\mu.$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, получаем следующее выражение для фундаментального решения:

$$\mathscr{E}(x,t) = -t\theta(t)\frac{e^{-|x|}}{4\pi|x|} - \phi_1(t)\frac{e^{-|x|}}{4\pi|x|} + \Phi(x,t),$$
$$\Phi(x,t) := -\frac{\theta(t)}{4\pi^2|x|}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)!}\int_{\mathbb{R}^1}d\mu\frac{e^{i\mu|x|}}{\mu^2+1}\phi(t)*\left[\alpha_1(x,\mu)\mathrm{id}+\alpha_2(x,\mu)t*+\frac{1}{6}\alpha_3(\mu)t^3*\right]^k t^{2k-1}, \tag{5.6}$$

$$\phi(t) := \theta(t)\sum_{k_1+k_2+k_3\geqslant 0}\binom{1/2}{k_1}\binom{1/2}{k_2}\binom{1/2}{k_3}\omega_1^{2k_1}\omega_2^{2k_2}\omega_3^{2k_3}\frac{t^{2k_1+2k_2+2k_3+1}}{(2k_1+2k_2+2k_3+1)!}, \tag{5.7}$$

$$\phi_1(t) := \theta(t) \sum_{k_1+k_2+k_3 \geqslant 1} \binom{1/2}{k_1}\binom{1/2}{k_2}\binom{1/2}{k_3} \omega_1^{2k_1}\omega_2^{2k_2}\omega_3^{2k_3} \frac{t^{2k_1+2k_2+2k_3+1}}{(2k_1+2k_2+2k_3+1)!}. \tag{5.8}$$

Справедлива следующая

Лемма 5.1. *Если* $x \neq 0$, *то справедливы следующие равенства*:

$$\mathscr{E}(x,0) = 0, \quad \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t}(x,0) = -\frac{\exp(-|x|)}{4\pi|x|}, \quad \frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial t^2}(x,0) = 0. \tag{5.9}$$

Доказательство. Доказательство основано на явном виде (5.6) фундаментального решения $\mathscr{E}(x,t)$.

6. ОЦЕНКИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Точно так же, как в работе [18], может быть получено следующее представление для фундаментального решения (5.6):

$$\mathscr{E}(x,t) = -t\theta(t)\frac{e^{-|x|}}{4\pi|x|} - \phi_1(t)\frac{e^{-|x|}}{4\pi|x|} + \Phi(x,t),$$
$$\Phi(x,t) := \frac{\theta(t)}{4\pi^2|x|}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)!}\int\limits_{C_\varepsilon^+(i)} dz\frac{e^{iz|x|}}{z^2+1}\phi(t) * \left[\alpha_1(x,z)\mathrm{id} + \alpha_2(x,z)t * + \frac{1}{6}\alpha_3(z)t^3 *\right]^k t^{2k-1}, \tag{6.1}$$

где $C_\varepsilon^+(i) = \{|z-i| = \varepsilon\}$ при $\varepsilon \in (0,1)$ и этот контур на комплексной плоскости обходится против часовой стрелки,

$$\alpha_1(x,z) := \frac{1}{z^2+1}\left[(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)z^2 + (\omega_2^2+\omega_3^2)\frac{x_1^2}{|x|^2} + (\omega_1^2+\omega_3^2)\frac{x_2^2}{|x|^2} + (\omega_1^2+\omega_2^2)\frac{x_3^2}{|x|^2}\right],$$

$$\alpha_2(x,z) := \frac{1}{z^2+1}\left[(\omega_1^2\omega_2^2+\omega_2^2\omega_3^2+\omega_3^2\omega_1^2)z^2 + \omega_2^2\omega_3^2\frac{x_1^2}{|x|^2} + \omega_1^2\omega_3^2\frac{x_2^2}{|x|^2} + \omega_1^2\omega_2^2\frac{x_3^2}{|x|^2}\right], \tag{6.2}$$

$$\alpha_3(z) := \frac{z^2}{z^2+1}\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2,$$

а функции $\phi(t)$ и $\phi_1(t)$ определены равенствами (5.7) и (5.8). Из явного вида функций $\alpha_1(x,z)$, $\alpha_2(x,z)$ при условиях, что $|z-i| = \varepsilon$, $\varepsilon \in (0,1)$ и $x \neq (0,0,0)$ вытекают следующие оценки:

$$\left|\frac{\partial\alpha_1(x,z)}{\partial x_j}\right| \leqslant \frac{c_1(\varepsilon)}{|x|}, \quad \left|\frac{\partial\alpha_2(x,z)}{\partial x_j}\right| \leqslant \frac{c_2(\varepsilon)}{|x|}, \tag{6.3}$$

$$\left|\frac{\partial^2\alpha_1(x,z)}{\partial x_j\partial x_k}\right| \leqslant \frac{c_3(\varepsilon)}{|x|^2}, \quad \left|\frac{\partial^2\alpha_2(x,z)}{\partial x_j\partial x_k}\right| \leqslant \frac{c_4(\varepsilon)}{|x|^2},$$

$$\left|\frac{\partial^3\alpha_1(x,z)}{\partial x_j\partial x_k\partial x_l}\right| \leqslant \frac{c_5(\varepsilon)}{|x|^3}, \quad \left|\frac{\partial^3\alpha_2(x,z)}{\partial x_j\partial x_k\partial x_l}\right| \leqslant \frac{c_6(\varepsilon)}{|x|^3} \tag{6.4}$$

для всех $j,k,l = \overline{1,3}$. Из явного вида (6.1) вытекает следующее свойство гладкости фундаментального решения $\mathscr{E}(x,t)$:

$$\mathscr{E}(x,t) \in \mathbb{C}^{(m+n)}(\mathbb{R}^3\backslash\{0\}\times[0,+\infty)) \quad \text{для всех} \quad m,n \in \mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{6.5}$$

Если $0 < |x| < R_0$ и $t \in [0,T]$, то с учетом оценок (6.3), (6.4) из (6.1) вытекает следующая группа оценок:

$$\left|\frac{\partial^m \mathscr{E}(x,t)}{\partial t^m}\right| \leqslant \frac{A_0(T,R_0,\varepsilon)}{|x|}, \quad \left|\frac{\partial^{m+1} \mathscr{E}(x,t)}{\partial t^m \partial x_j}\right| \leqslant \frac{A_1(T,R_0,\varepsilon)}{|x|^2},$$
$$\left|\frac{\partial^{m+2} \mathscr{E}(x,t)}{\partial t^m \partial x_j \partial x_k}\right| \leqslant \frac{A_2(T,R_0,\varepsilon)}{|x|^3}, \quad \left|\frac{\partial^{m+3} \mathscr{E}(x,t)}{\partial t^m \partial x_j \partial x_k \partial x_l}\right| \leqslant \frac{A_3(T,R_0,\varepsilon)}{|x|^4} \tag{6.6}$$

для всех $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $j,k,l \in \overline{1,3}$. Если $|x| \geqslant R_0 > 0$ и $t \in [0,T]$ при $T > 0$, то справедлива следующая группа оценок в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$\left|\frac{\partial^m \mathscr{E}(x,t)}{\partial t^m}\right| \leqslant B_0(T,R_0,\varepsilon)\frac{e^{-(1-\varepsilon)|x|}}{|x|}, \tag{6.7}$$

$$\left|\frac{\partial^{m+1} \mathscr{E}(x,t)}{\partial t^m \partial x_j}\right| \leqslant B_1(T,R_0,\varepsilon)\frac{e^{-(1-\varepsilon)|x|}}{|x|},$$

$$\left|\frac{\partial^{m+2} \mathscr{E}(x,t)}{\partial t^m \partial x_j \partial x_k}\right| \leqslant B_2(T,R_0,\varepsilon)\frac{e^{-(1-\varepsilon)|x|}}{|x|},$$

$$\left|\frac{\partial^{m+3} \mathscr{E}(x,t)}{\partial t^m \partial x_j \partial x_k \partial x_l}\right| \leqslant B_3(T,R_0,\varepsilon)\frac{e^{-(1-\varepsilon)|x|}}{|x|} \tag{6.8}$$

для всех $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $j,k,l \in \overline{1,3}$. Справедлива следующая

Лемма 6.1. *Для всех* $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \times [0,T]$ *при* $T > 0$ *частные производные в оценках* (6.6)–(6.8) *коммутируют*.

Доказательство. Доказательство основано на свойстве гладкости (6.5).

7. ВТОРАЯ ФОРМУЛА ГРИНА

Пусть $u(x,t), v(x,t) \in \mathbb{C}^{(2+2)}(\overline{\Omega} \times [0,T])$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$v\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta u = \frac{\partial}{\partial t}\left(v\Delta\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta u\frac{\partial v}{\partial t}\right) + \operatorname{div}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\nabla u\right) - \operatorname{div}\left(u\nabla\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) + u\Delta\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(v\Delta\frac{\partial u}{\partial t}\right) -$$
$$- \frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta u\frac{\partial v}{\partial t}\right) + \operatorname{div}\left(v\nabla\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) - \operatorname{div}\left(u\nabla\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\nabla u\right) - \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\left(v\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right) + u\Delta\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{7.1}$$

$$v\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(v\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(v\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(u\frac{\partial v}{\partial t}\right) + u\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$
$$v\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) + u\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} \quad \text{при} \quad j = 1,2,3. \tag{7.2}$$

Отметим, что в данном случае формально сопряженный оператор имеет следующий вид:

$$\mathfrak{M}^t_{x,t}[u](x,t) = \mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\big(\Delta u(x,t) - u(x,t)\big) + \sum_{j=1}^{3}\omega_j^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j^2}.$$

Из равенств (7.1) и (7.2) вытекает вторая формула Грина

$$\int_0^t\int_\Omega \big[v(\xi,\tau)\mathfrak{M}_{\xi,\tau}[u](\xi,\tau) - u(\xi,\tau)\mathfrak{M}_{\xi,\tau}[v](\xi,\tau)\big]d\xi d\tau =$$
$$= \int_0^t\int_{\partial\Omega} \big[v(\xi,\tau)\mathfrak{N}_{\xi,\tau}[u](\xi,\tau) - u(\xi,\tau)\mathfrak{N}_{\xi,\tau}[v](\xi,\tau)\big]dS_\xi d\tau +$$

$$+\int_{\Omega}\left[v(\xi,t)\left[\Delta\frac{\partial u}{\partial\tau}(\xi,t)-\frac{\partial u}{\partial\tau}(\xi,t)\right]-v(\xi,0)\left[\Delta\frac{\partial u}{\partial\tau}(\xi,0)-\frac{\partial u}{\partial\tau}(\xi,0)\right]\right]d\xi-$$
$$-\int_{\Omega}\left[\frac{\partial v}{\partial\tau}(\xi,t)[\Delta u(\xi,t)-u(\xi,t)]-\frac{\partial v}{\partial\tau}(\xi,0)[\Delta u(\xi,0)-u(\xi,0)]\right]d\xi+ \tag{7.3}$$
$$+\int_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial v}{\partial\tau}(\xi,t)\frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi,t)-\frac{\partial v}{\partial\tau}(\xi,0)\frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi,0)\right]dS_\xi-$$
$$-\int_{\partial\Omega}\left[v(\xi,t)\frac{\partial^2 u}{\partial\tau\partial n_\xi}(\xi,t)-v(\xi,0)\frac{\partial^2 u}{\partial\tau\partial n_\xi}(\xi,0)\right]dS_\xi,$$

где мы ввели обозначения

$$\mathfrak{N}_{\xi,\tau}[u](\xi,\tau)=\mathfrak{N}^t_{\xi,\tau}[u](\xi,\tau)=\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\frac{\partial u}{\partial n_\xi}+\omega_1^2\frac{\partial u}{\partial\xi_1}\cos(n_\xi,e_1)+\omega_2^2\frac{\partial u}{\partial\xi_2}\cos(n_\xi,e_2)+\omega_3^2\frac{\partial u}{\partial\xi_3}\cos(n_\xi,e_3). \tag{7.4}$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Для любых функций* $u(x,t), v(x,t)\in\mathbb{C}^{(2+2)}(\overline{\Omega}\times[0,T])$ *при* $t\in[0,T]$ *справедливо равенство* (7.3).

8. ТРЕТЬЯ ФОРМУЛА ГРИНА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Пусть $u(\xi,\tau)\in\mathbb{C}^{(2+2)}(\overline{\Omega}\times[0,T])$ и $(x,t)\in\Omega\times(0,T]$ – фиксированная точка. Тогда найдется такое $\delta>0$, что $O(x,\delta)\subset\Omega$. Введем следующее обозначение:

$$\Omega_\delta:=\Omega\backslash\overline{O(x,\delta)}.$$

Применим вторую формулу Грина (7.3) к области Ω_δ и функциям $u(\xi,\tau)$, $v(\xi,\tau)=\mathscr{E}(x-\xi,t-\tau)\in\mathbb{C}^{(2+2)}(\overline{\Omega}_\delta\times[0,t])$ для любого $t\in(0,T]$. Тогда она примет следующий вид:

$$\int_0^t\int_{\Omega_\delta}[v(\xi,\tau)\mathfrak{M}_{\xi,\tau}[u](\xi,\tau)-u(\xi,\tau)\mathfrak{M}_{\xi,\tau}[v](x-\xi,t-\tau)]d\xi d\tau=$$
$$=\int_0^t\int_{\partial\Omega_\delta}[v(\xi,\tau)\mathfrak{N}_{\xi,\tau}[u](\xi,\tau)-u(\xi,\tau)\mathfrak{N}_{\xi,\tau}[v](x-\xi,t-\tau)]dS_\xi d\tau+$$
$$+\int_{\Omega_\delta}\left[v(\xi,t)\left[\Delta\frac{\partial u}{\partial\tau}(\xi,t)-\frac{\partial u}{\partial\tau}(\xi,t)\right]-v(\xi,0)\left[\Delta\frac{\partial u}{\partial\tau}(\xi,0)-\frac{\partial u}{\partial\tau}(\xi,0)\right]\right]d\xi-$$
$$-\int_{\Omega_\delta}\left[\frac{\partial v}{\partial\tau}(\xi,t)[\Delta u(\xi,t)-u(\xi,t)]-\frac{\partial v}{\partial\tau}(\xi,0)[\Delta u(\xi,0)-u(\xi,0)]\right]d\xi+ \tag{8.1}$$
$$+\int_{\partial\Omega_\delta}\left[\frac{\partial v}{\partial\tau}(\xi,t)\frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi,t)-\frac{\partial v}{\partial\tau}(\xi,0)\frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi,0)\right]dS_\xi-\int_{\partial\Omega_\delta}\left[v(\xi,t)\frac{\partial^2 u}{\partial\tau\partial n_\xi}(\xi,t)-v(\xi,0)\frac{\partial^2 u}{\partial\tau\partial n_\xi}(\xi,0)\right]dS_\xi,$$

$$\mathfrak{M}_{x,t}[w](x,t)=\Delta_x\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}+\sum_{j=1}^3\omega_j^2\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x_j^2},$$

$$\mathfrak{N}_{x,t}[w](x,t)=\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}+\sum_{j=1}^3\omega_j^2\frac{\partial w(x,t)}{\partial x_j}\cos(n_x,e_j).$$

Последовательно рассмотрим слагаемые в левой и в правой частях равенства (8.1). Рассмотрим следующий интеграл:

$$I_{1\delta}:=\int_0^t\int_{O(x,\delta)}v(\xi,\tau)\mathfrak{M}_{\xi,\tau}[u](\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

В силу оценки (6.6) справедлива следующая оценка:

$$|I_{1\delta}| \leqslant A_0(T, R_0, \varepsilon) \sup_{(x,t)\in\bar{\Omega}\otimes[0,T]} |\mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t)|\delta^2 \to +0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0.$$

Поэтому имеем

$$\int_0^t \int_{\Omega_\delta} v(\xi,\tau)\mathfrak{M}_{\xi,\tau}[u](\xi,\tau)d\xi d\tau \to \int_0^t \int_{\Omega} v(\xi,\tau)\mathfrak{M}_{\xi,\tau}[u](\xi,\tau)d\xi d\tau \quad \text{при} \quad \delta \to +0. \tag{8.2}$$

Поскольку

$$\mathfrak{M}_{\xi,\tau}[v](x-\xi, t-\tau) = 0 \quad \text{при} \quad (\xi,\tau) \in \bar{\Omega}_\delta \times [0,+\infty),$$

то поэтому

$$\int_0^t \int_{\Omega_\delta} u(\xi,\tau)\mathfrak{M}_{\xi,\tau}[v](x-\xi, t-\tau)d\xi d\tau = 0. \tag{8.3}$$

Рассмотрим следующий интеграл:

$$I_{2\delta} := \int_0^t \int_{\partial O(x,\delta)} v(\xi,\tau)\mathfrak{N}_{\xi,\tau}[u](\xi,\tau)dS_\xi d\tau.$$

В силу оценки (6.6) справедлива следующая оценка:

$$|I_{2\delta}| \leqslant A_0(T, R_0, \varepsilon) \sup_{(x,t)\in\bar{\Omega}\otimes[0,T]} |\mathfrak{N}_{x,t}[u](x,t)|\delta \to +0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0.$$

Поэтому

$$\int_0^t \int_{\partial\Omega_\delta} v(\xi,\tau)\mathfrak{N}_{\xi,\tau}[u](\xi,\tau)dS_\xi d\tau \to \int_0^t \int_{\partial\Omega} v(\xi,\tau)\mathfrak{N}_{\xi,\tau}[u](\xi,\tau)dS_\xi d\tau \tag{8.4}$$

при $\delta \to +0$. Аналогичным образом можно доказать, что справедливы следующие предельные свойства:

$$\begin{gathered}
\int_{\Omega_\delta}\left[v(\xi,t)\left[\Delta\frac{\partial u}{\partial\tau}(\xi,t) - \frac{\partial u}{\partial\tau}(\xi,t)\right] - v(\xi,0)\left[\Delta\frac{\partial u}{\partial\tau}(\xi,0) - \frac{\partial u}{\partial\tau}(\xi,0)\right]\right]d\xi \to \\
\to \int_{\Omega}\left[v(\xi,t)\left[\Delta\frac{\partial u}{\partial\tau}(\xi,t) - \frac{\partial u}{\partial\tau}(\xi,t)\right] - v(\xi,0)\left[\Delta\frac{\partial u}{\partial\tau}(\xi,0) - \frac{\partial u}{\partial\tau}(\xi,0)\right]\right]d\xi, \\
\int_{\Omega_\delta}\left[\frac{\partial v}{\partial\tau}(\xi,t)[\Delta u(\xi,t) - u(\xi,t)] - \frac{\partial v}{\partial\tau}(\xi,0)[\Delta u(\xi,0) - u(\xi,0)]\right]d\xi \to \\
\to \int_{\Omega}\left[\frac{\partial v}{\partial\tau}(\xi,t)[\Delta u(\xi,t) - u(\xi,t)] - \frac{\partial v}{\partial\tau}(\xi,0)[\Delta u(\xi,0) - u(\xi,0)]\right]d\xi,
\end{gathered} \tag{8.5}$$

$$\int_{\partial\Omega_\delta}\left[\frac{\partial v}{\partial\tau}(\xi,t)\frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi,t) - \frac{\partial v}{\partial\tau}(\xi,0)\frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi,0)\right]dS_\xi \to \int_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial v}{\partial\tau}(\xi,t)\frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi,t) - \frac{\partial v}{\partial\tau}(\xi,0)\frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi,0)\right]dS_\xi,$$

$$\int_{\partial\Omega_\delta}\left[v(\xi,t)\frac{\partial^2 u}{\partial\tau\partial n_\xi}(\xi,t) - v(\xi,0)\frac{\partial^2 u}{\partial\tau\partial n_\xi}(\xi,0)\right]dS_\xi \to \int_{\partial\Omega}\left[v(\xi,t)\frac{\partial^2 u}{\partial\tau\partial n_\xi}(\xi,t) - v(\xi,0)\frac{\partial^2 u}{\partial\tau\partial n_\xi}(\xi,0)\right]dS_\xi$$

при $\delta \to +0$. Теперь рассмотрим интеграл

$$I_{3\delta} := \int_0^t \int_{\partial O(x,\delta)} u(\xi,\tau)\mathfrak{N}_{\xi,\tau}[v](x-\xi, t-\tau)dS_\xi d\tau. \tag{8.6}$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\int_0^t u(\xi,\tau)f(x-\xi,t-\tau)d\tau = \int_0^t u(\xi,t-\tau)f(x-\xi,\tau)d\tau =$$
$$= u_0(\xi)\int_0^t f(x-\xi,s)ds - \int_0^t \frac{\partial u(\xi,t-\tau)}{\partial\tau}\int_0^\tau f(x-\xi,s)dsd\tau, \tag{8.7}$$
$$f(x-\xi,t-\tau) = \mathfrak{N}_{\xi,\tau}[v](x-\xi,t-\tau).$$

Из (8.6) с учетом (8.7) приходим к следующему равенству:

$$I_{3\delta} := \int_{\partial O(0,\delta)} u_0(x-\xi)\int_0^t f(\xi,s)dsd\xi - \int_{\partial O(0,\delta)}\int_0^t \frac{\partial u(x-\xi,t-\tau)}{\partial\tau}\int_0^\tau f(\xi,s)dsd\tau d\xi =$$
$$= \int_{\partial O(0,\delta)} [u_0(x-\xi)-u_0(x)]\int_0^t f(\xi,s)dsd\xi + u_0(x)g(t) - \int_{\partial O(0,\delta)}\int_0^t \frac{\partial\left[u(x-\xi,t-\tau)-u(x,t-\tau)\right]}{\partial\tau}\times \tag{8.8}$$
$$\times\int_0^\tau f(\xi,s)dsd\tau d\xi - \int_0^t \frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial\tau}g(\tau)d\tau := I_{31\delta}+I_{32\delta}+I_{33\delta}+I_{34\delta},$$

где

$$g(t) := \int_0^t\int_{\partial O(0,\delta)} f(\xi,s)d\xi ds. \tag{8.9}$$

Несложно доказать, что

$$I_{31\delta},\ I_{33\delta} \to 0 \quad \text{при} \quad \delta\to+0. \tag{8.10}$$

Отметим, что свойства функции $g(t)$, определенной равенством (8.9), будут нами изучены далее в разд. 10. Тогда с учетом (10.19) и теоремы Лебега можно доказать, что

$$I_{32\delta},\ I_{34\delta} \to 0 \quad \text{при} \quad \delta=\frac{1}{n}\to+0, \quad n\to+\infty. \tag{8.11}$$

Таким образом, из (8.8) с учетом (8.10) и (8.11) получаем, что

$$\int_0^t\int_{\partial O(x,\delta)} u(\xi,\tau)\mathfrak{N}_{\xi,\tau}[v](x-\xi,t-\tau)dS_\xi d\tau \to 0 \quad \text{при} \quad \delta=\frac{1}{n}\to+0, \quad n\to+\infty.$$

Поэтому

$$\int_0^t\int_{\partial\Omega_\delta} u(\xi,\tau)\mathfrak{N}_{\xi,\tau}[v](x-\xi,t-\tau)dS_\xi d\tau \to$$
$$\to \int_0^t\int_{\partial\Omega} u(\xi,\tau)\mathfrak{N}_{\xi,\tau}[v](x-\xi,t-\tau)dS_\xi d\tau \quad \text{при} \quad \delta=\frac{1}{n}\to+0, \quad n\to+\infty. \tag{8.12}$$

Таким образом, из (8.2), (8.3), (8.4), (8.5) и (8.12) вытекает равенство

$$\int_0^t\int_\Omega v(\xi,\tau)\mathfrak{M}_{\xi,\tau}[u](\xi,\tau)d\xi d\tau = \int_0^t\int_{\partial\Omega}\left[v(\xi,\tau)\mathfrak{N}_{\xi,\tau}[u](\xi,\tau) - u(\xi,\tau)\mathfrak{N}_{\xi,\tau}[v](x-\xi,t-\tau)\right]dS_\xi d\tau +$$
$$+\int_\Omega\left[v(\xi,t)\left[\Delta\frac{\partial u}{\partial\tau}(\xi,t)-\frac{\partial u}{\partial\tau}(\xi,t)\right] - v(\xi,0)\left[\Delta\frac{\partial u}{\partial\tau}(\xi,0)-\frac{\partial u}{\partial\tau}(\xi,0)\right]\right]d\xi -$$
$$-\int_\Omega\left[\frac{\partial v}{\partial\tau}(\xi,t)\left[\Delta u(\xi,t)-u(\xi,t)\right] - \frac{\partial v}{\partial\tau}(\xi,0)\left[\Delta u(\xi,0)-u(\xi,0)\right]\right]d\xi + \tag{8.13}$$
$$+\int_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial v}{\partial\tau}(\xi,t)\frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi,t) - \frac{\partial v}{\partial\tau}(\xi,0)\frac{\partial u}{\partial n_\xi}(\xi,0)\right]dS_\xi - \int_{\partial\Omega}\left[v(\xi,t)\frac{\partial^2 u}{\partial\tau\partial n_\xi}(\xi,t) - v(\xi,0)\frac{\partial^2 u}{\partial\tau\partial n_\xi}(\xi,0)\right]dS_\xi.$$

Отметим, что в силу (5.9) имеем

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega}\left[v(\xi,t)\left[\Delta\frac{\partial u}{\partial\tau}(\xi,t)-\frac{\partial u}{\partial\tau}(\xi,t)\right]-v(\xi,0)\left[\Delta\frac{\partial u}{\partial\tau}(\xi,0)-\frac{\partial u}{\partial\tau}(\xi,0)\right]\right]d\xi=\\=-\int\limits_{\Omega}\mathscr{E}(x-\xi,t)\left[\Delta_{\xi}u_1(\xi)-u_1(\xi)\right]d\xi,\end{gathered}\tag{8.14}$$

$$\begin{gathered}-\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial v}{\partial\tau}(\xi,t)\left[\Delta u(\xi,t)-u(\xi,t)\right]-\frac{\partial v}{\partial\tau}(\xi,0)\left[\Delta u(\xi,0)-u(\xi,0)\right]\right]d\xi=\\=-\int\limits_{\Omega}\frac{\exp(-|x-\xi|)}{4\pi|x-\xi|}\left[\Delta_{\xi}u(\xi,t)-u(\xi,t)\right]d\xi-\int\limits_{\Omega}\frac{\partial\mathscr{E}(x-\xi,t)}{\partial t}\left[\Delta_{\xi}u_0(\xi)-u_0(\xi)\right]d\xi,\end{gathered}$$

$$\int\limits_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial v}{\partial\tau}(\xi,t)\frac{\partial u}{\partial n_{\xi}}(\xi,t)-\frac{\partial v}{\partial\tau}(\xi,0)\frac{\partial u}{\partial n_{\xi}}(\xi,0)\right]dS_{\xi}=\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\exp(-|x-\xi|)}{4\pi|x-\xi|}\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial n_{\xi}}dS_{\xi}+\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial\mathscr{E}(x-\xi,t)}{\partial t}\frac{\partial u_0(\xi)}{\partial n_{\xi}}dS_{\xi},$$

$$-\int\limits_{\partial\Omega}\left[v(\xi,t)\frac{\partial^2 u}{\partial\tau\partial n_{\xi}}(\xi,t)-v(\xi,0)\frac{\partial^2 u}{\partial\tau\partial n_{\xi}}(\xi,0)\right]dS_{\xi}=\int\limits_{\partial\Omega}\mathscr{E}(x-\xi,t)\frac{\partial u_1(\xi)}{\partial n_{\xi}}dS_{\xi}.\tag{8.15}$$

Заметим, что в рассматриваемом классе функций $u(x,t)\in\mathbb{C}^{(2+2)}(\bar{\Omega}\times[0,T])$ справедливо следующее равенство:

$$u(x,t)=-\int\limits_{\Omega}(\Delta u(\xi,t)-u(\xi,t))\frac{\exp(-|x-\xi|)}{4\pi|x-\xi|}d\xi+\int\limits_{\partial\Omega}\left[\frac{\exp(-|x-\xi|)}{4\pi|x-\xi|}\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial n_{\xi}}-u(\xi,t)\frac{\partial}{\partial n_{\xi}}\frac{\exp(-|x-\xi|)}{4\pi|x-\xi|}\right]dS_{\xi}\tag{8.16}$$

для любого $t\in[0,T]$. Таким образом, из (8.13) с учетом (8.14), (8.15) и (8.16) получим третью формулу Грина в ограниченном цилиндре:

$$\begin{gathered}u(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\mathscr{E}(x-\xi,t-\tau)\mathfrak{M}_{\xi,\tau}[u](\xi,\tau)d\xi d\tau+\\+\int\limits_0^t\int\limits_{\partial\Omega}\left[u(\xi,\tau)\mathfrak{N}_{\xi,\tau}[\mathscr{E}](x-\xi,t-\tau)-\mathscr{E}(x-\xi,t-\tau)\mathfrak{N}_{\xi,\tau}[u](\xi,\tau)\right]dS_{\xi}d\tau-\\-\int\limits_{\partial\Omega}u(\xi,t)\frac{\partial}{\partial n_{\xi}}\frac{\exp(-|x-\xi|)}{4\pi|x-\xi|}dS_{\xi}+\\+\int\limits_{\Omega}\left[\mathscr{E}(x-\xi,t)[\Delta_{\xi}u_1(\xi)-u_1(\xi)]+\frac{\partial\mathscr{E}(x-\xi,t)}{\partial t}[\Delta_{\xi}u_0(\xi)-u_0(\xi)]\right]d\xi-\\-\int\limits_{\partial\Omega}\left[\mathscr{E}(x-\xi,t)\frac{\partial u_1(\xi)}{\partial n_{\xi}}+\frac{\partial\mathscr{E}(x-\xi,t)}{\partial t}\frac{\partial u_0(\xi)}{\partial n_{\xi}}\right]dS_{\xi}.\end{gathered}\tag{8.17}$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Для любой функции* $u(x,t)\in\mathbb{C}^{(2+2)}(\bar{\Omega}\times[0,T])$ *справедливо равенство* (8.17), *в котором использованы обозначения* $u_0(x)=u(x,0)$ *и* $u_1(x)=u'(x,0)$.

9. ТРЕТЬИ ФОРМУЛЫ ГРИНА ВО ВСЕМ ПРОСТРАНСТВЕ

Справедлива следующая

Теорема 3. *Для любой функции* $u(x,t)\in\mathbb{C}_b^{(2+2)}(\mathbb{R}^3\times[0,T])$ *справедливо следующее равенство*:

$$\begin{gathered}u(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^3}\mathscr{E}(x-\xi,t-\tau)\mathfrak{M}_{\xi,\tau}[u](\xi,\tau)d\xi d\tau+\\+\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[\mathscr{E}(x-\xi,t)[\Delta_{\xi}u_1(\xi)-u_1(\xi)]+\frac{\partial\mathscr{E}(x-\xi,t)}{\partial t}[\Delta_{\xi}u_0(\xi)-u_0(\xi)]\right]d\xi.\end{gathered}\tag{9.1}$$

Доказательство. Доказательство основано на оценках (6.6) и (6.7) фундаментального решения $\mathscr{E}(x,t)$ и третьей формуле Грина (8.17), в которой нужно положить $\Omega = O(0,R)$ при $R > 0$ и перейти к пределу при $R \to +\infty$. Тогда все интегралы по поверхности шара $\partial O(0,R)$ в пределе при $R \to +\infty$ обратятся в ноль.

Отметим, что можно получить один нестандартный вариант третьей формулы Грина для рассматриваемого оператора $\mathfrak{M}_{x,t}$. С этой целью введем в рассмотрение две функции $\chi(t)$, $\eta(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0,T]$, которые удовлетворяют условиям

$$\chi(0) = 1, \quad \chi'(0) = 0, \quad \eta(0) = 0, \quad \eta'(0) = 1. \tag{9.2}$$

Несложно заметить, что такие функции существуют. Рассмотрим следующую функцию:

$$F(x,t) := \chi(t)u_0(x) + \eta(t)u_1(x) \in \mathbb{C}_b^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0,T])$$

при условии, что $u_0(x)$, $u_1(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3)$. Кроме того, эта функция удовлетворяет следующим равенствам:

$$F(x,0) = u_0(x), \quad F'(x,0) = u_1(x) \quad \text{для каждого} \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{9.3}$$

Применим третью формулу Грина (9.1) к функции

$$u(x,t) - F(x,t) \quad \text{для любой функции} \quad u(x,t) \in \mathbb{C}_b^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0,T]).$$

Заметим, что в силу (9.3) имеем

$$u(x,0) - F(x,0) = 0, \quad u'(x,0) - F'(x,0) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{9.4}$$

Поэтому третья формула Грина (9.1) примет следующий вид:

$$\begin{gathered} u(x,t) = \chi(t)u_0(x) + \eta(t)u_1(x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-\xi, t-\tau)\mathfrak{M}_{\xi,\tau}[u](\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-\xi,t-\tau)(\chi''(t)[\Delta_\xi u_0(\xi) - u_0(\xi)] + \eta''(t)[\Delta_\xi u_1(\xi) - u_1(\xi)] + \\ + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2[\chi(t)u_{0\xi_j\xi_j}(\xi) + \eta(t)u_{1\xi_j\xi_j}(\xi)])\,d\xi\,d\tau. \end{gathered} \tag{9.5}$$

Таким образом, доказана

Теорема 4. *Для любой функции* $u(x,t) \in \mathbb{C}_b^{(2+2)}(\mathbb{R}^3 \times [0,T])$ *и для любых функций* $\chi(t)$ *и* $\eta(t)$ *из* $\mathbb{C}^{(2)}[0,T]$, *удовлетворяющих условиям* (9.2), *справедливо равенство* (9.5).

10. О НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛАХ

Рассмотрим следующий интеграл:

$$g(t) = \int_0^t \int_{\partial O(0,\delta)} \left[\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\frac{\partial \mathscr{E}(x,\tau)}{\partial n_x} + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial \mathscr{E}(x,\tau)}{\partial x_j}\cos(n_x, e_j)\right] dS_x\,d\tau, \tag{10.1}$$

где $\mathscr{E}(x,t)$ — это фундаментальное решение, причем

$$\begin{gathered} \overline{\mathscr{E}}(x,p) = -\frac{\exp(-\alpha(p)|z|)}{4\pi|z|}, \\ |z| := \sqrt{x_1^2(p^2+\omega_2^2)(p^2+\omega_3^2) + x_2^2(p^2+\omega_3^2)(p^2+\omega_1^2) + x_3^2(p^2+\omega_1^2)(p^2+\omega_2^2)}, \\ \alpha(p) = \frac{p}{\sqrt{(p^2+\omega_1^2)(p^2+\omega_2^2)(p^2+\omega_3^2)}}. \end{gathered} \tag{10.2}$$

Применим преобразование Лапласа к обеим частям равенства (10.1) и получим выражение

$$\overline{g}(p) = \frac{1}{p}\int\limits_{\partial O(0,\delta)}\left[p^2\frac{\partial\overline{\mathscr{E}}(x,p)}{\partial n_x} + \sum_{j=1}^{3}\omega_j^2\frac{\partial\overline{\mathscr{E}}(x,p)}{\partial x_j}\cos(n_x,e_j)\right]dS_x + \frac{1}{p}\int\limits_{O(0,\delta)}\frac{\partial}{\partial n_x}\left(\frac{e^{-|x|}}{4\pi|x|}\right)dS_x. \tag{10.3}$$

С учетом явного вида (10.2) мы можем переписать равенство (10.3) в виде следующей суммы:

$$\overline{g}(p) = I_1 + I_2 + I_3 + N_1 + N_2 + N_3,$$

$$I_1 = -\frac{1}{p}\int\limits_{\partial O(0,\delta)}\frac{1}{4\pi|z|}\sum_{j=1}^{3}(p^2+\omega_j^2)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(e^{(-\alpha(p)|z|)}\right)\cos(n_x,e_j)dS_x,$$

$$I_2 = -\frac{1}{p}\int\limits_{\partial O(0,\delta)}\left[e^{-\alpha(p)|z|}-1\right]\sum_{j=1}^{3}(p^2+\omega_j^2)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{4\pi|z|}\right)\cos(n_x,e_j)dS_x,$$

$$I_3 = -\frac{1}{p}\int\limits_{\partial O(0,\delta)}\sum_{j=1}^{3}(p^2+\omega_j^2)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{4\pi|z|}\right)\cos(n_x,e_j)dS_x,$$

$$N_1 = \frac{1}{p}\int\limits_{O(0,\delta)}\left[e^{-|x|}-1\right]\frac{\partial}{\partial n_x}\left(\frac{1}{4\pi|x|}\right)dS_x,$$

$$N_2 = \frac{1}{p}\int\limits_{O(0,\delta)}\frac{1}{4\pi|x|}\frac{\partial}{\partial n_x}(e^{-|x|})dS_x.$$

$$N_3 = \frac{1}{p}\int\limits_{O(0,\delta)}\frac{\partial}{\partial n_x}\left(\frac{1}{4\pi|x|}\right)dS_x.$$

С учетом результата леммы 5.1 в работе [30] имеем

$$I_3 + N_3 = 0. \tag{10.4}$$

Рассмотрим интеграл I_1. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\sum_{j=1}^{3}(p^2+\omega_j^2)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\exp(-\alpha(p)|z|)\right)\cos(n_x,e_j) = -p^2\frac{\exp(-\alpha(p)|z|)}{\alpha(p)|z|}\sum_{j=1}^{3}x_j\cos(n_x,e_j) - p^2|x|\frac{\exp(-\alpha(p)|z|)}{\alpha(p)|z|}.$$

Таким образом, для интеграла I_1 имеем следующее выражение:

$$I_1 = \delta\frac{1}{p}\int\limits_{\partial O(0,\delta)}\left(\frac{p^2}{\alpha(p)|z|}\right)\left(-\frac{\exp(-\alpha(p)|z|)}{4\pi|z|}\right)dS_x.$$

Причем справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}\overline{\psi}_1(x,p) &:= \frac{p^2}{\alpha(p)|z|}\frac{p\sqrt{(p^2+\omega_1^2)(p^2+\omega_2^2)(p^2+\omega_3^2)}}{\sqrt{p^4|x|^2+\beta_1(x)p^2|x|^2+\beta_2(x)|x|^2}} = \\ &= \frac{1}{|x|}\sqrt{1+\frac{\omega_1^2}{p^2}}\sqrt{1+\frac{\omega_2^2}{p^2}}\sqrt{1+\frac{\omega_3^2}{p^2}}\left(1+\frac{\beta_1(x)}{p^2}+\frac{\beta_2(x)}{p^4}\right)^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{|x|}\sum_{k_1=0}^{+\infty}\binom{1/2}{k_1}\frac{\omega_1^{2k_1}}{p^{2k_1}}\sum_{k_2=0}^{+\infty}\binom{1/2}{k_2}\frac{\omega_2^{2k_2}}{p^{2k_2}}\sum_{k_3=0}^{+\infty}\binom{1/2}{k_3}\frac{\omega_3^{2k_3}}{p^{2k_3}}\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{-1/2}{k}\left[\beta_1(x)+\frac{\beta_2(x)}{p^2}\right]^k\frac{1}{p^{2k}},\end{aligned} \tag{10.5}$$

где

$$\beta_1(x) := \frac{(\omega_2^2+\omega_3^2)x_1^2+(\omega_1^2+\omega_3^2)x_2^2+(\omega_1^2+\omega_2^2)x_3^2}{|x|^2},$$

$$\beta_2(x) := \frac{\omega_2^2\omega_3^2x_1^2+\omega_1^2\omega_3^2x_2^2+\omega_1^2\omega_2^2x_3^2}{|x|^2}.$$

Воспользовавшись обратным преобразованием Лапласа, мы из выражения (10.5) получим равенство

$$\psi_1(x,t) = \frac{1}{|x|}\sum_{k_1=0}^{+\infty}\binom{1/2}{k_1}\frac{\omega_1^{2k_1}t^{2k_1}}{(2k_1)!}\sum_{k_2=0}^{+\infty}\binom{1/2}{k_2}\frac{\omega_2^{2k_2}t^{2k_2}}{(2k_2)!}\sum_{k_3=0}^{+\infty}\binom{1/2}{k_3}\frac{\omega_3^{2k_3}t^{2k_3}}{(2k_3)!}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{-1/2}{k}\left[\beta_1(x)\mathrm{id} + \beta_2(x)\frac{t^2}{2}\right]^k * \frac{t^{2k}}{(2k)!}. \tag{10.6}$$

Воспользовавшись обратным преобразованием Лапласа для интеграла I_1, мы с учетом (10.2) и (10.6) получим следующее равенство:

$$\hat{I}_1(t) = \delta\int_0^t\int_{\partial O(0,\delta)}\psi_1(x,\tau) * \mathscr{E}(x,\tau)dS_x\,d\tau. \tag{10.7}$$

Несложно заметить из равенств (5.6) и (10.6), что при $t \in [0,T]$ и $\delta \in (0,1]$ имеет место оценка

$$\left|\int_0^t\int_{\partial O(0,\delta)}\psi_1(x,\tau) * \mathscr{E}(x,\tau)dS_x\,d\tau\right| \leqslant A(T) < +\infty,$$

где постоянная $A(T) > 0$ и не зависит от $\delta \in (0,1]$. Поэтому из (10.7) приходим к выводу, что равномерно по $t \in [0,T]$ справедливо предельное равенство

$$\hat{I}_1(t) \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0. \tag{10.8}$$

Теперь рассмотрим интеграл I_2. Прежде всего заметим, что справедливо следующее равенство:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{|z|}\right) - \frac{1}{\sqrt{(p^2+\omega_1^2)(p^2+\omega_2^2)(p^2+\omega_3^2)}}\frac{1}{\left(\dfrac{x_1^2}{p^2+\omega_1^2} + \dfrac{x_2^2}{p^2+\omega_2^2} + \dfrac{x_3^2}{p^2+\omega_3^2}\right)^{3/2}}\frac{x_j}{p^2+\omega_j^2}. \tag{10.9}$$

В силу (10.9) справедливо следующее равенство:

$$\sum_{j=1}^{3}(p^2+\omega_j^2)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{|z|}\right)\cos(n_x,e_j) = -\frac{|x|}{|z|^3}(p^2+\omega_1^2)(p^2+\omega_2^2)(p^2+\omega_3^2).$$

Тогда для интеграла I_2 справедливо следующее равенство:

$$I_2 = \delta\frac{1}{p}(p^2+\omega_1^2)(p^2+\omega_2^2)(p^2+\omega_3^2)\int_{\partial O(0,\delta)}\left[\exp(-\alpha(p)|z|) - 1\right]\frac{1}{4\pi|z|^3}dS_x. \tag{10.10}$$

Заметим, что справедливо следующее равенство:

$$\exp(-\alpha(p)|z|) - 1 = \int_0^1\frac{\partial\exp(-s\alpha(p)|z|)}{\partial s}ds = -\alpha(p)|z|\int_0^1\exp(-s\alpha(p)|z|)ds. \tag{10.11}$$

С учетом (10.11) из (10.10) мы приходим к следующему выражению:

$$I_2 = \delta\sqrt{(p^2+\omega_1^2)(p^2+\omega_2^2)(p^2+\omega_3^2)}\int_0^1\int_{\partial O(0,\delta)}\left(-\frac{\exp(-s\alpha(p)|z|)}{4\pi|z|}\right)\left(\frac{1}{|z|}\right)dS_x\,ds. \tag{10.12}$$

С учетом (10.5) из равенства (10.12) вытекает следующее равенство:

$$I_2 = \delta\frac{1}{p}\int_0^1\int_{\partial O(0,\delta)}\left(-\frac{\exp(-s\alpha(p)|z|)}{4\pi|z|}\right)\bar{\psi}_1(x,p)dS_x\,ds. \tag{10.13}$$

Применив обратное преобразование Лапласа к выражению (10.13), мы получим следующее равенство:

$$\hat{I}_2 = \delta\int_0^t\int_0^1\int_{\partial O(0,\delta)}s\mathscr{E}(sx,\tau) * \psi_1(x,\tau)dS_x\,ds\,d\tau. \tag{10.14}$$

Заметим, что при $t \in [0,T]$ и $\delta \in (0,1]$ имеет место оценка

$$\left|\int_0^t\int_0^1\int_{\partial O(0,\delta)} s\mathscr{E}(sx,\tau) * \psi_1(x,\tau)dS_x\,ds\,d\tau\right| \leqslant B(T) < +\infty, \tag{10.15}$$

где постоянная $B(T) > 0$ и не зависит от $\delta \in (0,1]$. Тогда из (10.14) с учетом (10.15) получим предельное свойство

$$\hat{I}_2 \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0 \tag{10.16}$$

равномерно по $t \in [0,T]$. Используя обратное преобразование Лапласа, несложно доказать, что имеют место равенства

$$\widehat{N}_1(t) = \theta(t)\int_{O(0,\delta)}\left[e^{-|x|} - 1\right]\frac{\partial}{\partial n_x}\left(\frac{1}{4\pi|x|}\right)dS_x \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0, \tag{10.17}$$

$$\widehat{N}_2(t) = \theta(t)\int_{O(0,\delta)}\frac{1}{4\pi|x|}\frac{\partial}{\partial n_x}(e^{-|x|})dS_x \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0 \tag{10.18}$$

равномерно по $t \in [0,T]$. Таким образом, из (10.4), (10.8), (10.16), (10.17) и (10.18) имеем

$$g(t) \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0 \tag{10.19}$$

равномерно по $t \in [0,T]$, где функция $g(t)$ определена равенством (10.1).

Справедлива

Теорема 5. *Для любых* $\beta \geqslant 0$ *и* $\gamma > 0$ *справедлива следующая оценка интеграла*:

$$I = \int_{\mathbb{R}^3}\frac{\exp(-\gamma|x - y|)}{|x - y|}\frac{1}{(1 + |y|^2)^{\beta/2}}dy \leqslant \frac{A}{(1 + |x|^2)^{\beta/2}}, \tag{10.20}$$

где постоянная $A > 0$ *и не зависит от* $x \in \mathbb{R}^3$.

Доказательство. Шаг 1. Случай $\beta \in [0,2)$.

Сначала предположим, что $|x| \geqslant 1$. Переходя к сферической системе координат, интеграл (10.20) можно привести к следующему виду:

$$I = 2\pi\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\rho\exp(-\gamma\rho)\frac{\sin\theta}{(1 + |x|^2 + \rho^2 - 2|x|\rho\cos\theta)^{\beta/2}}d\theta d\rho. \tag{10.21}$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$J = 2\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{(1 + |x|^2 + \rho^2 - 2|x|\rho\cos\theta)^{\beta/2}}d\theta = \frac{2\pi}{b}\int_{a-b}^{a+b}\frac{ds}{s^{\beta/2}} = \frac{2\pi}{1 - \beta/2}\frac{1}{b}\left[(a + b)^{1-\beta/2} - (a - b)^{1-\beta/2}\right], \tag{10.22}$$

где

$$a = 1 + |x|^2 + \rho^2, \quad b = 2|x|\rho.$$

Из выражений (10.21) и (10.22) приходим к следующей цепочке равенств:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{1 - \beta/2}\frac{1}{|x|}\int_0^{+\infty}\exp(-\gamma\rho)\left[(a + b)^{1-\beta/2} - (a - b)^{1-\beta/2}\right]d\rho = \\ &= \frac{\pi}{1 - \beta/2}\frac{1}{|x|}\int_0^{+\infty}\exp(-\gamma\rho)a^{1-\beta/2}\left[\left(1 + \frac{b}{a}\right)^{1-\beta/2} - \left(1 - \frac{b}{a}\right)^{1-\beta/2}\right]d\rho. \end{aligned} \tag{10.23}$$

Пусть

$$t = \frac{b}{a} = \frac{2|x|\rho}{1 + |x|^2 + \rho^2} \Rightarrow t \in [0,1).$$

Действительно, всегда $t \neq 1$, поскольку в противном случае справедлива следующая цепочка равенств:

$$1 = t = \frac{2|x|\rho}{1 + |x|^2 + \rho^2} \Rightarrow 1 + |x|^2 + \rho^2 - 2|x|\rho = 0 \Rightarrow 1 + (|x| - \rho)^2 = 0.$$

Получаем противоречие.

Рассмотрим следующие две функции:

$$f_1(t) = [1 + t]^{1-\beta/2}, \quad f_2(t) = [1 - t]^{1-\beta/2}.$$

Воспользуемся разложением в ряд Тейлора в окрестности точки $t = 0$ с остаточным слагаемым в форме Лагранжа. Действительно, имеют место следующие равенства:

$$f_1(t) = (1 + t)^{1-\beta/2} = 1 + \frac{1 - \beta/2}{(1 + \varepsilon_1)^{\beta/2}} t = 1 + c_1(\varepsilon_1)t, \quad \varepsilon_1 \in (0,1), \tag{10.24}$$

$$f_2(t) = (1 - t)^{1-\beta/2} = 1 - \frac{1 - \beta/2}{(1 - \varepsilon_2)^{\beta/2}} t = 1 + c_2(\varepsilon_2)t, \quad \varepsilon_2 \in (0,1). \tag{10.25}$$

С учетом (10.24), (10.25) и (10.23) приходим к выводу о том, что справедлива следующая цепочка равенств:

$$I = c_3 \frac{\pi}{1 - \beta/2} \frac{1}{|x|} \int_0^{+\infty} \exp(-\gamma\rho) \frac{b}{a} a^{1-\beta/2} d\rho = \frac{2\pi c_3}{(1 - \beta/2)} \frac{1}{(1 + |x|^2)^{\beta/2}} \int_0^{+\infty} \rho \exp(-\gamma\rho) d\rho, \tag{10.26}$$
$$c_3 = c_1(\varepsilon_1) + c_2(\varepsilon_2).$$

Теперь рассмотрим случай $|x| < 1$. Тогда справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-\gamma|x - y|)}{|x - y|} \frac{1}{(1 + |y|^2)^{\beta/2}} dy \leqslant \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-\gamma|x - y|)}{|x - y|} dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-\gamma|z|)}{|z|} dz \leqslant 2\pi^2 \int_0^{+\infty} \exp(-\gamma\rho)\rho d\rho. \end{aligned} \tag{10.27}$$

Из (10.26) и (10.27) вытекает оценка (10.20) при $\beta \in [0,2)$.

Шаг 2. Случай $\beta > 2$. Пусть сначала $|x| \geqslant 1$. Воспользуемся равенством (10.23), которое справедливо и в данном случае. Тогда справедливы равенства:

$$I = \frac{\pi}{1 - \beta/2} \frac{1}{|x|} \int_0^{+\infty} \exp(-\gamma\rho) \left[(a + b)^{1-\beta/2} - (a - b)^{1-\beta/2}\right] d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{1 - \beta/2} \frac{1}{|x|} \int_0^{+\infty} \exp(-\gamma\rho) \left[(1 + (|x| + \rho)^2)^{1-\beta/2} - (1 + (|x| - \rho)^2)^{1-\beta/2}\right] d\rho = I_1 + I_2 + I_3,$$

$$I_1 = \frac{\pi}{1 - \beta/2} \frac{1}{|x|} \int_0^{\varepsilon|x|} \exp(-\gamma\rho) \left[(1 + (|x| + \rho)^2)^{1-\beta/2} - (1 + (|x| - \rho)^2)^{1-\beta/2}\right] d\rho, \tag{10.28}$$

$$I_2 = \frac{\pi}{1 - \beta/2} \frac{1}{|x|} \int_{\varepsilon|x|}^{|x|/\varepsilon} \exp(-\gamma\rho) \left[(1 + (|x| + \rho)^2)^{1-\beta/2} - (1 + (|x| - \rho)^2)^{1-\beta/2}\right] d\rho, \tag{10.29}$$

$$I_3 = \frac{\pi}{1 - \beta/2} \frac{1}{|x|} \int_{|x|/\varepsilon}^{+\infty} \exp(-\gamma\rho) \left[(1 + (|x| + \rho)^2)^{1-\beta/2} - (1 + (|x| - \rho)^2)^{1-\beta/2}\right] d\rho, \tag{10.30}$$

где $\varepsilon \in [1/4,1/2]$. Рассмотрим сначала интеграл I_1. Рассмотрим следующие функции:

$$f_3(t) = \frac{1}{\left(1 + |x|^2 (1 + t)^2\right)^{\beta/2-1}}, \quad f_4(t) = \frac{1}{\left(1 + |x|^2 (1 - t)^2\right)^{\beta/2-1}},$$

$$t = \frac{\rho}{|x|} \in [0, \varepsilon] \quad \text{при} \quad \rho \in [0, \varepsilon|x|].$$

При фиксированном $|x| \geqslant 1$ обе функции непрерывно дифференцируемы на отрезке $t \in [0, \varepsilon]$. Поэтому можно воспользоваться формулой Тейлора с остаточным слагаемым в форме Лагранжа:

$$f_3(t) = \frac{1}{\left(1 + |x|^2(1+t)^2\right)^{\beta/2-1}} = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\beta/2-1}} + (1-\beta/2)\frac{2(1+\varepsilon_3)|x|^2}{\left(1+|x|^2(1+\varepsilon_3)^2\right)^{\beta/2}}\frac{\rho}{|x|}, \quad \varepsilon_3 \in (0, \varepsilon), \tag{10.31}$$

$$f_4(t) = \frac{1}{\left(1 + |x|^2(1-t)^2\right)^{\beta/2-1}} = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\beta/2-1}} + (1-\beta/2)\frac{2(1-\varepsilon_4)|x|^2}{\left(1+|x|^2(1-\varepsilon_4)^2\right)^{\beta/2}}\frac{\rho}{|x|}, \quad \varepsilon_4 \in (0, \varepsilon). \tag{10.32}$$

Из (10.31) и (10.32) вытекает неравенство

$$\left|f_3(t) - f_4(t)\right| \leqslant D_1[\beta/2-1]\frac{\rho|x|}{(4+|x|^2)^{\beta/2}}. \tag{10.33}$$

С учетом (10.33) из выражения (10.28) вытекает оценка интеграла I_1:

$$|I_1| \leqslant \frac{D_2}{(1+|x|^2)^{\beta/2}}\int_0^{+\infty}\rho\exp(-\gamma\rho)d\rho\frac{D_3}{(1+|x|^2)^{\beta/2}}.$$

Рассмотрим теперь выражение (10.29) для интеграла I_2. Справедлива оценка

$$|I_2| \leqslant \frac{2\pi}{\beta/2-1}\frac{1}{|x|}\int_{\varepsilon|x|}^{|x|/\varepsilon}\exp(-\gamma\rho)d\rho = \{\rho = |x|s\} =$$

$$= \frac{2\pi}{\beta/2-1}\int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon}\exp(-s\gamma|x|)ds \leqslant \frac{2\pi}{\beta/2-1}\exp(-\gamma|x|/\varepsilon)\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon} \leqslant D_4\exp(-4\gamma|x|).$$

Перейдем теперь к рассмотрению интеграла I_3. Для этого введем следующие функции:

$$f_5(\tau) = \frac{1}{\left(1+\rho^2(1+\tau)^2\right)^{\beta/2-1}},$$

$$f_6(\tau) = \frac{1}{\left(1+\rho^2(1-\tau)^2\right)^{\beta/2-1}},$$

$$\tau = \frac{|x|}{\rho}, \quad \rho \geqslant \frac{|x|}{\varepsilon} \Rightarrow \tau \in [0, \varepsilon].$$

Разложим функции $f_5(\tau)$ и $f_6(\tau)$ в ряд Тейлора с остаточным слагаемым в форме Лагранжа:

$$f_5(\tau) = \frac{1}{(1+\rho^2)^{\beta/2-1}} + (1-\beta/2)\frac{2(1+\varepsilon_5)\rho^2}{(1+\rho^2(1+\varepsilon_5)^2)^{\beta/2}}\frac{|x|}{\rho}, \quad \varepsilon_5 \in (0, \varepsilon),$$

$$f_6(\tau) = \frac{1}{(1+\rho^2)^{\beta/2-1}} + (1-\beta/2)\frac{2(1-\varepsilon_6)\rho^2}{(1+\rho^2(1-\varepsilon_6)^2)^{\beta/2}}\frac{|x|}{\rho}, \quad \varepsilon_6 \in (0, \varepsilon).$$

Справедлива оценка

$$\left|f_5(\tau) - f_6(\tau)\right| \leqslant D_5\frac{\rho|x|}{(4+\rho^2)^{\beta/2}} \leqslant D_5\frac{\rho|x|}{(4+4|x|^2)^{\beta/2}} \quad \text{при} \quad \rho \geqslant |x|/\varepsilon \geqslant 2|x|. \tag{10.34}$$

Из оценки (10.34) и равенства (10.30) вытекает следующая оценка:

$$|I_3| \leqslant \frac{D_6}{(1+|x|^2)^{\beta/2}}\int_0^{+\infty}\rho\exp(-\gamma\rho)d\rho\frac{D_7}{(1+|x|^2)^{\beta/2}}.$$

Случай $|x| < 1$ рассматривается точно так же, как и на шаге 1.

Шаг 3. Случай $\beta = 2$. Пусть $|x| \geqslant 1$. В этом случае выражение для интеграла I примет следующий вид:

$$I = \frac{\pi}{|x|}\int\limits_0^{+\infty}\exp(-\gamma\rho)[f_6 - f_7]d\rho,$$

где

$$f_6 = \ln\left(1 + (|x| + \rho)^2\right), \quad f_7 = \ln\left(1 + (|x| - \rho)^2\right).$$

Теперь представим интеграл I в виде следующей суммы трех интегралов:

$$\begin{gathered} I = I_4 + I_5 + I_6, \\ I_4 = \frac{\pi}{|x|}\int\limits_0^{\varepsilon|x|}\exp(-\gamma\rho)[f_6 - f_7]d\rho, \\ I_5 = \frac{\pi}{|x|}\int\limits_{\varepsilon|x|}^{|x|/\varepsilon}\exp(-\gamma\rho)[f_6 - f_7]d\rho, \\ I_6 = \frac{\pi}{|x|}\int\limits_{|x|/\varepsilon}^{+\infty}\exp(-\gamma\rho)[f_6 - f_7]d\rho, \end{gathered} \tag{10.35}$$

где $\varepsilon \in [1/4, 1/2]$. Сначала рассмотрим интеграл I_4. С этой целью рассмотрим следующие функции:

$$f_6(t) = \ln(1 + (|x| + \rho)^2) = \ln(1 + |x|^2(1 + t)^2),$$

$$f_7(t) = \ln(1 + (|x| - \rho)^2) = \ln(1 + |x|^2(t - 1)^2), \quad t = \frac{\rho}{|x|}, \quad t \in [0, \varepsilon],$$

при условии, что $\rho \in [0, \varepsilon|x|]$. Тогда справедливы следующие разложения в ряд Тейлора с остаточными слагаемыми в форме Лагранжа:

$$f_6(t) = \ln(1 + |x|^2) + \frac{2|x|\rho(1 + \varepsilon_6)}{1 + |x|^2(1 + \varepsilon_6)^2}, \quad \varepsilon_6 \in (0, \varepsilon), \tag{10.36}$$

$$f_7(t) = \ln(1 + |x|^2) - \frac{2|x|\rho(1 - \varepsilon_7)}{1 + |x|^2(1 - \varepsilon_7)^2}, \quad \varepsilon_7 \in (0, \varepsilon). \tag{10.37}$$

С учетом равенств (10.36) и (10.37) получаем оценку

$$|f_6 - f_7| \leqslant D_8\frac{|x|\rho}{1 + |x|^2}.$$

Тогда для интеграла I_4 мы получаем следующую оценку:

$$|I_4| \leqslant \frac{D_9}{1 + |x|^2}\int\limits_0^{+\infty}\rho\exp(-\gamma\rho)d\rho\frac{D_{10}}{1 + |x|^2}. \tag{10.38}$$

Рассмотрим теперь интеграл I_5. Сделав замену переменной $\rho = s|x|$, мы получим следующее выражение для интеграла I_5:

$$I_5 = \pi\int\limits_{\varepsilon}^{1/\varepsilon}\exp(-\gamma|x|s)\left[\ln(1 + |x|^2(1 + s)^2) - \ln(1 + |x|^2(1 - s)^2)\right]ds =$$

$$= \pi\int\limits_{\varepsilon}^{1/\varepsilon}\exp(-\gamma|x|s)\ln(1 + |x|^2(1 + s)^2)ds - \pi\int\limits_{\varepsilon}^{1/\varepsilon}\exp(-\gamma|x|s)\ln(1 + |x|^2(1 - s)^2)ds = I_{51} + I_{52}.$$

Для интеграла I_{51} справедлива следующая оценка:

$$|I_{51}| \leqslant \exp(-\gamma|x|/\varepsilon)\ln\left(1+|x|^2(1+1/\varepsilon)^2\right)\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \in [1/4, 1/2]. \tag{10.39}$$

Для интеграла I_{52} справедливо равенство

$$I_{52} = -\pi\int\limits_{\varepsilon}^{1}\exp(-\gamma|x|s)\ln(1+|x|^2(1-s)^2)ds - \pi\int\limits_{1}^{1/\varepsilon}\exp(-\gamma|x|s)\ln(1+|x|^2(1-s)^2)ds = I_{521} + I_{522}.$$

Справедливы следующие оценки:

$$\begin{gathered}|I_{521}| \leqslant \pi\exp(-\gamma|x|)(1-\varepsilon)\left|\ln\left(1+|x|^2(1-\varepsilon)^2\right)\right|, \\ |I_{522}| \leqslant \pi\exp(-\gamma|x|/\varepsilon)(1/\varepsilon-1)\left|\ln\left(1+|x|^2(1-1/\varepsilon)^2\right)\right|.\end{gathered} \tag{10.40}$$

Из оценок (10.39), (10.40) мы приходим к следующей оценке для интеграла I_5:

$$|I_5| \leqslant D_{11}\exp(-4\gamma|x|)\ln\left(1+25|x|^2\right) \leqslant \frac{D_{12}}{1+|x|^2}, \quad |x| \geqslant 1. \tag{10.41}$$

Рассмотрим теперь интеграл I_6. Справедливы следующие выражения для функций f_6 и f_7:

$$f_6(\tau) = \ln\left(1+\rho^2(1+\tau)^2\right), \quad f_7(\tau) = \ln\left(1+\rho^2(1-\tau)^2\right), \quad \tau = \frac{|x|}{\rho}, \quad \tau \in [0, \varepsilon],$$

при условии $\rho \geqslant |x|/\varepsilon$. Справедливы следующие формулы разложения в ряд Тейлора с остаточным слагаемым в форме Лагранжа:

$$f_6(\tau) = \ln(1+\rho^2) + \frac{2|x|\rho(1+\varepsilon_8)}{1+\rho^2(1+\varepsilon_8)^2}, \quad \varepsilon_8 \in (0, \varepsilon), \tag{10.42}$$

$$f_7(\tau) = \ln(1+\rho^2) - \frac{2|x|\rho(1-\varepsilon_9)}{1+\rho^2(1-\varepsilon_9)^2}, \quad \varepsilon_9 \in (0, \varepsilon). \tag{10.43}$$

Из равенств (10.42) и (10.43) вытекает следующая оценка:

$$|f_6 - f_7| \leqslant D_{13}\frac{|x|\rho}{1+\rho^2}. \tag{10.44}$$

С учетом (10.44) мы приходим к следующей оценке:

$$|I_6| \leqslant D_{14}\int\limits_{|x|/\varepsilon}^{+\infty}\frac{\rho}{1+\rho^2}\exp(-\gamma\rho)d\rho \leqslant D_{15}\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+|x|^2}\int\limits_{0}^{+\infty}\rho\exp(-\gamma\rho)d\rho \leqslant \frac{D_{16}}{1+|x|^2}. \tag{10.45}$$

Из оценок (10.38), (10.41) и (10.45) с учетом (10.35) получаем оценку (10.20) при $|x| \geqslant 1$ в случае $\beta = 2$. Случай $|x| < 1$ рассматривается точно так же, как на первом шаге.

Аналогичным образом можно доказать несколько более сильное утверждение.

Теорема 6. *Для любых* $\beta \geqslant 0$, $\gamma > 0$, $\gamma_2 \geqslant 0$, $3 > \gamma_1 \geqslant 0$ *справедлива следующая оценка интеграла*:

$$I = \int\limits_{\mathbb{R}^3}(1+|x-y|^2)^{\gamma_2/2}\frac{\exp(-\gamma|x-y|)}{|x-y|^{\gamma_1}}\frac{1}{(1+|y|^2)^{\beta/2}}dy \leqslant \frac{B}{(1+|x|^2)^{\beta/2}},$$

где постоянная $B > 0$ *и не зависит от* $x \in \mathbb{R}^3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G.* Blow-up in nonlinear Sobolev type equations. De Gruyter: Ser. Nonlinear Anal. Appl., 2011.
2. *Korpusov M.O., Ovchinnikov A.V., Sveshnikov A.G., Yushkov E.V.* Blow-Up in Nonlinear Equations of Mathematical Physics: Theory and Methods. De Gruyter: Ser. Nonlinear Anal. Appl., 2018.
3. *Корпусов М.О.* Разрушение решений неклассических нелокальных нелинейных модельных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 4. С. 621–648.

4. *Корпусов М.О.* Разрушение и глобальная разрешимость в классическом смысле задачи Коши для формально гиперболического уравнения с некоэрцитивным источником // Изв. РАН. Сер. матем. 2020. Т. 84. № 5. С. 119–150.
5. *Похожаев С.И., Митидиери Э.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. МИАН. 2001. Т. 234. С. 3–383.
6. *Korpusov M.O., Lukyanenko D.V., Panin A.A., Shlyapugin G.I.* On the blow-up phenomena for a one-dimensional equation of ion-sound waves in a plasma: analytical and numerical investigation // MMAS. 2018. V. 41. № 8. P. 2906–2929.
7. *Korpusov M.O., Lukyanenko D.V.* Instantaneous blow-up versus local solvability for one problem of propagation of nonlinear waves in semiconductors // J. Math. Anal. Appl. 2018. V. 459. № 1. P. 159–181.
8. *Корпусов М.О., Лукьяненко Д.В., Панин А.А., Юшков Е.В.* О разрушении решений одного полного нелинейного уравнения ионно-звуковых волн в плазме с некоэрцитивными нелинейностями // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Т. 82. № 2. С. 43–78.
9. *Панин А.А., Шляпугин Г.И.* О локальной разрешимости и разрушении решений одномерных уравнений типа Ядзимы–Ойкавы–Сацумы // Теор. и матем. физ. 2017. Т. 193. № 2. С. 179–192.
10. *Корпусов М.О., Панин А.А.* О непродолжаемом решении и разрушении решения одномерного уравнения ионно-звуковых волн в плазме // Матем. заметки. 2017. Т. 102. № 3. С. 383–395.
11. *Корпусов М.О., Лукьяненко Д.В., Овсянников Е.А., Панин А.А.* Локальная разрешимость и разрушение решения одного уравнения с квадратичной некоэрцитивной нелинейностью // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. 2017. Т. 10. № 2. С. 107–123.
12. *Korpusov M.O., Lukyanenko D.V., Panin A.A., Yushkov E.V.* Blow-up phenomena in the model of a space charge stratification in semiconductors: analytical and numerical analysis // MMAS. 2017. V. 40. № 7. P. 2336–2346.
13. *Лукьяненко Д.В., Панин А.А.* Разрушение решения уравнения стратификации объемного заряда в полупроводниках: численный анализ при сведении исходного уравнения к дифференциально-алгебраической системе // Вычисл. методы и программирование. 2016. Т. 17. № 1. С. 437–446.
14. *Korpusov M.O., Lukyanenko D.V., Panin A.A., Yushkov E.V.* Blow-up for one Sobolev problem: theoretical approach and numerical analysis // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 442. № 2. P. 451–468.
15. *Корпусов М.О., Овсянников Е.А.* Взрывная неустойчивость в нелинейных волновых моделях с распределенными параметрами // Изв. РАН. Сер. матем. 2020. Т. 84. № 3. С. 15–70.
16. *Капитонов Б.В.* Теория потенциала для уравнения малых колебаний вращающейся жидкости // Матем. сб. 1979. Т. 109(151). № 4(8). С. 607–628.
17. *Габов С.А., Оразов Б.Б.* Об уравнении $\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_{xx} - u) + u_{xx} = 0$ и некоторых связанных с ним задачах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1986. Т. 26. № 1. С. 92–102.
18. *Габов С.А., Свешников А.Г.* Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990. С. 344.
19. *Габов С.А.* Новые задачи математической теории волн. М.: Физматлит, 1998. С. 448.
20. *Плетнер Ю.Д.* Фундаментальные решения операторов типа Соболева и некоторые начально-краевые задачи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 12. С. 1885–1899.
21. *Свиридюк Г.А.* К общей теории полугрупп операторов // Успехи матем. наук. 1994. Т. 49. № 4. С. 47–74.
22. *Загребина С.А.* Начально-конечная задача для уравнений соболевского типа с сильно (L, p)–радиальным оператором // Матем. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19. № 2. С. 39–48.
23. *Zamyshlyaeva A.A., Sviridyuk G.A.* Nonclassical equations of mathematical physics. Linear Sobolev type equations of higher order // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. Мех. Физ. 2016. V. 8. № 4. P. 5–16.
24. *Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешников А.Г.* О нестационарных волнах в средах с анизотропной дисперсией // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т. 39. № 6. С. 1006–1022.
25. *Кудашев В.Р., Михайловский А.Б., Шарапов С.Е.* К нелинейной теории дрейфовой моды, индуцированной тороидальностью // Физ. плазмы. 1987. Т. 13. № 4. С. 417–421.
26. *Каменец Ф.Ф., Лахин В.П., Михайловский А.Б.* Нелинейные электронные градиентные волны // Физ. плазмы. 1987. Т. 13. № 4. С. 412–416.
27. *Ситенко А.П., Сосенко П.П.* О коротковолновой конвективной турбулентности и аномальной электронной теплопроводности плазмы // Физ. плазмы. 1987. Т. 13. № 4. С. 456–462.
28. *Корпусов М.О.* Нелинейные уравнения теории ионно-звуковых волн в плазме // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 21. № 11.
29. *Крылов Н.В.* Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гёльдера. Новосибирск: Научная Книга, 1998. С. 178.
30. *Корпусов М.О., Шляпугин Г.И.* О разрушении решений задач Коши для одного класса нелинейных уравнений теории ферритов // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2020. Т. 185. С. 79–131.