ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 10, с. 1632–1638

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.85

О СХОДИМОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ АНАЛОГОВ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ И СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ[1)]

© 2022 г. Ю. Г. Евтушенко[1,2,*], А. А. Третьяков[1,3,4,]**

[1] 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

[2] 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский переулок, 9, Московский физико-технический институт (государственный университет), Россия

[3] Newelska 6, 01-447 Warsaw, System Res. Inst., Polish Acad. Sciences, Poland

[4] 08-110 Siedlce, Siedlce University, Faculty of Sciences, Poland

**e-mail: yuri-evtushenko@yandex.ru*

***e-mail: prof.tretyakov@gmail.com*

Поступила в редакцию 23.03.2022 г.
Переработанный вариант 23.03.2022 г.
Принята к публикации 08.06.2022 г.

Предлагается новый подход к исследованию на сходимость непрерывных аналогов градиентного метода и метода Ньютона при решении вырожденных нелинейных систем уравнений и задач безусловной оптимизации в случае, когда традиционные функции Ляпунова не эффективны или вообще не применимы. Основное аппаратное средство, которое используется для анализа вырожденных задач, это так называемая p-фактор функция Ляпунова, позволяющая сводить исходную задачу к новой, на основе конструкций теории p-регулярности, и построить метод, сходящийся к точному решению в вырожденном случае. Библ. 14.

Ключевые слова: вырожденность, устойчивость, p-регулярность, p-фактор функция Ляпунова, сходимость.

DOI: 10.31857/S0044466922100040

ВВЕДЕНИЕ

При построении численных методов решения систем уравнений или решении оптимизационных задач, а также исследовании устойчивости этих методов весьма эффективным является аппарат функций Ляпунова. Одним из главных предположений для сходимости (а также устойчивости) является невронденность матрицы Якоби (для уравнения) или матрицы Гессе (для задач оптимизации). Однако в случае вырождения эти условия нарушаются в решении. Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = f(x), \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

и задачу отыскания безусловного минимума функции $\varphi(x)$ на $\mathbb{R}^n$, т.е.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x). \tag{2}$$

Для численного решения Коши предложил решать задачу (2), отыскивая предельные точки системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = -\varphi_x(x), \quad x(0) = x_0. \tag{3}$$

При этом естественно предполагается существование хотя бы одного решения (3) $x = x^*$ задачи оптимизации (2).

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 21-71-30005).

Для решения задачи (1) можно рассматривать численный метод

$$\dot{x}(t) = -\left(f'(x)\right)^{-1} f(x), \tag{4}$$

а для задачи (2) метод

$$\dot{x}(t) = -\left(\varphi''(x)\right)^{-1} \varphi'(x), \tag{5}$$

которые являются непрерывными аналогами метода Ньютона, а (1) можно рассматривать как непрерывный аналог градиентного метода. При исследовании устойчивости (сходимости) этих методов, если мы используем традиционные функции Ляпунова вида

$$v(x) = \|f(x)\|^2 \tag{6}$$

для задачи (1), (4) или $v(x) = \|\varphi'(x)\|^2$ для задачи (2), (5), то необходимым условием сходимости методов (1), (5) к точке решения x^* при $t \to \infty$ является отрицательная определенность $\dfrac{dv(x^*)}{dt} < 0$.

Теорема 1 (Ляпунова). *Пусть для системы* (1) *существует функция Ляпунова* $v(x)$, *т.е.* $v(x) > 0$ *и* $\dfrac{dv(x)}{dt} < 0$ $\forall x \in V(x^*)\backslash\{x^*\}$, $v(x^*) = 0$. *Тогда тривиальное решение* $x^* = 0$ *асимптотически устойчиво.*

Для изучения вопроса устойчивости в невырожденном случае аппарат функции Ляпунова является весьма эффективным (см., например, [1], [11], [13]).

Если отображение $f(x)$ отрицательно определено в точке x^*, т.е. $f'(x^*) < 0$, то, очевидно $\dfrac{dv(x^*)}{dt} < 0$ и можно гарантировать асимптотическую устойчивость (или сходимость) траектории системы $x(t)$ к x^* при $t \to \infty$. (Мы здесь, без ограничения общности, говорим об отображении $f(x)$, учитывая, что все сказанное будет также справедливо относительно отображения $\varphi'(x)$.) Однако существует обширный класс задач вида (1), (5), в которых отображение $f(x)$ вырождено в точке $x^* = 0$ (предполагается, что $f(0) = 0$ и $x^*(t) = 0$ являются положением равновесия системы (1)) и строить функцию Ляпунова весьма затруднительно. Например, для систем вида $\dot{x} = x^{2p}$, $p \ge 1$, $p \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^2$, или $\dot{x}_1 = x_1 + x_1x_2$, $\dot{x}_2 = x_1^2 + x_2^3$, $x \in \mathbb{R}^2$, и т.д.

В этом случае матрица $f'(x^*)$ вырождена в точке $x^* = 0$ и применить классическую функцию Ляпунова типа (6) невозможно. Значит, при исследовании непрерывного аналога градиентного метода (1) или метода Ньютона (3) для отыскания предельных точек системы (1) или (3) в случае вырождения в решении матрица Якоби $f'(x^*)$ (или матрица Гессе $\varphi''(x^*)$) не будут отрицательно определены и поэтому непрерывный аналог градиентного метода (4) (или метода Ньютона (3)) может не сходиться при $t \to \infty$ к стационарной точке функции $f(x)$ (или к точке минимума функции $\varphi(x)$). Вопрос тогда ставится следующий: каким образом исследовать сходимость в вырожденном случае и непрерывный аналог какого метода дает устойчивость решения и сходимость траектории к стационарным точкам отображения $f(x)$ (или $\varphi'(x)$) при $t \to \infty$.

Оказывается, что для вырожденных систем (1) эффективным методом исследования устойчивости (сходимости) является аппарат теории p-регулярности, описание и основные конструкции которого можно найти, например, в [12].

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ p-РЕГУЛЯРНОСТИ

Пусть отображение $f(\cdot) : X \to Y$ достаточно гладкое (по крайне мере, до порядка $p + 1$), X, Y – банаховы пространства. Считаем при этом в точке $x^* \in X$, $f(x^*) = 0$. Для нас интересен случай вырождения $f(\cdot)$ в точке x^*, т.е. $\operatorname{Im} f'(x^*) \neq Y$. Пусть пространство Y разложимо в прямую сумму подпространств

$$Y = Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_p, \tag{7}$$

где $Y_1 = \overline{\operatorname{Im} f'(x^*)}$, $Z_1 = Y$ и пусть Z_2 – замкнутое дополнение пространства Y_1 до Y (мы предполагаем, что такое существует).

Обозначим через $P_{Z_2} : Y \to Z_2$ оператор проектирования на Z_2 параллельно Y_1. Тогда через Y_2 обозначим замыкание линейной оболочки образа квадратичной формы $P_{Z_2} f^{(2)}(x^*)[\cdot]^2$. Далее определим индуктивно

$$Y_i = \overline{\operatorname{span} \operatorname{Im} P_{Z_i} f^{(i)}(x^*)[\cdot]^i} \subseteq Z_i,$$

где Z_i – замкнутое дополнение к $(Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_{i-1})$. Окончательно получаем $Y_p = Z_p$. При этом число $p \in \mathbb{N}$ выбирается как минимальный номер, для которого (7) имеет место. Определим отображения

$$f_i(x) = P_{Y_i} f(x) \colon X \to Y_i, \quad i = 1, \ldots, p, \tag{8}$$

где $P_{Y_i} : Y \to Y_i$ – оператор проектированая на Y_i параллельно $Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_{i-1}, Y_{i+1} \oplus \ldots \oplus Y_p$, и пусть $P_i = P_{Y_i}$, $i = 1, \ldots, p$.

Определение 1. Линейный оператор $\Psi_p(x, h) \in L(X, Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_p)$, $h \in X$, $\|h\| \neq 0$:

$$\Psi_p(x, h) = f_1(x) + f_2''(x)h + \ldots + f_p^{(p)}(x)[h]^{p-1} \tag{9}$$

называется *p-фактор оператором* отображения $f(\cdot)$ в точке x и оператор

$$\Phi_p(x, h) = f_1(x) + f_2'(x)h + \ldots + f_p^{(p-1)}(x)[h]^{p-1}$$

называется p-фактор функцией отображения $f(x)$.

Определение 2. Будем говорить, что отображение $f(\cdot)$ есть p-регулярно в точке x^* на элементе h, если матрица $\Psi_p(x^*, h)$ не вырождена, т.е. $\operatorname{Im} \Psi_p(x^*, h) = Y$.

Пусть $\operatorname{Ker}^k f_k^{(k)}(x^*)$ есть k-ядро k-формы $f_k^{(k)}(x^*)$, т.е.

$$\operatorname{Ker}^k f_k^{(k)}(x^*) = \{\xi \in X \mid f_k^{(k)}(x^*)[\xi]^k = 0\}.$$

Через $H_p(x^*)$ обозначим $H_p(x^*) = \bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}^k f_k^{(k)}(x^*)$.

Одним из основных результатов теории p-регулярности является теорема о неявной функции в вырожденном случае, которую мы представим в следующем виде [14].

Теорема 2. *Пусть* $g(u, x) \in C^{p+1}(U, X)$, $g \colon U \times X \to Z$, *где* U, X *и* Z *– банаховы пространства и отображения* $g_i(u, x)$, $i = 1, \ldots, p$, *определены в соответствии с* (8). *Предположим, что* $g(u^*, x^*) = 0$ *и* g *есть* p*-регулярно по переменной* x *на элементе* $h \in \bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}^k g_k^{(k)}(u^*, x^*)$, $h = (\bar{u}, 0)$, $u \neq 0$, *т.е.*

$$\left\{g_1'(u^*, x^*) + g_2''(u^* \; x^*)[h] + \ldots + g_p^{(p)}(u^*, x^*)[h]^{p-1}\right\}(0_u \times X) = Z.$$

Тогда для достаточно малого $\varepsilon > 0$ *существует независимая константа* $C > 0$ *и отображения* $\varphi(u) = x^* + \omega(u)$ *такие, что для* $\alpha \in [0, \varepsilon]$ *и* $u = u^* + \alpha\bar{u}$ *будет* $g(u, \varphi(u)) = 0$, $\|\omega(u)\| = o(\alpha)$ *и*

$$\|\varphi(u) - x^*\| \leq C \sum_{k=1}^{p} \|g_k(u, x^*)\|^{1/k}.$$

2. p-ФАКТОР ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА И СХОДИМОСТЬ НЕПРЕРЫВНЫХ АНАЛОГОВ ГРАДИЕНТНОГО МЕТОДА И МЕТОДА НЬЮТОНА ДЛЯ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ

В дальнейшем, говоря об устойчивости системы (1) (или методов (1), (4)), мы будем подразумевать сходимость этих методов к решению соответствующих систем. Рассмотрим систему (1), в которой отображение $f(x)$ вырождено в точке равновесия $x^* = 0$, т.е. $\det f'(x^*) = 0$.

Система (1) в этом случае может и не быть устойчивой и построение на основе системы (1) новой системы (или метода), но уже устойчивой и с тем же положением равновесия x^* является весьма важной проблемой. В свою очередь, ответ на вопрос об устойчивости системы (1) (или сходимости метода (1)) с использованием традиционных функций Ляпунова вида (6) не всегда возможен, см., например, случай, когда $f(x) = x^2$ и др.

Покажем, как можно, с использованием результатов теории p-регулярности, построить на основе системы (1) (или метода (1), (3)) новую систему (или новый метод), но уже асимптотически устойчивую по отношению к этому решению $x^* = 0$. (Или новый метод, сходящийся к этому же решению $x^* = 0$.) Введем так называемую p-фактор функцию Ляпунова.

Определение 3. *Функцию* $v_p(x,h) = \|\Phi_p(x,h)\|^2$, где $\Phi_p(x,h) = P_1 f(x) + P_2 f'(x)[h] + \ldots + \ldots$ $\ldots + P_p f^{(p-1)}(x)[h]^{p-1} = f_1(x) + f_2'(x)[h] + \ldots + f_p^{(p-1)}(x)[h]^{p-1}$ будем называть *p-фактор функцией* Ляпунова для системы (1)*, а* $\Phi_p(x,h)$ будем называть p-фактор функцией для отображения $f(\cdot)$.

Теорема 3. *Пусть* $f \in C^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ *и существует такой элемент* $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, *что матрица* $\Psi_p(x^*,h) < 0$ *отрицательно определена.*

Тогда система

$$\dot{x}(t) = \Phi_p(x,h), \quad x(0) = x_0, \tag{10}$$

будет асимптотически устойчива в окрестности $u(x^*)$.

Соответственно, непрерывный аналог метода (3) имеет форму

$$\dot{x}(t) = -P_1\varphi'(x) + P_2\varphi''(x)[h] + \ldots + P_p\varphi^{(p)}(x)[h]^{p-1}, \quad x(0) = x_0, \tag{11}$$

и называется p-фактор методом решения задачи оптимизации (2), а метод (10) называется p-фактор методом решения системы (1).

Доказательство. Доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 1 с использованием p-фактор функции Ляпунова $\upsilon_p(x,h)$ и с учетом того, что

$$\frac{dv_p(x,h)}{dt} = 2\langle \Psi_p(x,h)\Phi_p(x,h), \Phi_p(x,h)\rangle < 0 \quad \forall x \in U(x^*)\backslash\{x^*\}.$$

При этом $\Phi_p(x,h) \neq 0$ $\forall x \in U(x^*)\backslash\{x^*\}$. Поэтому выполняется условие теоремы 1, из которой следует нужный результат.

Пример 1. Рассмотрим случай $p = 2$:

$$\frac{dx}{dt} = x^2, \quad x(0) = x_0, \quad x^* = 0. \tag{12}$$

Очевидно, что условия теоремы 1 для классической функции Ляпунова $v(x) = \|f(x)\|^2 = x^4$ не выполнены. Однако из теоремы 3 следует, что модифицированная система $\frac{dx}{dt} = P_1 f(x) + P_2 f'(x)h = 2xh$ с 2-фактор функцией Ляпунова $v_2(x,h) = (2xh)^2$ будет асимптотически устойчива при $h = 1$. Здесь $P_1 = 0$, $P_2 = 1$.

Что касается метода Ньютона (4) в случае вырождения в решении x^*, т.е. $f'(x^*)$ – вырождена, будет справедлива

Теорема 4. *Пусть* $f \in C^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ *и существует элемент* $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, *такой, что матрица* $\Psi_p(x^*,h) > 0$ *положительно определена.*

Тогда p-фактор метод Ньютона

$$\dot{x}(t) = -\{\Psi_p(x,h)\}^{-1}\Phi_p(x,h), \quad x(0) = x_0 \tag{13}$$

сходится при $x_0 \in U_\varepsilon(x^*)$*, где* $\varepsilon > 0$ *достаточно малое.*

Доказательство. Воспользуемся p-фактор функцией Ляпунова $v_p(x,h)$. Дифференцируя $v_p(x,h)$, получаем

$$\frac{dv}{dt} = 2\langle \Psi'_p(x,h)\Phi_p(x,h), \dot{x}(t)\rangle = -2\langle \Psi_p(x,h)\Phi_p(x,h), \Phi_p(x,h)\rangle < 0 \quad \forall x \in U_\varepsilon(x^*)\backslash\{x^*\}.$$

Метод таким образом сходится к стационарной точке x^*.

Интересен тот факт, что если отображение $f(\cdot)$ строго p-регулярно в точке x^*, то схема (4) тоже дает устойчивость непрерывной траектории из любой начальной точки $x(0) = x_0$ из достаточно малой окрестности $U_\varepsilon(x^*)$.

Определение 4. Будем говорить, что отображение $f(\cdot)$ строго p-регулярно в точке x^*, если $\exists\{\Psi_p(x^*, h)\}^{-1}$ для любого $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$.

Теорема 5. *Пусть $f \in C^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ и $f(\cdot)$ – строго p-регулярно в точке x^*, $f(x^*) = 0$.*

Тогда система (4) *асимптотически устойчива.*

Доказательство. Из условия строгой p-регулярности отображения $f(\cdot)$ в точке x^* следует невырожденность матриц $\{f'(x)\}$ при $x \in U_\varepsilon(x^*)\backslash\{x^*\}$ и $\varepsilon > 0$ достаточно малом. Действительно,

$$f'(x) = f'(x^*) + f''(x^*)(x - x^*) + \ldots + \frac{1}{(p-1)!}f^{(p)}(x^*)(x - x^*)^{p-1} + O(\|x - x^*\|^p) =$$

$$= \left\{f_1'(x^*) + O(\|x - x^*\|), f_1''(x^*)(\|x - x^*\|) + O(\|x - x^*\|)^2, \ldots, \frac{1}{(p-1)!}f_p^{(p)}(x^*)[x - x^*]^{p-1} + O(\|x - x^*\|)^p\right\}.$$

Причем оператор (матрица) $\{f_1'(x^*), f_2''(x^*)[x - x^*], \ldots, f_p^{(p)}(x^*)[x - x^*]^{p-1}\}$ не вырожден $\forall x \in U_\varepsilon(x^*)\backslash\{x^*\}$. Значит,

$$\left\|\{f_1'(x^*), f_2''(x^*)[x - x^*], \ldots, f_p^{(p)}(x^*)[x - x^*]^{p-1}\}^{-1}\right\| \le \frac{C}{\|x - x^*\|^{p-1}} \; \forall x \in U_\varepsilon(x^*)\backslash\{x^*\},$$

где $C > 0$ – некоторая независимая константа. Откуда, по теореме Банаха о малом возмущении обратного оператора, следует, что $\left\|\{f'(x)\}^{-1}\right\| \le \dfrac{2C}{\|x - x^*\|^{p-1}}$ и $f'(x) > 0$ $\forall x \in U_\varepsilon(x^*)\backslash\{x^*\}$ и $\varepsilon > 0$ достаточно малое. То есть для классической функции Ляпунова $v(x) = \|f(x)\|^2$ будет $\dfrac{dv}{dt} = -2v(x) < 0$ $\forall x \in U_\varepsilon(x^*)\backslash\{x^*\}$. Отсюда следует асимптотическая устойчивость и сходимость метода.

Пример 2. Для отображения $f(x) = x^2$, $p = 2$, рассмотрим систему (4)

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2x}x^2, \quad x(0) = x_0, \quad x^* = 0. \tag{14}$$

Очевидно, что условия теоремы 5 выполнены, значит, система будет асимптотически устойчива. Действительно, решая дифференциальное уравнение, находим $x(t) = Ce^{-t}$.

Что касается асимптотической устойчивости системы (1), то в случае вырождения $f'(x^*)$ ситуация может быть различная. Однако при предположении так называемой сильной p-регулярности отображения $f(\cdot)$ в точке x^*, будет верен результат, приведенный ниже в теореме 6.

Замечание 1. В силу того, что $P_1 f'(x^*) = f'(x^*)$, мы также будем использовать модификацию p-фактор функции Ляпунова с

$$\bar{\Phi}_p(x, h) = f(x) + P_2 f'(x)[h] + \ldots + P_p f^{(p-1)}(x)[h]^{p-1}$$

и соответственно модификацию p-фактор оператора

$$\bar{\Psi}_p(x, h) = f'(x) + P_2 f''(x)[h] + \ldots + P_p f^{(p)}(x)[h]^{p-1}.$$

Определение 5. Будем говорить, что отображение $f \in C^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию сильной p-регулярности в точке x^*, если $\forall x \in U_\varepsilon(x^*)\backslash\{x^*\}$ $\exists h \in \mathbb{R}^n$, $\|h\| \le 1$ такие, что выполняется неравенство

$$\langle \bar{\Psi}_p^{\mathrm{T}}(x, h)\bar{\Phi}_p(x, h), f(x)\rangle < 0. \tag{15}$$

Пример (продолжение). Для функции $f(x) = x^2$ условие сильной 2-регулярности в точке $x^* = 0$ выполнено. Действительно, здесь $p = 2$, $x^* = 0$, $P_1 = 0$, $P_2 = 1$, $\bar{\Phi}_2(x,h) = x^2 + 2xh$, $\bar{\Psi}_2(x,h) = f'(x) + P_2 f''(x)[h] = 2x + 2h$ и $\langle \bar{\Psi}_2(x,h)^{\mathrm{T}} \bar{\Phi}_2(x,h), f(x) \rangle = 2(x+h)(x^2+2xh)x^2 < 0$ $\forall x \in U_\varepsilon(0)\backslash\{0\}$, где $h = 1$, если $x < 0$, и $-x < h < -\frac{x}{2}$, если $x > 0$ и, соответственно, выполнено условие (15).

Теорема 6. *Пусть* $f \in C^{p+1}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда, если отображение* f *— сильно* p*-регулярно в точке* x^*, *то тривиальное решение* x^* *системы* (1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Покажем, что p-фактор функция Ляпунова $v_p(x,h) = \|\Phi_p(x,h)\|^2$ является искомой функцией Ляпунова для применения теоремы 1 при $x \in U_\varepsilon(x^*)\backslash\{x^*\}$ и $\varepsilon > 0$ достаточно малом.

Имеем

$$\frac{dv_p(x,h)}{dt} = \left(\|\bar{\Phi}_p(x,h)\|^2\right)_t = 2\langle \bar{\Phi}'_p(x,h)^{\mathrm{T}} \bar{\Phi}_p(x,h), \dot{x}(t) \rangle = 2\langle \bar{\Psi}_p(x,h)^{\mathrm{T}} \bar{\Phi}_p(x,h), f(x) \rangle.$$

Последнее выражение, согласно (15), отрицательно $\forall x \in U_\varepsilon(x^*)\backslash\{x^*\}$. При этом $\|\bar{\Phi}_p(x,h)\| \le C$ равномерно по h, так как $\|h\| \le 1$ $\forall x \in U_\varepsilon(x^*)$.

Поэтому доказательство теоремы 1 не изменится (см., например, [13]) при использовании функции $v_p(x,h)$ на траектории решений уравнения (1), хотя в некоторых точках траектории $x(t)$ векторы h, вообще говоря, могут быть разными и зависеть от x, но это не влияет на анализ устойчивости.

Однако при исследовании на устойчивость в общем случае ситуация зависит от начальной точки $x(0) = x_0$ и при различных точках x_0 траектория $x(x_0,t)$ может как сходиться к x^*, так и не сходиться к x^*. Ответ на этот вопрос весьма сложен и связан с существованием решения краевых задач. Поясним это. Заменим переменные $u = \frac{1}{t+C}$ и тогда в точке $t = +\infty$ соответственно $u = 0$. Пусть $u_0 = \frac{1}{C}$. Тогда система (1) перепишется следующим образом:

$$\dot{x}(u)u^2 + f(x) = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(u_0) = x_0.$$

Обозначив $g(u,x) = \dot{x}u^2 + f(x)$, можем исследовать, при каких начальных значениях x_0 уравнение $g(u,x) = 0$ имеет в окрестности точки $(0,0)$ решение $x = x(u)$. Частично ответ на этот вопрос может дать теорема 2, которая гарантирует существование устойчивого решения, если при начальных значениях x_0 выполняется условие p-регулярности отображения $g(u,x)$ на элементе $h = (0,x_0)$ и, значит, существование решения $x(u) \to 0$ при $u \to 0$ (или, соответственно, при $t \to \infty$).

Пример (продолжение). Таким образом, из теоремы 6 следует асимптотическая устойчивость системы (12) или сходимость метода (12) с использованием 2-фактор функции Ляпунова $\bar{v}_2(x,h) = \|\bar{\Phi}_2(x,h)\|^2 = (x^2 + 2xh)^2$.

Отметим, также, что для системы (12) применение модифицированной 2-фактор функции $\bar{\Phi}_2(x,h)$ в теореме 3 также дает новую устойчивую динамическую систему (или схему сходящегося метода):

$$\dot{x}(t) = \bar{\Phi}_2(x,h) = f(x) + P_2 f'(x)[h] = x^2 + 2xh, \quad x(0) = 0, \quad x(u_0) = x_0$$

при $h = -1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.

2. *Барбашин Е.А., Красовский Н.Н.* Об устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР. 1952. Т. 86. № 3. С. 453–456.
3. *LaSalle J.P., Lefschetz S.* Stability by Liapunov’s direct method. Academic Press, 1961.
4. *Chellaboina V.S., Haddad W.M.* Nonlinear dynamical systems and control: A Lyapunov-based approach. Princeton University Press, 2008.
5. *Teschl G.* Ordinary differential equations and dynamical systems. Providence: American Mathematical Society, 2012. V. 140.
6. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019.
7. *Absil P.A., Kurdyka K.* On the stable equilibrium points of gradient systems // Systems & control letters. 2006. V. 55. № 7. P. 573–577.
8. *Гладилина Р.И.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости импульсных систем //Динамические системы. 2009. № 26. С. 25–30.
9. *Бибиков Ю.Н., Плисс В.А., Трушина Н.В.* Об устойчивости нулевого решения существенно нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в случае центра // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4. № 3.
10. *Stamova I.M., Stamov G.T.* Stability analysis of differential equations with maximum // Mathematica Slovaca. 2013. V. 63. № 6. P. 1291–1302.
11. *Ismayilova K.E.* Stability analysis for first-order nonlinear differential equations with three-point boundary conditions // e-Journal of Analysis and Applied Mathematics. 2020. V. 2020. № 1. P. 40–52.
12. *Tret’yakov A., Marsden J.E.* Factor analysis of nonlinear mappings: p-regularity theory // Communications on Pure & Applied Analysis. 2003. V. 2. № 4. P. 425.
13. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.
14. *Brezhneva O.A., Tret’yakov A.A.* Implicit function theorems for nonregular mappings in Banach spaces. Exit from singularity // Banach Spaces and Their Applications in Analysis. 2007. P. 285–302.