

САМОИНДУЦИРОВАННЫЙ ПОДСОС ЖИДКОСТИ В ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ¹⁾

© 2022 г. А. Р. Горбушин^{1,3}, В. Б. Заметаев^{1,2,3,*}, **И. И. Липатов**^{1,3},
М. А. Федотов¹, А. А. Хохлов¹

¹ 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ, Россия

² 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

³ 140180 Жуковский, М.о., ул. Жуковского, 1, ЦАГИ, Россия

*e-mail: zametaev.vb@mipt.ru

Поступила в редакцию 13.02.2022 г.

Переработанный вариант 31.03.2022 г.

Принята к публикации 08.06.2022 г.

В работе исследуется турбулентный пограничный слой вязкой несжимаемой жидкости, развивающийся вдоль поверхности плоской пластины на конечных расстояниях от зоны ламинарно-турбулентного перехода. Предполагается, что характерное число Рейнольдса потока велико, а толщина пограничного слоя мала. Для анализа задачи используется асимптотический метод многих масштабов, примененный к поиску решений уравнений Навье–Стокса. Скорость и давление в турбулентном пограничном слое представлены в виде суммы стационарных и возмущенных членов, вместо традиционного суммирования осредненных по времени величин и их пульсаций. Оказывается, что такое стационарное течение (называемое вторичным) внутри турбулентного пограничного слоя определяется классическими идеями и результатами Рейнольдса и Колмогорова без какой-либо гипотезы “замыкания”. В физическом смысле это стационарное решение представляет собой самоиндуцированный подсос жидкости из внешнего потока в турбулентный пограничный слой, что обеспечивает подачу кинетической энергии из зоны с максимальной скоростью, в основную часть пограничного слоя. Найденное решение объясняет концепцию “турбулентной вязкости”, поскольку решение применимо на масштабе толщины пограничного слоя. Область генерации и зона диссипации вихрей Колмогорова не влияют на это стационарное решение в основном приближении. Изучены особенности решений для случаев истечения и втекания жидкости из/в турбулентный пограничный слой через проницаемую поверхность. Полученные решения сравниваются с имеющимися экспериментальными данными. Библ. 58. Фиг. 6.

Ключевые слова: турбулентный пограничный слой, математическое моделирование, асимптотические методы.

DOI: 10.31857/S0044466922100052

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной статье описывается применение разработанного авторами нового асимптотического подхода к анализу турбулентного пограничного слоя (ТПС) на проницаемой плоской пластине с нулевым градиентом давления. Ранее этот подход был успешно использован для описания турбулентного слоя смешения [1], [2], свободной турбулентной двумерной струи [3] и течения в канале [4]. Несжимаемый турбулентный пограничный слой на плоской пластине является классическим объектом исследования, его свойства хорошо известны и подробно описаны, например, в экспериментальных исследованиях [5]–[9].

Основной подход теоретиков к изучению турбулентных течений основан на пионерских исследованиях Рейнольдса [10], [11], а именно, на осреднении скоростей и давления за некоторый большой период времени в турбулентном пограничном слое и учете дополнительных турбулентных напряжений в системе уравнений Рейнольдса (RANS).

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-11-20006) в МФТИ. Компьютерная поддержка обеспечена в ЦАГИ и ФИЦ ИУ РАН.

Однако полученные уравнения (RANS) для осредненных значений являются неполными, поскольку они содержат осредненные “квадраты” пульсаций, которые называются турбулентными напряжениями, и зависимость которых от искомым осредненных функций заранее неизвестна. Первые из этих зависимостей были предложены в [12] Прандтлем с точки зрения физики и в [13] Карманом с точки зрения теории размерности и позже были названы гипотезой замыкания уравнений Рейнольдса. Было выпущено множество статей, разъясняющих подход Прандтля, и были проведены сотни экспериментов, описывающих свойства турбулентного пограничного слоя и особенности ламинарно-турбулентного перехода. Осредненный профиль скорости в турбулентном пограничном слое существенно полнее по сравнению с ламинарным пограничным слоем, а коэффициент поверхностного трения, измеренный в [14] на плоской пластине, был в 5–7 раз выше, чем для ламинарного потока. Подробный обзор экспериментальных исследований ТПС можно найти, например, в монографии [15].

В первой половине двадцатого века было проведено множество качественных исследований турбулентности, основанных на физических законах сохранения. Особый вклад в эти исследования внесли Тейлор, Колмогоров и Обухов [16]–[18], предложившие статистические законы для пульсаций скорости, и в результате было введено понятие однородной и изотропной турбулентности. В то же время были заложены основы теории ТПС. В частности, Карман ввел понятие основной части пограничного слоя – слоя дефекта скорости, а определение ламинарного вязкого подслоя вблизи обтекаемой поверхности было предложено в работах [19]–[21].

Отдельное направление исследований было основано в работе [22]: теория двумерной турбулентности. Исследования двумерных уравнений показали парадоксальные результаты, а именно, они показали обратный каскад передачи турбулентной энергии от мельчайших вихрей к самым большим в условиях свободной турбулентности, в отличие от прямого каскада типа Колмогорова.

В последующие годы аналитические методы исследования турбулентных течений продолжали развиваться. Важные и интересные результаты были получены в статьях [23]–[26]. Асимптотические методы были плодотворно использованы для анализа классических уравнений Рейнольдса в пограничных слоях в [27]–[32]. Интересное перспективное расширение классической теории турбулентного пограничного слоя в рамках уравнений Рейнольдса было предложено в [33]. Достижения и проблемы современного изучения турбулентности подробно описаны в [34], [35]. В интересном обзоре [36] обсуждается важность “более усложненных и сложных моделей, которые должны учитывать эффекты числа Рейнольдса более высокого порядка и эффекты более высокого порядка по отношению к координате нормали к стенке”.

С 90-х годов прошлого века эффективные численные методы применяются для исследования турбулентных пограничных слоев. Возможно, наиболее важной областью исследований является прямое численное моделирование турбулентных потоков (DNS), в качестве примера можно указать статьи [37], [38]. Среди таких исследований некоторые работы представляют большую ценность, например [39], в которой проведены и расчеты и поставлен эксперимент.

Однако помимо преимуществ, были выявлены и недостатки использования уравнений Рейнольдса для анализа турбулентных пограничных слоев: любая гипотеза замыкания сводит осредненные уравнения турбулентного течения к аналогу ламинарных уравнений движения. Для двумерных течений несжимаемой жидкости в пограничном слое, к примеру, используя гипотезу Буссинеска $\tau_i = -\rho \overline{u'v'} = \rho \nu_i \partial \bar{u} / \partial y$, от уравнений RANS остаются только уравнение продольного импульса для осредненной продольной скорости и уравнение неразрывности для определения осредненной вертикальной скорости, а изменение давления поперек пограничного слоя не учитывается. На фиг. 1 представлены типичные уравнения осредненного движения (RANS) и их решения для осредненного давления в пограничном слое, фрагмент взят из [40].

Нетрудно заметить, что вязкий член $\mu \Delta \bar{v}$ и конвективный член $\bar{v} \partial \bar{v} / \partial y$ не были включены в уравнение ((16.32), см. фиг. 1), хотя их малость не очевидна.

Это приводит авторов статьи к следующим вопросам.

- Правильно ли пренебречь перепадом давления в турбулентном пограничном слое?
- Может ли вертикальная скорость быть значимой?
- Может ли явление подсоса жидкости в пограничный слой, как описано в [41], быть упущено из-за такого переупрощения задачи?

Кратко перечислив результаты и недостатки методов исследования турбулентных пограничных слоев, мы можем сформулировать цель данной статьи – применить асимптотический ана-

$$\rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \Delta \bar{u} - \rho \left(\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right) \quad p.505$$

$$\rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \Delta \bar{v} - \rho \left(\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right)$$

Equation (16.11) together with the boundary – layer approximation (Re → ∞, $\bar{v} \ll U_\infty$, $\partial/\partial x \ll \partial/\partial y$) yields the following equation in the y direction : p.517

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{\partial (\rho \overline{v'^2})}{\partial y} \quad (16.32)$$

Integrating over the boundary – layer thickness delivers :

$$\bar{p} + \rho \overline{v'^2} = \bar{p}_w = p_e \quad (16.33)$$

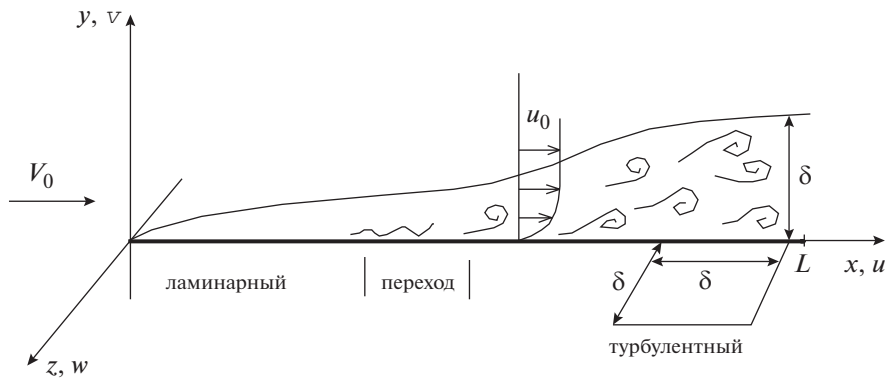
Фиг. 1. Осредненные уравнения Рейнольдса из монографии [40, с. 505, 517].

лиз уравнений Навье–Стокса для описания свойств турбулентного пограничного слоя без дополнительной гипотезы замыкания, даже сформулированной с точки зрения физики. Настоящая статья дополняет и развивает результаты работ [42], [43]. В последней из упомянутых работ проводится асимптотическое исследование специальных двумерных невязких вихрей Колмогорова в несжимаемом турбулентном пограничном слое, развивающемся на плоской пластине. Рассмотрена локальная задача в зоне генерации турбулентности и в вязком подслое, используя в качестве базовой скорости неизвестный заранее стационарный регулярный профиль.

Напротив, данное исследование описывает решение, которое справедливо на всей толщине турбулентного пограничного слоя и на длинах, сравнимых с длиной обтекаемой пластины, и находит эту базовую скорость аналитически. Для анализа уравнений Навье–Стокса используется метод многих масштабов, в котором число Рейнольдса стремится к бесконечности, а безразмерная толщина пограничного слоя стремится к нулю.

В исследовании предполагается наличие аналогии между турбулентным пограничным слоем и течениями, вызванными быстрым колебательным движением тела или наличием периодических пульсаций во внешнем потоке. Хорошо известен пример стационарного вторичного течения, которое создается быстро колеблющимся цилиндром в неподвижной жидкости [44]. Интересная фотография такого потока представлена в альбоме [45], где фиг. 31 показывает колеблющийся цилиндр с малой амплитудой и высокой частотой, а также создаваемые им почти стационарные крупномасштабные вихри. Такие вихри являются результатом передачи кинетической энергии от колеблющегося тела к окружающей жидкости. Случаи, когда внешний поток содержит небольшую быстро осциллирующую составляющую и, как результат, возникают вторичные стационарные движения, описаны в [46], [47]. Другой пример возникновения вторичных стационарных течений указан в [48]. Такие потоки подробно рассмотрены также в работах [49], [50]. Несмотря на существенную разницу между приведенным выше примером течения с действующей внешней периодической силой и турбулентным пограничным слоем с самогенерируемыми пульсациями, оказывается, что вторичные стационарные течения в ТПС также возможны. Однако в этом случае кинетическая энергия из внешнего высокоскоростного потока передается обратно к телу в зону генерации турбулентности для поддержания пульсаций.

В ходе исследования выводятся уравнения и ищутся решения для вторичной стационарной скорости, перпендикулярной обтекаемой поверхности. Рассматриваются случаи сплошной и проницаемой поверхности. Этот процесс является основным, если внешний поток двумерный, и каждое решение представляет собой подсос жидкости в пограничный слой из внешнего потенциального потока в зависимости от интенсивности протекания сквозь поверхность. Продольная вторичная стационарная скорость и давление анализируются на втором этапе этого исследования. Найденные решения сравниваются с имеющимися экспериментальными данными.



Фиг. 2. Схема течения.

2. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Рассмотрено стационарное двумерное обтекание вязкой несжимаемой жидкостью плоской пластины длиной L , см. фиг. 2. Характерное время, размер и скорость набегающего потока равны L/V_∞ , L , V_∞ соответственно. Давление вводится по формуле $p_{\text{физ}} = p_\infty + \rho V_\infty^2 p$, где ρ – плотность жидкости. Все гидродинамические функции, длины и время обезразмерены традиционно с использованием заданных параметров потока. В дальнейшем предполагается, что все величины и уравнения безразмерны. Число Рейнольдса $Re = \rho V_\infty L / \mu$, где μ – коэффициент динамической вязкости, имеет большую величину в данном асимптотическом исследовании. В отличие от внешнего потока, пограничный слой на пластине считается турбулентным, имея в виду пульсации давления и скоростей относительно искомого основного профиля скорости продольного потока u_0 . Безразмерная толщина турбулентного пограничного слоя δ полагается малой величиной.

Безразмерные уравнения Навье–Стокса в несжимаемой жидкости можно представить в виде

$$\nabla^2 p = -2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} - 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 - 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} - 2 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 w, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.4)$$

Для поиска решения системы (2.1)–(2.4) используется асимптотический метод многих масштабов, поскольку поток содержит как минимум два характерных размера – длину пластины и толщину пограничного слоя. Однако поскольку метод является асимптотическим, возникает вопрос о виде подходящего асимптотического разложения решения уравнений Навье–Стокса. Обычно в ТПС предполагается, например, в соответствии с экспериментами [5]–[9], что мы можем разложить скорость как сумму осредненного по времени профиля скорости и пульсаций. Двумерный профиль осредненной скорости справедлив в основной части пограничного слоя и имеет логарифмическую особенность у стенки. Среднее значение пульсаций за большой период времени предполагается равным нулю.

Однако такой подход не является общим с точки зрения авторов, поскольку полностью игнорирует внутреннюю структуру решения. Поэтому в данной работе мы рассматриваем разложение скорости как сумму стационарного регулярного профиля u_0 , который заранее не известен, и возмущений (возможно сингулярных вблизи обтекаемой стенки), средняя величина которых не равна нулю и существенно зависит от координат. Теория подобных возмущений в двумерном случае, которые имеют особенность вблизи обтекаемой поверхности, была предложена в [43].

В работе предполагается, что амплитуда возмущений мала в основной части пограничного слоя; однако, согласно гипотезе Рейнольдса [11], квадраты пульсаций (обозначенные штрихами) должны влиять на основной поток (см. формулы на фиг. 1). В оценках величин также необходимо учитывать, что, согласно экспериментам [6], [8] и теории Колмогорова [17], основная кинетическая энергия пульсаций в турбулентных пограничных слоях содержится в быстрых невязких вихрях, характерные размеры которых одного порядка по всем осям и сопоставимы с толщиной пограничного слоя δ (см. фиг. 2)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u' v'}{\partial y'} \sim u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ x' \sim y' \sim z' \sim \delta \end{array} \right\} \rightarrow v' \sim u' \sim w' \sim \delta^{1/2}, \quad \delta \rightarrow 0.$$

Такие вихри принадлежат “инерционному” диапазону, см., например, Колмогоров [17]. В этой статье они называются быстрыми, так как их размеры много меньше длины пластины и описываются в асимптотическом подходе быстрыми переменными.

Таким образом, в качестве исходной области для анализа была выбрана характерная область невязких вихрей Колмогорова, занимающая всю толщину пограничного слоя, и определены характерные величины пульсаций в ней. Такой подход к выбору начальной характерной области течения типичен для асимптотических методов, применяемых для анализа в гидродинамике. Хорошо известным примером является теория ламинарного обтекания тел при больших числах Рейнольдса, в которой вводится предельное невязкое состояние потока, и уравнения Эйлера справедливы на размерах тела; эта область рассматривается изначально. Для выполнения условия прилипания на поверхности тела необходимо ввести тонкий вязкий пограничный слой в качестве второй характерной области.

Авторы используют аналогичную схему для анализа турбулентного пограничного слоя: изначально рассматривается тонкий слой ($\delta \rightarrow 0$), содержащий стационарный продольный поток с быстрыми невязкими вихрями малой амплитуды $O(\delta^{1/2})$, как предельное состояние течения при $Re = \infty$. Любые другие области следует вводить последовательно, либо по физическим причинам, либо при нарушении построенных асимптотических разложений. После построения решения в первой области и анализа его свойств возникнет вопрос об области генерации турбулентности и вязком ламинарном подслое. Но возможно ли такое предельное состояние турбулентного слоя при $Re \rightarrow \infty$, и является ли этот предел невязким, заранее не известно; однако, авторы считают, что нашли ответы на эти вопросы в данной статье.

Необходимо кратко обсудить характерную толщину турбулентного пограничного слоя. Если ламинарно-турбулентный переход на пластине естественный, то $\delta(Re)$ известна и стремится к нулю при $Re \rightarrow \infty$. Однако, согласно классическим экспериментам [7], проведенным над искусственно утолщенными турбулентными пограничными слоями, толщина слоя зависит от высоты турбулизаторов. Следовательно, его толщину можно рассматривать как свободный малый параметр, не зависящий от числа Re .

Исходя из перечисленных фактов и предположений, асимптотические разложения решения в основной турбулентной части пограничного слоя следует искать при $\delta \rightarrow 0$, $Re \rightarrow \infty$ в виде

$$\begin{aligned} u &= u_0(x, y_1) + \delta^{1/2} u_1(x_1, y_1, z_1, t_1, x) + \delta u_2 + \dots, \\ v &= \delta^{1/2} v_1(x_1, y_1, z_1, t_1, x) + \delta v_2 + \dots, \quad y_1 = \frac{y}{\delta}, \quad x_1 = \frac{x}{\delta}, \\ w &= \delta^{1/2} w_1(x_1, y_1, z_1, t_1, x) + \delta w_2 + \dots, \quad z_1 = \frac{z}{\delta}, \quad t_1 = \frac{t}{\delta}, \\ p &= \delta^{1/2} p_1(x_1, y_1, z_1, t_1, x) + \delta p_2 + \dots \end{aligned} \tag{2.5}$$

Неизвестные функции в (2.5) зависят от медленной эволюционной переменной x и от быстрых переменных, содержащих индекс 1. В (2.5) мы ввели быстрое характерное время t_1 , которое соответствует времени переноса вихрей через характерную кубическую область основным потоком.

Сформулированные асимптотические разложения решения уравнений Навье–Стокса (2.5) в точности совпадают с разложениями для тонкого турбулентного слоя смешения [1] и для тонкой турбулентной вязкой струи [3]. Анализ первого и второго приближений в (2.5) для пограничного слоя аналогичен; следовательно, мы можем использовать результаты, полученные в цитируемых

исследованиях для вертикальной и продольной скоростей. Подробная информация об анализе пограничного слоя представлена в приложении А.

В отличие от любых ламинарных или осредненных уравнений движения в пограничном слое, основной системой уравнений в этом анализе является система невязких уравнений (A1a) для возмущений вертикальной скорости v_1 , давления p_1 и стационарной продольной скорости u_0 . Быстрые невязкие возмущения преобладают над плавными изменениями пограничного слоя. Однако система двух уравнений (A1a) не является замкнутой, что требует условие разрешимости в следующем приближении. Кроме того, из-за линейности сформулированной задачи (A1), решение для возмущений первого порядка, в отсутствие заданного поперечного потока, может быть разложено на сумму медленных двумерных стационарных членов и быстрых трехмерных нестационарных пульсаций:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{10}(x, y_1) + v_{11}(x_1, y_1, z_1, t_1, x), & p_1 &= p_{10}(x) + p_{11}(x_1, y_1, z_1, t_1, x), \\ w_1 &= w_{11}(x_1, y_1, z_1, t_1, x), & u_1 &= u_{10}(x, y_1) + u_{11}(x_1, y_1, z_1, t_1, x). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Медленные стационарные члены в (2.6) и основная продольная скорость $u_0(x, y_1)$ остаются произвольными неизвестными функциями при рассмотрении первого приближения решения и удовлетворяют тождественно невязким уравнениям (A1). Быстрые нестационарные функции в (2.6) описывают турбулентные пульсации во всем пограничном слое, который включает зону генерации [43], но за исключением ламинарного подслоя.

Авторы настоящей статьи впервые столкнулись с медленным стационарным вкладом в возмущения и очень заинтересовались им, поскольку именно вертикальная нетривиальная скорость обеспечивает массообмен с внешним потенциальным потоком. В данной статье исследуются только стационарные составляющие решения, поскольку можно разделить стационарные и нестационарные задачи в первом и втором приближении. Из-за линейности задач зона генерации турбулентности и зона диссипации Колмогорова не влияют на стационарное решение в основном приближении.

Анализ уравнений (A3)–(A5) позволяет описать второе приближение решения как сумму стационарных и нестационарных компонент и сформулировать соответствующие задачи. Рассмотрение стационарной системы уравнений (A4a) позволило найти вертикальную стационарную скорость v_2 ; однако, она содержит вековой член, который увеличивается с ростом x_1 , в отличие от ограниченной медленной скорости первого приближения $v_{10}(x, y_1)$. Это растущее решение нарушает предположения исходных асимптотических разложений (2.5) на масштабе $x_1 \sim \delta^{-1/2} X$, $X = O(1)$:

$$v = \delta^{1/2}(v_{10} + v_{11}) + \delta(x_1 V_m(y_1) + v_{21}) + \dots \Rightarrow v = \delta^{1/2} v_{10} + \delta \delta^{-1/2} X V_m(y_1) + \dots$$

Можно сформулировать условие отсутствия $V_m(y_1) = 0$ секулярных членов в вертикальной скорости v_2 , что приводит к фундаментальной системе дифференциальных вязких уравнений для $v_{10}(x, y_1)$, $u_0(x, y_1)$, зависящей от нормальной координаты y_1 (подробности представлены в приложении А):

$$\frac{1}{\text{Re} \delta^{3/2}} v_{10}'''' - v_{10} v_{10}'' + (v_{10}')^2 = 0, \quad v_{10}(0) = 0, \quad (2.7a)$$

$$\frac{1}{\text{Re} \delta^{3/2}} u_0'' - v_{10} u_0' + v_{10}' u_0 = 0, \quad u_0(0) = 0, \quad u_0(+\infty) = 1. \quad (2.7b)$$

Оба эти уравнения вязкие, в отличие от ламинарных уравнений и осредненных по времени уравнений Рейнольдса для ТПС. Уравнение для вертикальной стационарной скорости отделяется, и в таком течении оно является главным. Вертикальная скорость допускает только одно явное граничное условие непроницаемости или заданного протекания на поверхности, а медленная переменная x является параметром в этой задаче. Уравнения (2.7) не меняются при аффинных преобразованиях $y_1 = Y/(-V_e(x))$, $v_{10} = (-V_e(x))V$ и допускают преобразование сдвига по аргументу. Ранее мы обсуждали невязкий тонкий слой как предельное состояние турбулентного пограничного слоя при $\text{Re} = \infty$, и система уравнений (2.7) в этом случае не будет содержать вязких членов. Соответствующее невязкое решение, удовлетворяющее условию непроницаемости, очень простое и неинтересное: $v_{10} = 0$, а u_0 — произвольная функция.

Стационарное возмущенное давление во втором приближении должно удовлетворять следующему уравнению:

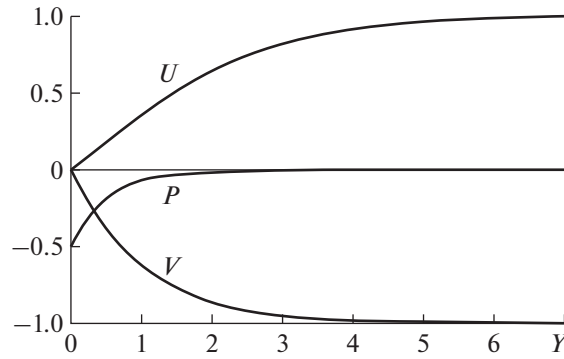
$$\frac{\partial p_{20}}{\partial y_1} = -v_{10} \frac{\partial v_{10}}{\partial y_1} + \frac{1}{\text{Re} \delta^{3/2}} \frac{\partial^2 v_{10}}{\partial y_1^2}. \quad (2.8)$$

Был получен важный результат: чтобы решения уравнений (A4a) не содержали стационарных секулярных членов, линейно растущих с ростом x_1 , должно выполняться условие (2.7a). Это условие может быть выполнено двумя способами: задав вертикальную стационарную скорость равной нулю, а именно: $v_{10} = 0$ (невязкий случай), или удовлетворив уравнение (2.7a) при ненулевой скорости $v_{10} \neq 0$. Как указывалось в работах [1], [3], удалось найти четыре точных решения уравнения (2.7a), которые соответствуют различным турбулентным вязким течениям в тонких сдвиговых слоях:

$$\begin{aligned} v_{10} = \text{const}, \quad v_{10} = -\frac{1}{\text{Re} \delta^{3/2}} \frac{6}{y_1}, \quad v_{10} = \frac{V_e(x)}{\text{Re} \delta^{3/2}} (1 - \exp(V_e y_1)), \quad V_e(x) < 0, \\ v_{10} = \frac{V_e(x)}{\text{Re} \delta^{3/2}} (1 + \exp(V_e y_1)), \quad V_e(x) < 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Третье решение, удовлетворяющее условию непротекания на стенке — это самоиндуцированный вязкий стационарный подсос жидкости в турбулентный пограничный слой из внешнего потока. В этом случае проявляется неклассический эффект влияния вязкости. Обычно вязкость действует нормально к направлению движения основного потока, как это происходит в ламинарном пограничном слое. Коэффициент вязкости напрямую определяет толщину пограничного слоя и входит в экспоненциально малые члены решения как мера затухания. В рассматриваемом случае сценарий отличается: основным течением является вертикальный поток, а вторая производная в этом же направлении остается от лапласиана вертикальной скорости. В результате, согласно решениям (2.9), коэффициент молекулярной вязкости определяет амплитуду скорости подсоса, но не толщину пограничного слоя. Начальная толщина турбулентного пограничного слоя задана и может явно зависеть или не зависеть от числа Рейнольдса, см. [7]. Авторы считают, что физическое понятие “турбулентная вязкость” соответствует описанному решению, поскольку оно определяет всю толщину пограничного слоя как вязкий размер без каких-либо гипотез. Решение было найдено с точностью до произвольной медленной функции $V_e(x) < 0$, которая представляет собой нормированную скорость подсоса безвихревой жидкости через внешнюю границу пограничного слоя. Таким образом, если нам известна эта функция на внешней границе турбулентного пограничного слоя, мы можем определить толщину пограничного слоя и решения внутри него везде. Подсос жидкости первичен и не зависит от скорости продольного потока, что соответствует принципиальному изменению свойств пограничного слоя при переходе в турбулентное состояние.

Если в ламинарном состоянии пограничный слой является параболическим и развитие малых возмущений с учетом взаимодействия с внешним потоком проявляет эллиптические свойства, то после ламинарно-турбулентного перехода параболичность исчезает, и пульсации вертикальной скорости и давления начинают преобладать над плавным изменением стационарных величин. Этот процесс описывается в следующем порядке. Во-первых, необходимо решить задачу о быстрых пульсациях (A1) в первом приближении — в ней преобладают производные по быстрым переменным. Это основная задача. Затем мы вычисляем неоднородности во втором приближении (A3) и решаем соответствующие линейные уравнения, далее следуем приближениям более высокого порядка. Исключение возможных вековых членов на каждой стадии приводит к нахождению медленного установившегося вторичного течения и определяет условия для амплитуд колебаний. В результате самоиндуцированный вязкий и плавно меняющийся вертикальный поток жидкости внутри пограничного слоя становится основным стационарным вторичным течением. Он описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, которое зависит только от вертикальной координаты. Самоиндуцированность означает, что любая ненулевая вертикальная скорость притока снижает давление (2.8) на дне пограничного слоя, что, в свою очередь, увеличивает скорость притока и, следовательно, увеличивает падение давления до тех пор, пока нелинейные эффекты не уравновесят решение. Резкая граница между пульсациями и потенциальным потоком, наблюдаемая экспериментально, косвенно подтверждает подсос жидкости из внешнего потока. На фоне стационарного притока жидкости в пограничный слой вихри не могут его покинуть — они постоянно подтягиваются вниз.



Фиг. 3. Вторичные стационарные скорости и давление в турбулентном пограничном слое.

Параметр $Z_i = \text{Re } \delta^{3/2}$ исключается из уравнения (2.76) для продольной скорости, при подстановке третьего точного решения v_{10} из (2.9). Это уравнение является линейным и имеет два линейно независимых аналитических решения:

$$u_{01} = e^{-Y}, \quad u_{02} = e^{-Y} \int_0^Y \exp(\eta - e^{-\eta}) d\eta, \quad u_{02}(y_1 \rightarrow 0) = \frac{Y}{e} + \dots, \quad Y = (-V_e)y_1. \quad (2.10)$$

Число $e = 2.71\dots$ — это число Эйлера в формулах. Первое решение не удовлетворяет условию прилипания, а второе удовлетворяет обоим граничным условиям и является решением задачи (2.76) с точностью до произвольной функции $V_e(x) < 0$. Решение зависит от автомодельной переменной $Y = (-V_e)y_1$. Согласно найденному решению, толщина турбулентного пограничного слоя обратно пропорциональна нормированной скорости подсоса жидкости на внешней границе. Найденное решение вязкое; однако, как обсуждалось, это большой “турбулентный вязкий размер”, в отличие от малого масштаба вязкости в зоне образования турбулентности и вязкого масштаба Колмогорова.

Что касается предельного состояния турбулентного пограничного слоя (или любого другого тонкого турбулентного слоя) при $\text{Re} \rightarrow \infty$, мы заключаем, что найденное предельное состояние не совпадает с невязким решением ($\text{Re} = \infty$, $v_{10} = 0$, u_0 — произвольно). Несмотря на то что вертикальная скорость убывает при $\text{Re} \rightarrow \infty$, продольная скорость определяется именно вязкими членами и не зависит от числа Рейнольдса, т.е. это вязкий предел:

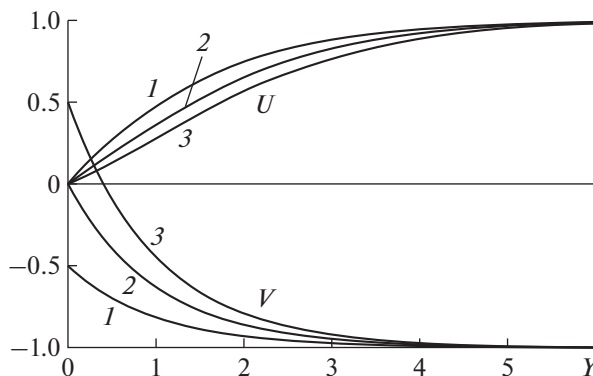
$$v_{10} = \frac{V_e(x)}{\text{Re } \delta^{3/2}} (1 - \exp(-Y)) \rightarrow 0, \quad u_0 = e^{-Y} \int_0^Y \exp(\eta - e^{-\eta}) d\eta, \quad Y = (-V_e)y_1.$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Фундаментальное явление вовлечения жидкости в турбулентный пограничный слой рассматривалось в [41]. Был собран большой набор экспериментальных данных, которые продемонстрировали, что толщина турбулентного пограничного слоя зависит от скорости подсоса. Дальнейший анализ подтверждает это утверждение. На фиг. 3 показаны найденные распределения вторичных стационарных скоростей и давления в автомодельных переменных:

$$u_0 = U(Y), \quad v_{10} = \frac{(-V_e)}{\text{Re } \delta^{3/2}} V(Y), \quad p_{20} = \left(\frac{V_e}{\text{Re } \delta^{3/2}} \right)^2 P(Y), \quad Y = (-V_e)y_1.$$

Именно на фоне такого вторичного стационарного профиля скорости могут поддерживаться пульсации в турбулентном пограничном слое, а жидкость из внешнего потока вовлекается, обеспечивая турбулентные пульсации кинетической энергией. Зона генерации турбулентности расположена у обтекаемой стенки и именно туда должна подаваться высокоэнергетическая жидкость из внешнего потока; это главный момент подачи энергии. В противном случае кинетическая энергия для поддержания генерации будет отбираться из основной части пограничного слоя, что должно привести к снижению осредненной скорости; однако экспериментально этого



Фиг. 4. Теоретические кривые нормальных скоростей V (1 – отсос, 2 – непроницаемость, 3 – вдув) и соответствующих продольных скоростей U .

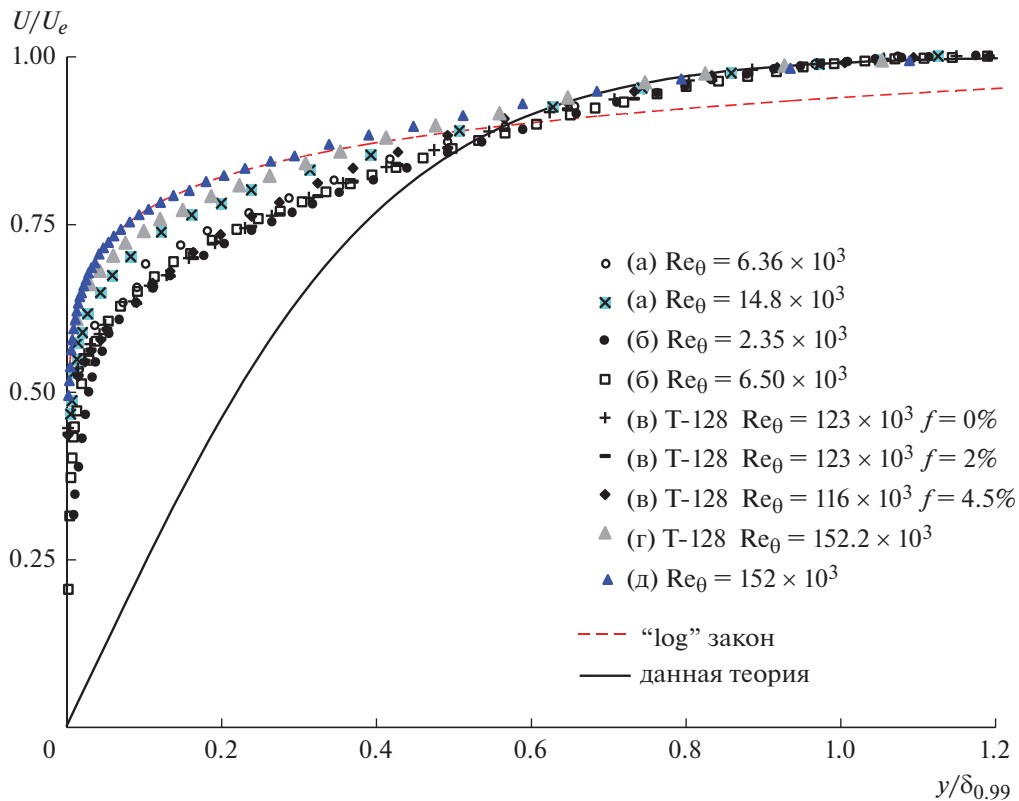
не наблюдается. Хорошо известен каскадный метод передачи кинетической энергии от невязких турбулентных вихрей к вихрям все меньшего размера; однако статистический метод не определяет, как “крупные” вихри получают энергию. Авторы считают, что приток высокоскоростной жидкости в основную часть пограничного слоя обеспечивает энергией “крупные” вихри.

Представляет интерес проанализировать найденные решения для случая слабого вдува-отсоса жидкости в турбулентный пограничный слой через поверхность. Для этого представим аналитические решения для скоростей в виде

$$V = -(1 + Ae^{-Y}), \quad U = e^{-Y} \int_0^Y \exp(\eta + Ae^{-\eta}) d\eta. \quad (2.11)$$

Константа $A = -1$ (кривые 2, фиг. 4) соответствует рассмотренному выше условию непротекания на обтекаемой поверхности, $A < -1$ (кривые 3) соответствует вдуву в пограничный слой, а $-1 < A < 0$ (кривые 1) – отсосу через поверхность. Когда жидкость втекает в пограничный слой через поверхность (кривые 3), продольная стационарная скорость становится менее наполненной, чем в случае непроницаемости. При отсосе жидкости сквозь поверхность профиль скорости (кривые 1) более полный.

На фиг. 5 показано сравнение полученного аналитического решения для продольной скорости (2.10) с экспериментальными данными [7], [9], [51]–[54] и классический логарифмический закон скорости (штриховая линия). В статье [7] изучается искусственно утолщенный турбулентный пограничный слой толщиной до 12 см на плоской пластине длиной четыре метра. Этот слой был получен за счет использования крупнозернистой наждачной бумаги в начале пластины или путем установки круто наклоненных решеток в потоке. Результаты получены для диапазона чисел Рейнольдса, основанного на толщине потери импульса: $Re_\theta = (6.36-14.8) \times 10^3$. В работах [53], [54] исследуется турбулентный пограничный слой толщиной до 20 см на перфорированных и твердых стенках трансзвуковой аэродинамической трубы ЦАГИ Т-128. Это оборудование подробно описано в [55]. Профиль полного давления измерялся с помощью гребенки Пито, расположенной в конце рабочей части АДТ. Исследования проводились для трех значений коэффициента перфорации (проницаемости) $f = 0; 2; 4.5\%$ на стенках 1-й рабочей части при числе Маха $M = 0.7$. Число Рейнольдса, основанное на толщине потери импульса, равно $Re_\theta = (116-123) \times 10^3$. Подробно экспериментальные исследования описаны в работе [53]. На графике также показан осредненный профиль скорости в пограничном слое при $M = 0.79$, измеренный на гладкой стенке рабочей части № 3 Т-128 при $Re_\theta = 152.2 \times 10^3$ (см. [53]). В статье [51] турбулентный пограничный слой, развивающийся на плоской пластине в диапазоне чисел Рейнольдса $Re_\theta = (2.35-6.5) \times 10^3$, был экспериментально исследован с помощью термоанемометра. В статье [52] изучались экспериментально ТПС, которые развивались на плоской пластине с числами Рейнольдса вплоть до $Re_\theta = 152 \times 10^3$.



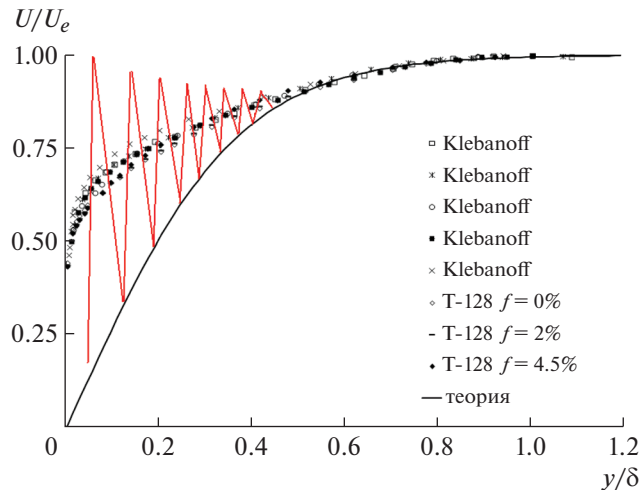
Фиг. 5. Сравнение экспериментальных и теоретических профилей скорости в ТПС на плоской стенке. (а) Klebanoff & Diehl (1952), (б) Корнилов и Литвиненко (2001), (в) Глазков и др. (2016), (г) Глазков и др. (2019) и (д) Oweis и др. (2010). Логарифмический профиль представлен пунктирной линией, а теоретическая кривая представлена сплошной линией.

На рисунке показаны профили скорости в безразмерном виде. Продольная скорость отнесена к скорости за пределами пограничного слоя U_e , а граница пограничного слоя $\delta_{0,99}$ выбирается в точке, где продольная скорость $U = 0.99U_e$. Экспериментальные профили скорости оказались практически универсальными, начиная с расстояния от стенки $y/\delta_{0,99} \approx 0.6$ и слабо зависели от Re_θ и степени перфорации. Универсальность осредненной продольной скорости — хорошо известное явление, которое наблюдалось в различных исследованиях. Теоретическое решение для продольной скорости (2.10) согласуется с экспериментальными данными во внешней половине пограничного слоя, начиная с $y/\delta_{0,99} \approx 0.6$. Наилучшее совпадение имеет место с экспериментальными результатами, полученными при больших числах Рейнольдса при обтекании гладкой поверхности. Логарифмический закон для осредненной скорости действует в зоне генерации турбулентности у стенки и начинает отклоняться от соответствующей экспериментальной кривой, начиная с $y/\delta_{0,99} \approx 0.2$. Коэффициенты логарифмического закона получены из работы [52].

Найденный теоретический профиль скорости существенно отходит от экспериментов при приближении к стенке, хотя экспериментальные кривые остаются относительно близкими друг к другу на протяжении всей толщины слоя. Это несоответствие естественно, поскольку вблизи стенки возникают сильная особенность в пульсационных компонентах скорости.

Можно проанализировать зависимость двумерных теоретических пульсаций от величины скорости подсоса $V_e(x)$. Для этого необходимо выписать несколько членов разложения продольной скорости вблизи стенки, которые найдены в [43] и в этом исследовании: при $r \rightarrow 0$ в полярных координатах, имеем

$$u = \frac{(-V_e)}{e} y_1 + \dots + \delta^{1/2} \left[\frac{\cos \varphi}{r} f \left(\frac{\text{ctg} \varphi}{(-V_e)/e} - t_1 \right) + \ln r \int_0^\varphi \text{ctg} \theta g \left(\frac{\text{ctg} \theta}{(-V_e)/e} - t_1 \right) d\theta + \dots \right]. \quad (2.12)$$



Фиг. 6. Предлагаемая структура решения в турбулентном пограничном слое.

Функция f в формуле (2.12) удовлетворяет вязкому уравнению Гамеля, которое было получено в [43], и логарифмический член можно найти из следующего приближения решения по координате. Выражение для скорости следует проанализировать строго вертикально при $\varphi = \pi/2$, при этом первый член координатного ряда для пульсации выпадет, и порядок особенности уменьшится. Логарифмический член будет первым сингулярным, как и следует из классической теории

$$u = \frac{(-V_e)y_1}{e} + \dots + \delta^{1/2} (\ln(-V_e y_1) I(\pi/2, t_1) - \ln(-V_e) I(\pi/2, t_1) + \dots). \quad (2.13)$$

Согласно формуле (2.13), и первый стационарный член разложения по координате (данная теория) и пульсационный логарифмический член зависят от автомодельной вертикальной координаты $(-V_e)y_1$, что качественно согласуется с представленными экспериментальными данными.

На фиг. 6 авторы предлагают качественно новую структуру асимптотического решения для продольной скорости в турбулентном пограничном слое (данные, взятые из фиг. 5), а именно, осредненная скорость должна быть суммой стационарной вторичной скорости и осредненного значения пульсации (красная линия), как показано схематически на графике.

4. ВЫВОДЫ

В исследовании предложена асимптотическая теория стационарного вторичного течения около стенки в турбулентном пограничном слое.

Обнаружено, что как и в свободных турбулентных сдвиговых течениях [1], [3], первичное явление в рассматриваемой задаче — это быстрые пульсации скорости, нормальной к обтекаемой поверхности, и давления, которые порождают стационарный подсос жидкости из области с высокими скоростями в область генерации турбулентности (зона самоподдерживающихся пульсаций). В отличие от свободных турбулентных сдвиговых слоев, асимптотическое разложение пульсаций скорости в основной части ТПС является сингулярным и допускает логарифмическую особенность вблизи поверхности.

Вторичное стационарное течение является вязким на всей толщине ТПС, что предполагает крупномасштабную вязкость и обосновывает известную физическую концепцию “турбулентной вязкости”. Самоиндуцированный подсос жидкости в тонкий ТПС можно рассматривать как механизм действия “турбулентной вязкости”, который приводит к подаче кинетической энергии в зону генерации турбулентности. Стационарное решение, которое было найдено, не зависит от масштабов зоны генерации турбулентности или зоны вязкой диссипации Колмогорова в основном приближении. Напротив, именно на фоне этого вторичного стационарного профиля скорости и могут поддерживаться пульсации в ТПС.

Найденная фундаментальная система уравнений относительно базовых стационарных вертикальных и продольных скоростей состоит из двух вязких уравнений, в отличие от ламинарного или осредненного пограничного слоя.

Найденные решения согласуются с экспериментальными данными различных авторов в широком диапазоне чисел Рейнольдса на внешней половине толщины пограничного слоя даже в присутствии переноса массы через обтекаемую поверхность.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Подставляя асимптотические разложения (2.5) в (2.1)–(2.4) и последовательно выделяя главные члены в уравнениях, получаем задачи для возмущения первого порядка v_1 , p_1 и w_1 , u_1 :

$$\begin{aligned} O\left(\frac{\delta^{1/2}}{\delta^2}\right): \quad \nabla^2 p_1 + 2 \frac{\partial u_0}{\partial y_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} &= 0, \\ O\left(\frac{\delta^{1/2}}{\delta^2}\right): \quad \frac{\partial v_1}{\partial t_1} + u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial y_1} &= 0, \\ y_1 = 0: \quad v_1 = 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial y_1} = 0; \quad y_1^2 + x_1^2 + z_1^2 \rightarrow \infty: \quad p_1 = O(1), \end{aligned} \quad (\text{A1a})$$

$$\begin{aligned} O\left(\frac{\delta^{1/2}}{\delta^2}\right): \quad \frac{\partial w_1}{\partial t_1} + u_0 \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial z_1} &= 0, \\ O\left(\frac{\delta^{1/2}}{\delta^2}\right): \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A1b})$$

В результате была получена невязкая система уравнений, введенная в [56] для описания эволюции малых возмущений. В случае двумерной базовой скорости $u_0(x, y_1)$ уравнения для пульсаций v_1 , p_1 отделяются. Зная p_1 , можно рассчитать поперечные пульсации из соответствующего уравнения импульса и продольные пульсации из уравнения неразрывности.

Решения невязкой линейной задачи (A1) традиционно ищутся в форме бегущих волн $v_1 \sim \exp(i\alpha(x_1 - ct_1))$ с действительным α (мы называем эти решения *тип 1*). Если основной профиль скорости u_0 наполненный, а именно, не имеет точки перегиба, то спектр решений системы (A1) непрерывен, дискретных нарастающих мод нет и фазовая скорость действительна (см. монографию [57] и [58]). Такие решения ограничены вблизи обтекаемой поверхности, в отличие от турбулентных пульсаций, которые усиливаются по мере приближения к стенке.

Кроме того, в статье [42] было обнаружено другое решение, которое ведет себя сингулярно при стремлении к некоторой точке на обтекаемой стенке (мы называем его *тип 2*) и не может быть представлено в виде бегущих волн. Качественно оно напоминает поведение турбулентных пульсаций.

Система уравнений (A1) линейна и содержит производные только по быстрым переменным x_1 , y_1 , z_1 , t_1 , и в общем случае возмущения v_1 , p_1 , u_1 должны быть суммами двумерных стационарных членов, зависящих от медленной переменной x и нестационарных быстрых пульсаций (назовем такие стационарные решения *тип 3*):

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{10}(x, y_1) + v_{11}(x_1, y_1, z_1, t_1, x), & p_1 &= p_{10}(x) + p_{11}(x_1, y_1, z_1, t_1, x), \\ w_1 &= w_{11}(x_1, y_1, z_1, t_1, x), & u_1 &= u_{10}(x, y_1) + u_{11}(x_1, y_1, z_1, t_1, x). \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

Для пульсации w_1 , если нет физических причин для появления стационарной поперечной составляющей, то такого члена быть не должно. Подстановка формул (A2) в систему (A1) показывает, что медленные функции с индексом, содержащим ноль, исключаются при дифференцировании и никак не влияют на решение системы (A1), а именно, система уравнений (A1) справедлива для пульсаций v_{11} , p_{11} , а медленные функции v_{10} , p_{10} остаются произвольными.

В статье исследуется стационарное решение именно третьего типа, которое можно найти, рассматривая следующие приближения.

Уравнения для второго приближения можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}
 O\left(\frac{\delta}{\delta^2}\right): \quad \nabla^2 p_2 + 2 \frac{\partial u_0}{\partial y_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} &= -2 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - 2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_1}\right)^2 - 2 \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \frac{\partial w_1}{\partial z_1} - 2 \left(\frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right)^2 - 2 \frac{\partial u_1}{\partial z_1} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} - 2 \frac{\partial w_1}{\partial y_1} \frac{\partial v_1}{\partial z_1}, \\
 O\left(\frac{\delta}{\delta}\right): \quad \frac{\partial v_2}{\partial t_1} + u_0 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial p_2}{\partial y_1} &= -u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y_1} - w_1 \frac{\partial v_1}{\partial z_1} + \frac{1}{\text{Re } \delta^{3/2}} \nabla^2 v_1, \\
 O\left(\frac{\delta}{\delta}\right): \quad \frac{\partial w_2}{\partial t_1} + u_0 \frac{\partial w_2}{\partial x_1} + \frac{\partial p_2}{\partial z_1} &= -u_1 \frac{\partial w_1}{\partial x_1} - v_1 \frac{\partial w_1}{\partial y_1} - w_1 \frac{\partial w_1}{\partial z_1} + \frac{1}{\text{Re } \delta^{3/2}} \nabla^2 w_1, \\
 O\left(\frac{\delta}{\delta}\right): \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y_1} + \frac{\partial w_2}{\partial z_1} &= 0.
 \end{aligned} \tag{A3}$$

В уравнениях (A3) для возмущений второго порядка линейные операторы совпадают с операторами в (A1); однако появляются неоднородные квадратичные члены. В (A3) также оставлены вязкие члены в соответствии с результатами [43], где было установлено, что параметр $Z_i = \text{Re } \delta^{3/2}$ может принимать счетное число собственных значений от конечных величин до бесконечно больших величин. По экспериментальным данным [7], можно оценить значения этого параметра на конечных расстояниях от зоны ламинарно-турбулентного перехода $Z_i \sim 10^3$. В отличие от традиционного метода многих масштабов, производные по медленной переменной x не появились в системе (A3), за исключением уравнения неразрывности. Это объясняется специальным выбором формы исходной системы уравнений (2.1)–(2.4) и разложением искомых функций по степеням $\delta^{1/2}$, а медленные производные убывают по степеням δ . Соответственно, дифференциальные уравнения для амплитуд пульсаций могут быть получены только из третьего приближения, а система (A3) используется для определения медленного стационарного вторичного возмущения v_{10} .

Подстановка выражений (A2) в систему уравнений (A3) позволяет нам разложить правые части (A3) на суммы стационарных и нестационарных членов. В результате система уравнений для возмущений второго порядка $v_2 = v_{20} + v_{21}$, $p_2 = p_{20} + p_{21}$ распадается на две системы: стационарную (A4a) для $v_{20}(x_1, y_1, x)$, $p_{20}(y_1, x)$ и нестационарную (A4б) для $v_{21}(x_1, y_1, z_1, t_1, x)$, $p_{21}(x_1, y_1, z_1, t_1, x)$:

$$\frac{\partial^2 p_{20}}{\partial y_1^2} + 2 \frac{\partial u_0}{\partial y_1} \frac{\partial v_{20}}{\partial x_1} = -2 \left(\frac{\partial v_{10}}{\partial y_1}\right)^2 = G, \tag{A4a}$$

$$u_0 \frac{\partial v_{20}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{20}}{\partial y_1} = -v_{10} \frac{\partial v_{10}}{\partial y_1} + \frac{1}{\text{Re } \delta^{3/2}} \frac{\partial^2 v_{10}}{\partial y_1^2} = E,$$

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 p_{21} + 2 \frac{\partial u_0}{\partial y_1} \frac{\partial v_{21}}{\partial x_1} &= -2 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \frac{\partial v_{11}}{\partial x_1} - 2 \left(2 \frac{\partial v_{10}}{\partial y_1} \frac{\partial v_{11}}{\partial y_1} + \left(\frac{\partial v_{11}}{\partial y_1}\right)^2\right) - \\
 &- 2 \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \frac{\partial w_1}{\partial z_1} - 2 \left(\frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right)^2 - 2 \frac{\partial u_1}{\partial z_1} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} - 2 \frac{\partial w_1}{\partial y_1} \frac{\partial v_1}{\partial z_1},
 \end{aligned} \tag{A4б}$$

$$\frac{\partial v_{21}}{\partial t_1} + u_0 \frac{\partial v_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{21}}{\partial y_1} = -u_1 \frac{\partial v_{11}}{\partial x_1} - (v_{10} + v_{11}) \frac{\partial v_{11}}{\partial y_1} - v_{11} \frac{\partial v_{10}}{\partial y_1} - w_1 \frac{\partial v_1}{\partial z_1} + \frac{1}{\text{Re } \delta^{3/2}} \nabla^2 v_{11}.$$

Вклад в стационарные неоднородные члены выражается через скорость v_1 ; следовательно, только она и раскладывается на компоненты в (A4a, б) там, где это необходимо. Сначала мы должны решить стационарную задачу (A4a). Для этого можно исключить $\partial v_{20}/\partial x_1$ из первого уравнения и получить обыкновенное дифференциальное уравнение для p_{20} относительно переменной y_1 . В результате решение задачи (A4a) для стационарной неоднородности имеет вид

$$\begin{aligned}
 v_{20} &= x_1 V_m(y_1), \quad p_{20} = p_{20}(y_1), \\
 V_m &= \frac{E - p_{20}'}{u_0}, \quad p_{20}' = -u_0^2 \int_{y_1}^{+\infty} \left(\frac{G}{u_0^2} - \frac{2u_0'}{u_0^3} E \right) d\eta.
 \end{aligned} \tag{A5}$$

Если функции G и E , а именно стационарные правые части уравнений, произвольны, то из формул (A5) следует появление секулярного члена в вертикальной скорости v_{20} , линейно возрастающего с увеличением x_1 , что приводит к нарушению справедливости исходных асимптотических разложений (2.5). Чтобы исключить нефизические растущие решения (A5), необходимо приравнять к нулю $V_m(y_1)$, откуда следует необходимое условие отсутствия вековых членов:

$$\frac{1}{\text{Re } \delta^{3/2}} v_{10}''' - v_{10} v_{10}'' + (v_{10}')^2 = 0, \quad v_{10}(0) = 0. \quad (\text{A6})$$

Это условие представляет собой обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка для вторичной вертикальной стационарной скорости из первого приближения. Для него можно поставить только одно граничное условие — условие непротекания на стенке. Детальный анализ нестационарной системы (A4b) может быть проведен, только если мы знаем скорости v_{10} , u_0 .

Следующим этапом является анализ вторичной стационарной продольной скорости u_0 в пограничном слое, что возможно только при известной вертикальной скорости жидкости v_{10} . Из уравнения неразрывности в первом приближении можно найти быстрое возмущение горизонтальной скорости u_{11} :

$$O\left(\frac{\delta^{1/2}}{\delta}\right): \quad \frac{\partial u_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{10}}{\partial y_1} + \frac{\partial v_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial w_{11}}{\partial z_1} = 0 \rightarrow u_{11} = -\frac{\partial v_{10}}{\partial y_1} x_1 + u_{12}. \quad (\text{A7})$$

Оно содержит стационарный, линейный по x_1 член, который в отличие от вертикальной скорости невозможно исключить явно. Поэтому необходимо проверить справедливость асимптотического разложения для продольной скорости на масштабах $x_1 \sim \delta^{-1/2} X$, $X = O(1)$. Подстановка v_{10} из (2.9) в u_{11} и в асимптотическое разложение продольной скорости дает оценки членов на указанных масштабах:

$$u = u_0(y_1) + \delta^{1/2}(u_{10} + u_{11}) + \dots, \quad v_{10} = \frac{V_e}{\text{Re } \delta^{3/2}} (1 - \exp(V_e y_1)),$$

$$u = u_0 + \delta^{1/2} \left(u_{10} - \frac{\partial v_{10}}{\partial y_1} \delta^{-1/2} X + u_{12} \right) + \dots \Rightarrow u = u_0 + \delta^{1/2} \left[\delta^{-1/2} X \frac{V_e^2}{\text{Re } \delta^{3/2}} \exp(V_e y_1) + u_{10} + u_{12} \right] + \dots$$

Если величина параметра $Z_i = \text{Re } \delta^{3/2}$ конечна, то асимптотическое разложение для u очевидно нарушается. Однако аналитическое исследование [43] показало, что параметр $Z_i = \text{Re } \delta^{3/2}$ может принимать счетное число собственных значений, бесконечно нарастающих с ростом номера i , и в пределе асимптотическое разложение справедливо. А экспериментальные данные из [7] показывают, что характерное $Z_i \sim 10^3$ и растет с ростом координаты рассматриваемой точки на пластине. Более того, линейно возрастающее возмущение продольной скорости не входит в задачу (A4a) и не может повлиять на вывод уравнения (A6).

Чтобы определить основной профиль скорости u_0 , мы рассмотрим стандартное уравнение продольного импульса в системе Навье—Стокса. Оно не приведено в системе (2.1)–(2.4), однако его вид хорошо известен:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u. \quad (\text{A8})$$

Подставляя асимптотические разложения (2.5) и выделяя последовательно главные члены уравнения, можно получить уравнение для возмущений первого порядка:

$$O\left(\frac{\delta^{1/2}}{\delta}\right): \quad \frac{\partial u_{12}}{\partial t_1} + u_0 \frac{\partial u_{12}}{\partial x_1} = \left(u_0 \frac{\partial v_{10}}{\partial y_1} - v_{10} \frac{\partial u_0}{\partial y_1} + \frac{1}{\text{Re } \delta^{3/2}} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y_1^2} \right)_{\text{slow}} - \left(v_{11} \frac{\partial u_0}{\partial y_1} + \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} \right)_{\text{fast}}. \quad (\text{A9})$$

Как и в уравнениях для вертикальных скоростей, в левой части оставлен оператор, зависящий от быстрых переменных. В правой части находятся стационарные медленные и нестационарные быстрые неоднородные члены. Пульсация продольной скорости не должна содержать стационарного линейного члена (поскольку он уже выделен в (A7)), что возможно только в том случае, если медленная правая часть (A9) приравнивается к нулю. То есть надо выполнить своеобразное

условие совместности в уравнении продольного импульса, ведь оно дифференцировалось один раз, чтобы вывести уравнение для давления (2.1). В результате мы можем найти уравнение для продольной стационарной скорости в турбулентном пограничном слое, которое является вязким, как и для вертикальной скорости:

$$\frac{1}{\text{Re} \delta^{3/2}} u_0'' - v_{10} u_0' + v_{10}' u_0 = 0, \quad u_0(0) = 0, \quad u_0(+\infty) = 1. \quad (\text{A10})$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zametaev V.B., Gorbushin A.R., Lipatov I.I.* Steady secondary flow in a turbulent mixing layer // *Internat. Journal of Heat and Mass Transfer.* 2019. V. 132. P. 655–661.
2. *Zametaev V.B., Lipatov I.I.* Energy exchange in a compressible turbulent mixing layer // *J. of Turbulence.* 2021. V. 22 (1). P. 48–77.
3. *Горбушин А.Р., Заметаев В.Б., Лунатов И.И.* Стационарное вторичное течение в двухмерной турбулентной свободной струе // *Изв. РАН МЖГ.* 2019. Т. 54. № 2. С. 1–13.
4. *Заметаев В.Б.* Моделирование турбулентного течения Пуазейля–Куэтта в плоском канале асимптотическими методами // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2020. Т. 60. № 9. С. 1576–1586.
5. *Reichardt H.* Messungen turbulenter Schwankungen // *Naturwissenschaften.* 1938. P.404.
6. *Schubauer G.B., Klebanoff P.S.* Contributions on the mechanics of boundary layer transition // *NACA.* 1955. TN. 3489.
7. *Klebanoff P.S., Diehl Z.W.* Some Features of Artificially Thickened Fully Developed Turbulent Boundary Layers with Zero Pressure Gradient // *NACA REPORT.* 1952. N1110.
8. *Klebanoff P.S.* Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient // *NACA Rep.* 1955. 1247.
9. *Anton Gorbushin, Svetlana Osipova, Vladimir Zametaev.* Mean parameters of an incompressible turbulent boundary layer on the wind tunnel wall at very high reynolds numbers // *Flow, Turbulence and Combustion.* 2021. V. 107 (1). P. 31–50.
10. *Reynolds O.* An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels // *Phil. Trans. Roy. Soc.* 1883. V. 174. P. 935–982.
11. *Reynolds O.* On the dynamic theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion // *Phil. Trans. Roy. Soc.* 1895. V. 186. A 123.
12. *Prandtl L.* Bericht uber Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz // *ZAMM.* 1925. 5. P. 136–139.
13. *von Karman T.* Mechanische Ahnlichkeit und Turbulenz // *Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, Math.-Phys.* 1930. K1. P. 58–76.
14. *Hansen M.* Die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht an einer eigentauchten Platte // *Z. angew. Math. Mech.* 1928. V. 8. № 2. P. 185–199.
15. *Реник Е.У., Соседко Ю.П.* Турбулентный пограничный слой. М.: Физматлит, 2007.
16. *Taylor G.I.* Statistical theory of turbulence // *I. Proc. Roy. Soc. Lond.* 1935. A151. P. 421–444.
17. *Колмогоров А.Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // *Докл. АН СССР.* 1941. Т. 30. № 4. С. 299–303.
18. *Обухов А.М.* On the spectral energy distribution in a turbulent flow // *Изв. АН СССР. Геогр. Геофиз.* 1941. Т. 5. С. 453–466.
19. *Prandtl L.* Nuere Ergebnisse der Turbulenzforschung // *Z. VDI.* 1933. Bd. 77. P. 105–114.
20. *Izakson A.A.* On the velocity distribution formulae near the wall // *Zhurnal exper. theoret. Phys. (ZhETF)* 1939. V. 7. P. 919–024.
21. *Millikan C.B.* A critical discussion of turbulent flows in channels and circular tubes // *Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech.* N.Y.: Wiley, 1939. P. 386–392.
22. *Kraichnan R.H.* Inertial Ranges in Two-Dimensional Turbulence // *Physics of Fluids.* 1967. V. 10. P. 1417.
23. *Chernyshenko S.I., Baig M.F.* The mechanism of streak formation in near-wall turbulence // *J. Fluid Mech.* 2005. V. 544. P. 99–131.
24. *Jiménez J.* Near-wall turbulence // *Phys. Fluids.* 2013. V. 25. 101302.
25. *Hall P.* Vortex-wave interaction arrays: a sustaining mechanism for the log layer? // *J. Fluid Mech.* 2018. V. 850. P. 46–82.
26. *Iyer A.S., Witherden F.D., Chernyshenko S.I., Vincent P.E.* Identifying eigenmodes of averaged small-amplitude perturbations to turbulent channel flow // *J. Fluid Mech.* 2019. V. 875. P. 758–780.
27. *Сычев В.В., Сычев Вук.В.* О структуре турбулентного пограничного слоя // *Прикл. матем. и механ.* 1987. Т. 51. № 4. С. 593–599.

28. *Durbin P.A., Belcher S.E.* Scaling of adverse-pressure-gradient turbulent boundary layers // *J. Fluid Mech.* 1992. V. 238. P. 699–722.
29. *Lundgren T.S.* Asymptotic analysis of the constant pressure turbulent boundary layer // *Physics of Fluids.* 2007. V. 19. 055105.
30. *Smith F.T., Scheichl B., Kluwick A.* On turbulent separation // *J. Engng Math.* 2010. V. 68. Issue 3. P. 373–400.
31. *Scheichl B.* Time-mean Turbulent Shear Flows: Classical Modelling – Asymptotic Analysis – New Perspectives // In book: *Fluid and Solid Mechanics.* 2016. P. 71–108.
32. *Vigdorovich I.I.* Turbulent thermal boundary layer on a plate. Reynolds analogy and heat transfer law over the entire range of Prandtl numbers // *Fluid Dyn.* 2017. V. 52. № 5. P. 631–645.
33. *Scheichl B., Kluwick A.* Non-unique turbulent boundary layer flows having a moderately large velocity defect. A rational extension of the classical asymptotic theory // *Theoretical and Comput. Fluid Dynamics.* 2013. 27(6): P. 735–766.
34. *Hunt J.C.R., Sandham N.D., Vassilicos J.C., Launder B.E., Monkewitz P.A., Hewitt G.F.* Developments in turbulence research: a review based on the 1999 Programm of the Isaac Newton Institute, Cambridge // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 436. P. 353–391.
35. *Launder B., Sandham N.* Closure Strategies for Turbulent and Transitional Flows. Edited by B. LAUNDER & N. SANDHAM // Cambridge University Press. 754. 2002.
36. *Buschmann M.H., Gad-el-hak M.* Recent developments in scaling of wall-bounded flows // *Progress in Aerospace Sciences.* 2007. V. 42. P. 419–467.
37. *Egorov I.V., Sudakov V.G., Fedorov A.V.* Numerical modeling of the perturbations propagation in a supersonic boundary layer // *Izv. RAN, MZhG.* 2004. V. 6. P. 33–44.
38. *Duguet Y., Schlatter P., Henningson D.S.* Formation of turbulent patterns near the onset of transition in plane Couette flow // *J. Fluid Mech.* 2010. V. 650. P. 119–129.
39. *Borodulin V.I., Gaponenko V.R., Kachanov Y.S., Meyer D.G.W., Rist U., Lian Q.X., Lee C.B.* Late-Stage Transitional Boundary-Layer Structures. Direct Numerical Simulation and Experiment // *Theor. Comput. Fluid Dynamics.* 2002. V. 15. 317.
40. *Schlichting H., Gersten K.* Boundary Layer Theory // Ninth Ed., Springer: 805. 2017.
41. *Head M.R.* Entrainment in the Turbulent Boundary Layer // R. & M. N3152, ARC Technical Report. 1960.
42. *Zametaev V.B., Gorbushin A.R.* Evolution of vortices in 2D boundary layer and in the Couette flow // *AIP Conference Proc.* 2016. 1770. 030044.
43. *Горбушин А.Р., Заметаев В.Б.* Асимптотический анализ вязких пульсаций в турбулентных пограничных слоях // *Изв. РАН МЖГ.* 2018. Т. 53. № 1. С. 9–20.
44. *Schlichting H.* Berechnung ebener periodischer Grenzschichtströmungen // *Physikal. Z.* 1932. Bd. 33. P. 327–335.
45. *van Dyke M.* An Album of Fluid Motion // The Parabolic Press. Stanford. California. 1982.
46. *Lin C.C.* Motion in the boundary layer with a rapidly oscillating external flow // *Proc. 9th Intern. Congress Appl. Mech.* Brussels, 1957. V. 4. P. 155–167.
47. *Pedley T.J.* Two-dimensional boundary layers in a free stream which oscillates without reversing // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 55. P. 359–383.
48. *Yudovich V.I.* Example of the secondary steady flow in a laminar flow // *Prikl. Matematika i Mechan.* 1965. V. 29. № 3. P. 453–467.
49. *Stewartson K.* The theory of unsteady laminar boundary layers // *Advances in Appl. Mechan.* 1960. V. 6. P. 1–37.
50. *Riley N.* Unsteady laminar boundary layers // *SIAM Review.* 1975. V. 17. P. 274–297.
51. *Kornilov V.I., Litvinenko Yu.A.* Skin friction measurements in an incompressible turbulent boundary layer. Part 1. Adverse pressure gradient // *Thermophysics and Aeromechanics.* 2001. V. 4. P. 475–491.
52. *Oweis G.F., Winkel E.S., Cutbrith J.M., Ceccio S.L., Perlin M., Dowling D.R.* The mean velocity profile of a smooth-flat-plate turbulent boundary layer at high Reynolds number // *J. Fluid Mech.* 2010. V. 665. P. 357–381.
53. *Glazkov S.A., Gorbushin A.R., Osipova S.L., Semenov A.V.* Influence of movable test section elements configuration on its drag and flow field uniformity at transonic speeds // *AIP Conference Proc.* 2016. 1770. 030008.
54. *Glazkov S.A., Gorbushin A.R., Zametaev V.B., Osipova S.L., Semenov A.V.* Investigation of boundary layer on the walls of test section of the transonic wind tunnel T-128 // XIII Russian conference of young scientists “Problems in mechanics: theory, experiment and new technologies”. Novosibirsk-Sheregesh. Russia. 2019. 15–22 March.
55. *Biryukov V., Glazkov S., Gorbushin A., Ivanov A., Semenov A.* Experimental investigation of the effect of nozzle shape and test section perforation on the stationary and non-stationary characteristics of flow field in the large transonic TsAGI T-128 Wind tunnel // *The Aeronautical Journal.* 2005. V. 109 (1092). P. 75–82.
56. *Rayleigh L.* On the stability, or instability, of certain fluid motions // *Sci. Papers. Cambridge: Univ. Press.,* 1. 1880. P. 474–487.
57. *Drazin P.G., Reid W.H.* Hydrodynamic Stability. Second Ed. // Cambridge University Press, 2004.
58. *Yih Chia-Shun.* Surface waves in flowing water // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 51. P. 2. P. 209–220.