ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 10, с. 1615–1619

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 512.643

КАНОНИЧЕСКИЕ УГЛЫ НОРМАЛЬНЫХ МАТРИЦ И ТЕОРЕМЫ ТИПА ХОФФМАНА–ВИЛАНДТА И САНА

© 2022 г. Х. Д. Икрамов

119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, ВМК, Россия

e-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступила в редакцию 23.10.2021 г.
Переработанный вариант 05.04.2022 г.
Принята к публикации 08.06.2022 г.

Теоремы Хоффмана–Виландта и Сана оценивают величину возмущений в собственных значениях нормальной матрицы, вызванных возмущениями ее элементов. В теории конгруэнтных преобразований роль диагонализуемых матриц и собственных значений в известной мере выполняют юнитоидные матрицы и их канонические углы. Юнитоидными являются, в частности, нормальные матрицы. Статья посвящена обсуждению аналогов теорем Хоффмана–Виландта и Сана для канонических углов. Библ. 4. Фиг. 1.

Ключевые слова: конгруэнция, коквадрат, юнитоид, канонические углы, сходящаяся матрица.

DOI: 10.31857/S0044466922100064

1. Пусть A и B – нормальные $n\times n$-матрицы с собственными значениями соответственно $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ и $\mu_1,\ldots,\mu_n$. Теорема, опубликованная Хоффманом и Виландтом в 1953 г. (см. [1], а также [2, с. 407]) утверждает, что найдется такая перестановка π чисел $\{1,2,\ldots,n\}$, что

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\lambda_j-\mu_{\pi(j)}\right|^2\right)^{1/2}\le\|A-B\|_F. \tag{1}$$

Напомним, что символ $\|\cdot\|_F$ обозначает норму Фробениуса, называемую также евклидовой матричной нормой.

Спустя более чем 40 лет теорема Хоффмана–Виландта была существенно дополнена китайским математиком Саном (J.-g. Sun), значительную часть жизни проработавшим в западных университетах, в частности, в университете шведского города Умео. Сан показал (см. [3]), что ценой небольшого ухудшения оценки (1) можно опустить предположение о нормальности матрицы B при том, что A остается нормальной матрицей. В этом случае (1) нужно заменить оценкой

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\lambda_j-\mu_{\pi(j)}\right|^2\right)^{1/2}\le\sqrt{n}\|A-B\|_F. \tag{2}$$

Квадратная комплексная матрица A называется *юнитоидной* (или *юнитоидом*), если она может быть приведена к диагональному виду посредством конгруэнции, т.е. матричного преобразования типа

$$A\to P^*AP,$$

где P – произвольная невырожденная матрица. (Это понятие впервые появилось в [4].) Юнитоидны, например, нормальные матрицы, приводимые к диагональному виду унитарными конгруэнциями (являющимися заодно унитарными подобиями). Однако существуют и анормальные юнитоиды. Например, жорданова клетка $J_n(1)$ порядка n с единицей на главной диагонали есть юнитоид.

Условимся в дальнейшем рассматривать только невырожденные матрицы. Если такая матрица A есть юнитоид, то среди ее диагональных форм имеется единственная, все диагональные элементы которой унимодулярны. Аргументы этих элементов, выбираемые, скажем, в интервале $[0, 2\pi)$, называются *каноническими углами* матрицы A.

Невырожденной матрице A можно сопоставить матрицу

$$\mathscr{C}_A = A^{-*}A,$$

называемую коквадратом матрицы A (см. [2, § 4.5]). Если A – юнитоид, то собственными значениями матрицы $\mathscr{C}_A$ являются числа $e^{2i\phi_1}, \ldots, e^{2i\phi_n}$, где $\phi_1, \ldots, \phi_n$ – канонические углы матрицы A.

Нетрудно показать, что коквадрат нормальной матрицы есть матрица унитарная. Верно даже более сильное утверждение: невырожденная матрица A нормальна тогда и только тогда, когда ее коквадрат является унитарной матрицей.

Множество канонических углов (невырожденной) нормальной матрицы A будем называть ее *каноническим спектром*. Наша цель – обсудить, как должны выглядеть аналоги теорем Хоффмана–Виландта и Сана для канонических углов нормальных матриц. В п. 2 мы выводим оценку типа Хоффмана–Виландта для расстояния между каноническими спектрами нормальных матриц A и B. Эта оценка универсальна в том смысле, что она верна для любых A и B, однако она дает довольно пессимистические результаты, если A и B имеют малые собственные значения. В связи с этим мы вводим в п. 3 понятие растягивающей матрицы и показываем, как для матриц этого типа улучшить универсальную оценку. В п. 4 обсуждаются аналоги теоремы Сана.

2. Пусть A и B – нормальные матрицы с собственными значениями соответственно $\lambda_j = r_j e^{i\phi_j}$ и $\mu_j = \rho_j e^{i\psi_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Как отмечено в п. 1, коквадраты $\mathscr{C}_A$ и $\mathscr{C}_B$ суть унитарные матрицы с собственными значениями соответственно $e^{2i\phi_j}$ и $e^{2i\psi_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. К этим унитарным матрицам можно применить теорему Хоффмана–Виландта в ее "классической" форме: найдется такая перестановка π чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$, что

$$\sum_{j=1}^{n} \left| e^{2i\phi_j} - e^{2i\psi_{\pi(j)}} \right|^2 \le \left\| \mathscr{C}_A - \mathscr{C}_B \right\|_F^2. \tag{3}$$

Положим

$$\Delta = B - A$$

и оценим правую часть неравенства (3). Имеем

$$\begin{aligned} \mathscr{C}_A - \mathscr{C}_B &= A^{-*}A - B^{-*}B = (A^{-*}A - A^{-*}B) + (A^{-*}B - B^{-*}B) = \\ &= -A^{-*}\Delta + (A^{-*} - B^{-*})B = -A^{-*}\Delta + A^{-*}\Delta^* B^{-*}B. \end{aligned}$$

Отсюда выводим

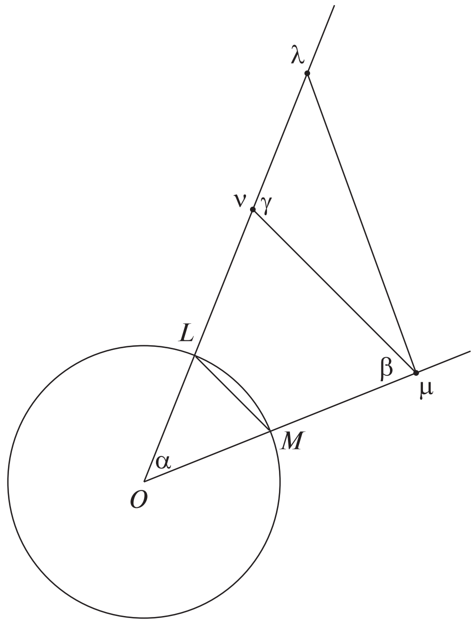
$$\left\| \mathscr{C}_A - \mathscr{C}_B \right\|_F \le \left\| A^{-1} \right\|_2 \left(\left\| \mathscr{C}_B \right\|_F + \left\| I \right\|_F \right) \left\| \Delta \right\|_F$$

и

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \left| e^{2i\phi_j} - e^{2i\psi_{\pi(j)}} \right|^2 \right)^{1/2} \le 2\sqrt{n} \left\| A^{-1} \right\|_2 \left\| A - B \right\|_F. \tag{4}$$

Символ $\|\cdot\|_2$ в применении к матрице есть стандартное обозначение спектральной нормы. В неравенстве (4) учтено то обстоятельство, что фробениусова норма унитарной $n \times n$-матрицы $\mathscr{C}_B$ равна $\sqrt{n}$.

3. Присутствие в универсальной оценке типа Хоффмана–Виландта величины порядка $\left\| A^{-1} \right\|$ представляется неизбежным, исходя из следующего соображения. Пусть A имеет собственное значение $\lambda_0 = re^{i\phi}$ с малым модулем r, и пусть при возмущении A матрицей Δ число λ_0 переходит в $\tilde{\lambda}_0 = re^{i\psi}$. Собственным значениям λ_0 и $\tilde{\lambda}_0$ матриц A и B соответствуют собственные значения $e^{2i\phi}$ и $e^{2i\psi}$ их коквадратов. При этом модули разностей $e^{2i\phi} - e^{2i\psi}$ и $\lambda_0 - \tilde{\lambda}_0$ отличаются друг от друга множителем порядка $1/r$.



Фиг. 1.

Напомним, что квадратная матрица A называется *сходящейся* (*convergent*; см. [2, с. 180]), если $A^m \to 0$ при $m \to \infty$. Необходимое и достаточное условие сходимости состоит в том, чтобы все собственные значения матрицы A были по модулю меньше единицы. Мы выделим подкласс сходящихся матриц условием

$$\|A\|_2 < 1.$$

Будем называть матрицы этого подкласса *сжимающими*.

Определение. Назовем невырожденную матрицу A *растягивающей*, если A^{-1} – сжимающая матрица.

Таким образом, все собственные значения растягивающей матрицы больше единицы по модулю.

Для растягивающей матрицы оценка (4) принимает вид

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left|e^{2i\phi_j} - e^{2i\psi_{\pi(j)}}\right|^2\right)^{1/2} \le 2n\|A - B\|_F. \tag{5}$$

Здесь использовано известное соотношение

$$\left\|A^{-1}\right\|_F \le \sqrt{n}\left\|A^{-1}\right\|_2.$$

Поэтому для растягивающей матрицы A имеем $\left\|A^{-1}\right\|_F \le \sqrt{n}$.

Оказывается, что от множителя n в оценке (5) можно избавиться. В этом нам поможет фиг. 1.

Пусть $\lambda = re^{i\phi}$ и $\mu = \rho e^{i\psi}$ – собственные значения соответственно матриц A и B. Положим $\alpha = \phi - \psi$. Тогда углы при основании равнобедренного треугольника OLM равны $\beta = (\pi - \alpha)/2$. Предполагая для определенности, что $|\mu| \le |\lambda|$, проведем из точки μ отрезок, параллельный хорде LM, до его пересечения в точке ν с лучом $O\lambda$. В треугольнике $\lambda\mu\nu$ угол γ при вершине ν равен $\pi - \beta = (\pi + \alpha)/2$, т.е. этот угол тупой и, значит, сторона $\lambda\mu$ – наибольшая в $\Delta\lambda\mu\nu$. Итак,

$$|\lambda - \mu| > |\mu|\left|e^{i\phi} - e^{i\psi}\right| > \left|e^{i\phi} - e^{i\psi}\right|.$$

С другой стороны,

$$\left|e^{2i\phi} - e^{2i\psi}\right| = \left|e^{i\phi} - e^{i\psi}\right|\left|e^{i\phi} + e^{i\psi}\right| \le 2\left|e^{i\phi} - e^{i\psi}\right|.$$

Следовательно,

$$\left|e^{2i\phi} - e^{2i\psi}\right| \le 2|\lambda - \mu|. \tag{6}$$

Применяя неравенство (6) ко всем разностям, входящим в левую часть соотношения (3), получаем

$$\sum_{j=1}^{n}\left|e^{2i\phi_j} - e^{2i\psi_{\pi(j)}}\right|^2 \le 4\sum_{j=1}^{n}\left|\lambda_j - \mu_{\pi(j)}\right|^2 \le 4\|A - B\|_F^2,$$

т.е.

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left|e^{2i\phi_j} - e^{2i\psi_{\pi(j)}}\right|^2\right)^{1/2} \le 2\|A - B\|_F. \tag{7}$$

Подчеркнем, что это симпатичное неравенство верно только для растягивающих матриц A и B.

4. Говоря об аналоге теоремы Сана для канонических углов, нужно иметь в виду следующее обстоятельство. Матрица B теперь не обязана быть нормальной. Более того, если на нормальную матрицу A не наложены никакие ограничения, то в любой ее окрестности может находиться матрица, не являющаяся юнитоидной. Простой пример дают матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \varepsilon i \end{pmatrix}, \quad \varepsilon \ne 0.$$

Матрица A симметрична, а B анормальна, и жорданова форма ее коквадрата – это клетка второго порядка для собственного значения 1. Если для пары матриц (A, B) мы имеем подобный случай, то бессмысленно говорить о расстоянии между их каноническими спектрами.

Таким образом, должно быть выдвинуто какое-то условие, обеспечивающее простоту спектра матрицы A и достаточную разделенность ее собственных значений. В этом случае существует некоторая окрестность A, в которой все матрицы юнитоидны. Матрица B должна принадлежать этой окрестности.

В выкладки п. 2 следует в случае теоремы Сана внести такие изменения:

1) в соответствии с (2) оценку (3) нужно заменить на

$$\sum_{j=1}^{n}\left|e^{2i\phi_j} - e^{2i\psi_{\pi(j)}}\right|^2 \le n\|\mathcal{C}_A - \mathcal{C}_B\|_F^2;$$

2) коквадрат $\mathcal{C}_B$ не будет унитарной матрицей, если B анормальна. Поэтому его фробениусову норму нельзя заменить на константу $\sqrt{n}$, как это сделано в неравенстве (4). Вместо (4) мы должны теперь иметь

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left|e^{2i\phi_j} - e^{2i\psi_{\pi(j)}}\right|^2\right)^{1/2} \le \sqrt{n}\left(\sqrt{n} + \|\mathcal{C}_B\|_F\right)\left\|A^{-1}\right\|_2\|A - B\|_F.$$

Понятия сходящейся, сжимающей и растягивающей матриц никак не связаны со свойством нормальности. Поэтому рассуждения п. 3, относящиеся к растягивающим матрицам A и B, сохраняют силу и в данном случае. Вместо (7) мы получим теперь оценку

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left|e^{2i\phi_j} - e^{2i\psi_{\pi(j)}}\right|^2\right)^{1/2} \le 2\sqrt{n}\|A - B\|_F.$$

Замечание. Рецензент этой статьи указал, что от коэффициента $\sqrt{n}$ в формуле (4) можно избавиться изобретательным применением стандартных неравенств типа $\|XY\|_F \le \|X\|_2 \|Y\|_F$ и $\|XYZ\|_F \le \|X\|_2 \|Y\|_F \|Z\|_2$. Автор не хотел бы присваивать себе честь публикации этой улучшенной оценки и надеется, что рецензент сделает это сам под собственным именем. С моей же точки зрения присутствие или отсутствие в оценке нормы обратной матрицы важнее конкретных численных коэффициентов, что я и стремился показать в статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hoffman A.J., Wielandt H.W.* The variation of the spectrum of a normal matrix // Duke Math. J. 1953. V. 20. P. 37–39.
2. *Horn R.A., Johnson C.R.* Matrix Analysis. Second edition. Cambridge: Cambridge Univer. Press, 2013.
3. *Sun J.-g.* On the variation of the spectrum of a normal matrix // Linear Algebra Appl. 1996. V. 246. P. 215–223.
4. *Johnson C.R., Furtado S.* A generalization of Sylvester's law of inertia // Linear Algebra Appl. 2001. V. 338. P. 287–290.