

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.633

Светлой памяти Бориса Вадимовича Рогова посвящается

КОМБИНИРОВАННЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ¹⁾

© 2022 г. М. Д. Брагин^{1,2,*}, О. А. Ковыркина^{3,**}, М. Е. Ладонкина^{1,***},
В. В. Остапенко^{3,****}, В. Ф. Тишкин^{1,*****}, Н. А. Хандеева^{3,*****}

¹ 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ РАН, Россия

² 141700 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ, Россия

³ 630090 Новосибирск, пр-т акад. Лаврентьева, 15, ИГиЛ СО РАН, Россия

*e-mail: michael@bragin.cc

**e-mail: olyana@ngs.ru

***e-mail: ladonkina@imamod.ru

****e-mail: ostapenko_vv@ngs.ru

*****e-mail: v.f.tishkin@mail.ru

*****e-mail: nzyuzina1992@gmail.com

Поступила в редакцию 05.02.2022 г.

Переработанный вариант 05.02.2022 г.

Принята к публикации 08.06.2022 г.

Представлен обзор работ по численным методам повышенной точности, предназначенным для сквозного расчета разрывных решений гиперболических систем законов сохранения. Сформулированы основные проблемы, возникающие в теории таких методов, и предложены подходы к их решению. Основное внимание уделяется принципиально новым численным методам сквозного счета (получившим название комбинированные схемы), которые монотонно локализируют фронты ударных волн и одновременно сохраняют повышенную точность в областях их влияния. Приведены тестовые расчеты, демонстрирующие существенные преимущества комбинированных схем по сравнению со стандартными NFC-схемами при расчете разрывных решений с ударными волнами. Библ. 99. Фиг. 18.

Ключевые слова: гиперболические системы законов сохранения, ударные волны, численные методы сквозного счета повышенной точности, комбинированные схемы.

DOI: 10.31857/S0044466922100027

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1], широко известной в связи со схемой распада разрыва, было введено понятие монотонности численной схемы и показано, что среди линейных двухслойных по времени схем нет монотонных схем повышенного порядка аппроксимации. Дальнейшее развитие теории численных методов сквозного счета для гиперболических систем законов сохранения было направлено на преодоление этого запрета Годунова. В результате были разработаны различные классы конечно-разностных, конечно-объемных и проекционных схем, в которых повышенный порядок аппроксимации на гладких решениях и монотонность достигались за счет нелинейной коррекции потоков, приводящей к нелинейности этих схем при аппроксимации линейного уравнения переноса. Перечислим основные классы таких схем, которые будем сокращенно называть NFC (Nonlinear Flux Correction) схемами: MUSCL (см. [2]), TVD (см. [3]), ENO (см. [4]), CU (Central Upwind) (см. [5]), WENO (см. [6], [7]), DG (Discontinuous Galerkin) (см. [8]), CABARET (см. [9]), MBiC (Monotonized BiCompact) (см. [10], [11]). Основное достоинство этих схем заключается в том, что они с высокой точностью локализируют ударные волны при отсутствии существенных нефизических осцилляций на их фронтах.

¹⁾ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ и ГФЕН в рамках научного проекта № 21-51-53012 (разд. 4–7, 9), а также РФФ проект № 21-11-00198 (разд. 8, 10). The reported study was partially funded by RFBR and NSFC, project number 21-51-53012 (sect. 4–7, 9), and also RSF project number 21-11-00198 (sect. 4–7, 9).

При построении NFC-схем повышенный порядок аппроксимации понимается в смысле тейлоровского разложения на гладких решениях, что не гарантирует аналогичного повышения точности при расчете разрывных решений. Несмотря на это, в течение длительного времени преобладала ошибочная точка зрения, что эти схемы должны сохранять повышенную точность (соответствующую порядку их классической аппроксимации) во всех гладких частях рассчитываемых обобщенных решений. Способствовало распространению этого ошибочного мнения то, что в подавляющем числе работ тестирование разностных схем сквозного счета в значительной степени проводится на различных вариантах задачи Римана о распаде разрыва, точное решение которой представляет собой набор простых волн, соединенных областями постоянных течений (причем тестирование обычно ограничивается графическим сравнением численного решения с точным). Такое тестирование позволяет эффективно оценить разрешимость схемой сильных и слабых разрывов, а именно, ширину их размазывания и наличие или отсутствие осцилляций на фронтах ударных волн. Однако оно не может дать достаточной информации о реальной точности схемы в областях влияния ударных волн, поскольку точное решение за их фронтами является постоянным. Кроме того, эту точность нельзя оценить при расчете ударных волн, возникающих при решении скалярного закона сохранения, поскольку в этом случае область влияния устойчивой ударной волны совпадает с линией ее фронта.

Для корректного определения точности схемы в областях влияния ударных волн необходимо рассчитывать разрывные решения квазилинейных систем законов сохранения с ударными волнами, за фронтами которых формируется непостоянное решение. Такое решение для систем законов сохранения, как правило, не описывается точными формулами, и для определения скорости сходимости к нему разностного решения необходимо проведение серии расчетов на последовательности сжимающихся сеток. В [12]–[15] указанным способом было показано, что различные типы NFC-схем имеют не более чем первый порядок локальной сходимости в областях влияния ударных волн и, тем самым, по существу схемами повышенной точности не являются. Такое снижение порядков сходимости свидетельствует о том, что в этих схемах происходит потеря точности при передаче условий Гюгонио через размазанные фронты ударных волн. Однако свидетельствует опосредованно.

Для непосредственной оценки точности передачи схемой условий Гюгонио необходимо исследовать сходимость интегралов от разностного решения по областям, содержащим фронт ударной волны. Причем эти интегралы должны допускать потенциальную возможность получения повышенного (как минимум, второго) порядка сходимости для схем сквозного счета, в силу чего такая сходимость не может быть сильной, например, в нормах L_1 или L_2 . Связано это с тем, что в схемах сквозного счета в нескольких узлах в окрестности фронта ударной волны отсутствует локальная сходимость разностного решения к точному, и поэтому порядок сходимости разностного решения в сильной норме, содержащей линию разрыва, в принципе не может быть выше первого.

В этой связи в [16] для TVD-схемы Хартена из [3], в [17] для различных вариантов WENO-схемы из [7], в [18] для DG-метода Кокбурна из [8], в [19] для монотонной модификации схемы CABARET из [9], в [20] для CU-схемы из [5] и в [21] для MBiC-схемы из [11] точность передачи схемой условий Гюгонио через фронт ударной волны оценивается путем определения порядка сходимости интеграла от разностного решения, что соответствует сходимости в соответствующей негативной норме. В [16]–[21] показано, что в рассмотренных NFC-схемах такой порядок интегральной сходимости снижается до первого на интервалах интегрирования, одна или обе границы которых находятся в области влияния ударной волны. Одна из причин такого снижения точности заключается в том, что коррекция потоков, характерная для этих схем, приводит к снижению гладкости разностных потоков, что в свою очередь приводит к снижению порядка аппроксимации ε -условий Гюгонио на фронтах ударных волн (см. [22]). В то же время, как показано в [15], [16], некоторые немонотонные схемы повышенной точности (в частности, схема Русанова из [23] и компактная схема из [15]), имеющие аналитические функции численных потоков и, как следствие, с повышенной точностью аппроксимирующие ε -условия Гюгонио, сохраняют повышенный порядок сходимости в негативной норме при интегрировании по областям, содержащим сильные разрывы. Эти немонотонные схемы, в отличие от NFC-схем, сохраняют повышенный порядок сходимости в областях влияния ударных волн, несмотря на заметные схемные осцилляции на их фронтах. Далее для таких немонотонных схем повышенной точности мы будем использовать аббревиатуру HASIA (High Accuracy Shock Influence Area).

В результате в теории численных схем сквозного счета сложилась следующая альтернатива: невозможно одновременно с высокой точностью локализовать сильные разрывы и сохранить

повышенный порядок сходимости в областях их влияния. При этом на практике NFC-схемы (особенно схемы WENO и DG) широко применяются при численном моделировании сложных газо- и гидродинамических течений с большим числом ударных волн различной амплитуды, в силу чего все такие расчеты имеют лишь первый порядок точности. Первая попытка решения этой проблемы была связана с применением методики построения гибридных схем (см. [24]–[28]), при которой на каждом временном слое численное решение сначала строится с помощью внешней немонотонной HASIA-схемы, имеющей заметные осцилляции на ударной волне. После этого в окрестности фронта ударной волны численное решение стандартным образом корректируется с помощью одной из NFC-схем, и на новом временном слое получается монотонизированное численное решение без заметных нефизических осцилляций. Однако тестовые расчеты показали, что в построенной таким образом гибридной схеме теряется основное преимущество внешней HASIA-схемы – ее повышенная точность в областях влияния ударных волн; эта точность снижается приблизительно так же, как и в стандартных NFC-схемах.

Данный недостаток как NFC-схем, так и гибридных схем, непосредственно связан с их главным преимуществом – монотонной локализацией фронтов ударных волн, поскольку любая конечная сумма ряда Фурье для разрывной функции не является монотонной. С учетом этого осцилляции, возникающие на фронтах ударных волн в немонотонных HASIA-схемах, несут информацию о волновой структуре фурье-разложения разрывной функции в окрестности сильного разрыва, что позволяет этим схемам с повышенной точностью передавать условия Гюго и, как следствие, сохранять повышенную точность в областях влияния ударных волн. NFC-схемы и гибридные схемы в результате искусственного сглаживания численных ударных волн эту информацию теряют, что приводит к снижению их точности при аппроксимации условий Гюго.

В [29] была предложена методика построения принципиально нового класса численных методов сквозного счета (получивших название комбинированные схемы), которые сочетают достоинства как NFC-схем, так и немонотонных HASIA-схем, а именно, монотонно локализируют фронты ударных волн и одновременно сохраняют повышенную точность в областях их влияния. В комбинированной схеме применяется базисная немонотонная HASIA-схема, по которой разностное решение строится во всей расчетной области. В окрестностях больших градиентов, где это решение имеет нефизические осцилляции, оно корректируется путем численного решения внутренних начально-краевых задач по одной из NFC-схем. Причем внутренняя NFC-схема (в отличие от случая гибридных схем) не влияет на решение, получаемое по базисной схеме, что позволяет комбинированной схеме сохранять повышенную точность в областях влияния ударных волн. В [29] была рассмотрена комбинированная схема, в которой в качестве базисной HASIA-схемы использовалась компактная схема третьего порядка слабой аппроксимации (см. [15]), а в качестве внутренней NFC-схемы – монотонная модификация схемы CABARET (см. [9]) второго порядка точности на гладких решениях. Далее для компактной схемы из [15] будем использовать аббревиатуру CWA (Compact Weak Approximation), а для схемы CABARET, предложенной в [30], будем применять аббревиатуру CABARETM.

Недостаток комбинированной схемы, построенной в [29], заключался в том, что соответствующие ей базисная и внутренняя схемы имели существенно различные типы: базисная CWA-схема являлась неявной и трехслойной по времени, в то время как внутренняя схема CABARETM – явной и двухслойной по времени, что приводило к определенным сложностям при численной реализации такого алгоритма. Поэтому в [31] был предложен новый вариант комбинированной разностной схемы, в которой как немонотонная базисная HASIA-схема, так и внутренняя NFC-схема являлись явными и двухслойными по времени. А именно, в качестве базисной была использована схема Русанова третьего порядка (см. [23]), а в качестве внутренней – схема CABARETM второго порядка (см. [30]). В [29] и [31] приведены тестовые расчеты разрывных решений с ударными волнами, демонстрирующие существенные преимущества построенных в них комбинированных разностных схем по сравнению со схемой WENO5 из [7] пятого порядка по пространству и третьего порядка по времени.

Следующий этап в развитии теории комбинированных схем был связан с разработкой согласованных численных алгоритмов, в которых базисная и внутренняя схемы являются схемами одного класса, а именно, внутренняя схема получается из базисной схемы в результате применения соответствующей NFC-процедуры. В [32] такая комбинированная схема была построена на основе DG-метода из [8], при этом в качестве базисной схемы использовался немонотонный вариант DG-метода третьего порядка без применения NFC-процедуры, а в качестве внутренней схемы использовался монотонный вариант этого метода, в котором коррекция потоков осуществ-

лялась с помощью ограничителя Кокбурна (см. [8]). Построенная комбинированная DG-схема показала существенные преимущества по сравнению со стандартной NFC-схемой DG-метода при расчете нестационарных ударных волн.

В [33] согласованная комбинированная схема была построена на основе бикompактных разностных схем. В качестве внутренней схемы применялась бикompактная схема четвертого порядка аппроксимации по пространству с интегрированием по времени неявным методом Эйлера. Эта схема устойчива при любых соотношениях шагов сетки и монотонна при числах Куранта, не меньших $1/4$. В отличие от работ [29], [31], [32] вычисления по внутренней схеме велись во всей пространственно-временной расчетной области. Решение базисной схемы определялось посредством глобальной (пассивной в терминологии [34]) экстраполяции Ричардсона второго порядка по решениям внутренней схемы, рассчитанным на двух вложенных сетках. Локальные немонотонности у решения базисной схемы устранялись с помощью процедуры, близкой по своей сути к гибридной схеме из [10]. Однако эта процедура имела характер пост-обработки, т.е. применялась лишь после завершения вычислений по базисной и внутренней схемам, а не при каждом переходе со слоя на слой. Комбинированная бикompактная схема из [33] продемонстрировала высокий порядок точности, который не достигается MViC-схемой (см. [11]).

В настоящей работе более детально излагаются теория комбинированных схем, методы их построения и результаты тестовых расчетов, демонстрирующие преимущества этого нового класса схем по сравнению со стандартными NFC-схемами. В разд. 2 описываются методы оценки точности схем сквозного счета, аппроксимирующих гиперболическую систему законов сохранения. В разд. 3 приводится основная тестовая задача для уравнений теории мелкой воды, в результате численного решения которой проводится сравнительный анализ точности изучаемых схем. В разд. 4 описываются численные алгоритмы разностных схем Русанова, CWA, CABARETM и WENO5, а в разд. 5 приводятся результаты расчетов по этим схемам основной тестовой задачи, из которых следует, что HASIA-схемы Русанова и CWA имеют существенно более высокую точность в областях влияния ударных волн, чем NFC-схемы CABARETM и WENO5. В разд. 6 излагается общая методика построения гибридных численных схем и изучаются две гибридные схемы, в которых в качестве базисной используется схема Русанова или CWA-схема, а в качестве внутренней применяется схема CABARETM. Тестовые расчеты показали, что в этих гибридных схемах теряется основное преимущество исходных HASIA-схем — повышенная точность в областях влияния ударных волн, которая становится сравнимой с точностью NFC-схем.

В разд. 7 описывается методика построения комбинированных схем, которые монотонно локализируют фронты ударных волн и одновременно сохраняют повышенную точность в областях их влияния. Построены и протестированы две комбинированные схемы, в которых базисной является схема Русанова или CWA-схема, а внутренней — схема CABARETM. В разд. 8 изучаются согласованные комбинированные схемы, в которых базисная и внутренняя схемы являются схемами одного класса, а именно, внутренняя схема получается из базисной HASIA-схемы в результате применения соответствующей NFC-процедуры. В п. 8.1 такая комбинированная схема построена на основе DG-метода из [8], а в п. 8.2 — на основе бикompактных разностных схем из [10]. В разд. 9 проведен сравнительный анализ точности комбинированных разностных схем, построенных в разд. 7, со схемой WENO5 при численном моделировании задачи о многократном взаимодействии ударных волн. В разд. 10 построена двумерная комбинированная бикompактная схема, которая при расчете пространственно двумерных разрывных решений обеспечивает второй порядок локальной сходимости в областях влияния ударных волн. В разд. 11 дается общая характеристика полученных результатов, приводится их сравнение с современным мировым уровнем данного научного направления и формулируются основные перспективные направления дальнейшего развития теории комбинированных схем.

2. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ СХЕМ СКВОЗНОГО СЧЕТА

Рассмотрим квазилинейную строго гиперболическую систему законов сохранения (см. [35], [36])

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = \mathbf{0}, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{u}(x, t)$ — искомая, а $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ — заданная гладкие вектор-функции, содержащие m компонент. Строгая гиперболическость системы (2.1) означает, что все собственные значения $\lambda_i(\mathbf{u})$ матрицы Якоби $A(\mathbf{u}) = \mathbf{f}'_u(\mathbf{u})$ действительны и различны, в силу чего соответствующие им системы левых

$\mathbf{l}^i(\mathbf{u})$ и правых $\mathbf{r}^i(\mathbf{u})$ собственных векторов матрицы $A(\mathbf{u})$ формируют базисы в пространстве \mathbb{R}^m . Поставим для системы (2.1) задачу Коши с периодическими начальными данными

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) = \mathbf{u}_0(x + X), \tag{2.2}$$

где $\mathbf{u}_0(x)$ – заданная гладкая вектор-функция, X – длина периода. Предположим, что задача (2.1), (2.2) имеет единственное слабое решение $\mathbf{u}(x, t)$, которое является ограниченным, и в котором в результате градиентных катастроф при $t > 0$ возникают ударные волны.

Явные численные схемы, аппроксимирующие задачу (2.1), (2.2), будем строить на равномерной прямоугольной сетке

$$S = \{(x_j, t_n) : x_j = jh, t_n = n\tau, n \geq 0\}, \tag{2.3}$$

где $h = X/M$ – шаг сетки по пространству, M – заданное целое положительное число,

$$\tau = zh / \max_{k,j,n} |\lambda_k(\mathbf{v}_h(x_{j+\alpha}, t_n))| \tag{2.4}$$

есть шаг сетки по времени, выбираемый из условия устойчивости Куранта, в котором $z \in (0, 1)$ – коэффициент запаса, $\mathbf{v}_h(x_{j+\alpha}, t_n)$ – численное решение в пространственном узле $x_{j+\alpha} = (j + \alpha)h$, где $\alpha = 0$ или $\alpha = 1/2$ в зависимости от вида конкретной разностной схемы. В случае проведения прикладных расчетов для экономии компьютерного времени более естественно использовать неравномерные по времени численные сетки

$$\bar{S} = \{(x_j, t_n) : x_j = jh, t_{n+1} = t_n + \tau_n, t_0 = 0\},$$

в которых шаг по времени τ_n определяется по формуле

$$\tau_n = zh / \max_{k,j} |\lambda_k(\mathbf{v}_h(x_{j+\alpha}, t_n))|.$$

Однако в настоящей работе, целью которой является экспериментальное изучение точности численных схем на последовательности сжимающихся сеток, более удобно применение равномерной численной сетки (2.3) с постоянным шагом по времени (2.4).

Для приближенной оценки порядков локальной сходимости численного решения \mathbf{v}_h , построенного на равномерной сетке (2.3), зафиксируем на этой сетке некоторый узел $(x_{j+\alpha}, t_n)$, где $n \geq 1$, и введем для него новое обозначение (\tilde{x}, \tilde{t}) , где $\tilde{x} = (j + \alpha)h$ и $\tilde{t} = n\tau > 0$. Рассмотрим последовательность сжимающихся сеток

$$S_i = \{(x_j^i, t_n^i) : x_j^i = jh_i, t_n^i = n\tau_i, n \geq 0\}, \quad i = 1, 2, \dots, \tag{2.5}$$

где $h_i = h/k^{i-1}$, $\tau_i = \tau/k^{i-1}$; k – целое положительное число, удовлетворяющее условию $k \geq 2$ при $\alpha = 0$ и условию $k = 3l \geq 3$, l – натуральное число, при $\alpha = 1/2$. Предположим, что на последовательности сеток (2.5), получаемых путем сжатия базисной сетки (2.3), численное решение \mathbf{v}_{h_i} в точке (\tilde{x}, \tilde{t}) сходится к точному решению \mathbf{u} с порядком r . Это означает, что в точке (\tilde{x}, \tilde{t}) с точностью $o(h_i^r)$ выполнено условие

$$\mathbf{v}_{h_i} - \mathbf{u} = \mathbf{B}h_i^r \Rightarrow |\mathbf{v}_{h_i} - \mathbf{u}| = |\mathbf{B}|h_i^r, \tag{2.6}$$

где \mathbf{B} – векторная величина, не зависящая от h_i и такая, что $|\mathbf{B}| > 0$. Беря отношение вторых равенств (2.6) при $i = 1, 2$, имеем

$$\frac{|\mathbf{v}_{h_1} - \mathbf{u}|}{|\mathbf{v}_{h_2} - \mathbf{u}|} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^r = k^r.$$

Отсюда следует формула Рунге

$$r = r(\tilde{x}, \tilde{t}) = \log_k \frac{|\mathbf{v}_{h_1} - \mathbf{u}|}{|\mathbf{v}_{h_2} - \mathbf{u}|} = \log_{1/k} \frac{|\mathbf{v}_{h_2} - \mathbf{u}|}{|\mathbf{v}_{h_1} - \mathbf{u}|}, \tag{2.7}$$

которую можно применять для приближенного определения порядков локальной сходимости численного решения к точному.

В случае дискретных конечно-разностных и конечно-объемных схем, для которых численное решение определено в целых или в полуцелых пространственных узлах численной сетки (2.3), для приближенного определения порядков интегральной сходимости численного решения к точному зададим целое число $N \geq 2$ и момент времени $T = N\tau = N\tau_i k^{i-1} > 0$, для которого путем линейной или квадратичной (параболической) интерполяции доопределим дискретные численные решения $\mathbf{v}_{h_i}(x_{j+\alpha}^i, t_n^i)$ до непрерывных по x функций $\mathbf{v}_{h_i}(x, T)$. В случае проекционной схемы DG-метода [8] численное решение на сетке (2.5) строится как функция $\mathbf{v}_{h_i}(x, t_n^i)$, зависящая от непрерывно изменяющегося аргумента x , которая в пространственных узлах x_j^i в общем случае имеет сильные разрывы. Поэтому для DG-метода соответствующая функция $\mathbf{v}_{h_i}(x, T)$ непосредственно получается из самого численного решения.

Зафиксируем отрезок $[a, b]$ на оси x и зададим интегралы

$$\mathbf{U}(a, b, T) = \int_a^b \mathbf{u}(x, T) dx, \quad \mathbf{V}_{h_i}(a, b, T) = \int_a^b \mathbf{v}_{h_i}(x, T) dx,$$

где в случае дискретных схем интеграл \mathbf{V}_{h_i} вычисляется по формуле трапеций или формуле парабол в зависимости от способа интерполяции численного решения. Следуя [16], будем говорить, что последовательность численных решений $\mathbf{v}_{h_i}(x, T)$ сходится на отрезке $[a, b]$ с порядком ρ к точному решению $\mathbf{u}(x, T)$, если с точностью $o(h_i^\rho)$ выполнено условие

$$\mathbf{V}_{h_i}(a, b, T) - \mathbf{U}(a, b, T) = \mathbf{C}h_i^\rho, \quad (2.8)$$

где \mathbf{C} – векторная величина, не зависящая от h_i и такая, что $|\mathbf{C}| > 0$. При выполнении условия (2.8), по аналогии с (2.7), мы получаем следующую формулу

$$\rho = \rho(a, b, T) = \log_k \frac{|\mathbf{V}_{h_1}(a, b, T) - \mathbf{U}(a, b, T)|}{|\mathbf{V}_{h_2}(a, b, T) - \mathbf{U}(a, b, T)|} = \log_{1/k} \frac{|\mathbf{V}_{h_2}(a, b, T) - \mathbf{U}(a, b, T)|}{|\mathbf{V}_{h_1}(a, b, T) - \mathbf{U}(a, b, T)|} \quad (2.9)$$

для приближенного определения порядков интегральной сходимости численного решения к точному. Обоснование метода интегральной сходимости для исследования точности конечно-разностных схем сквозного счета было дано в [37].

Если интегралы $\mathbf{V}_{h_i}(t, a, b)$ в случае дискретных схем вычисляются по формуле трапеций (которая имеет второй порядок точности на гладких функциях), то порядок интегральной сходимости в общем случае удовлетворяет условию $\rho \leq 2$; если эти интегралы вычисляются по формуле парабол (которая имеет четвертый порядок точности на гладких функциях), то в общем случае $\rho \leq 4$. Для DG-метода указанное ограничение на порядок интегральной сходимости отсутствует и при расчете гладких решений этот порядок будет совпадать с формальным порядком аппроксимации DG-метода. При расчете разрывных решений порядок интегральной сходимости на отрезках $[a, b]$, содержащих ударные волны, может снижаться за счет потери точности при передаче схемой условий Гюгонио через размазанные фронты ударных волн.

Поскольку в рассматриваемых далее тестовых задачах Коши (2.1), (2.2) точное решение \mathbf{u} заранее неизвестно, то для приближенного вычисления порядков сходимости разностного решения мы не можем непосредственно воспользоваться формулами (2.7) и (2.9), которые зависят от этого точного решения. Это затруднение можно преодолеть двумя различными способами. При первом способе точное решение \mathbf{u} в формулах (2.7) и (2.9) заменяется на некоторое квазиточное численное решение \mathbf{v}_{h_*} , получаемое по одной из схем повышенной точности на равномерной сетке с пространственным шагом $h_* \ll h$, где h – пространственный шаг базисной сетки (2.3). При втором способе необходимо выполнить три численных расчета на сетках (2.5) с пространственными шагами $h_1 = h$, $h_2 = h/k$ и $h_3 = h/k^2$. Вычитая из первой формулы (2.6) эту же формулу, в которой индекс i заменен на $i + 1$, получаем

$$\mathbf{v}_{h_i} - \mathbf{v}_{h_{i+1}} = \mathbf{B}(h_i^r - h_{i+1}^r) \Rightarrow |\mathbf{v}_{h_i} - \mathbf{v}_{h_{i+1}}| = |\mathbf{B}|h_i^r(1 - k^{-r}). \quad (2.10)$$

Беря отношение вторых равенств (2.10) при $i = 1, 2$, имеем

$$\frac{|\mathbf{v}_{h_1} - \mathbf{v}_{h_2}|}{|\mathbf{v}_{h_2} - \mathbf{v}_{h_3}|} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^r = k^r. \tag{2.11}$$

Отсюда следует формула Рунге

$$r = r(\tilde{x}, \tilde{t}) = \log_k \frac{|\mathbf{v}_{h_1} - \mathbf{v}_{h_2}|}{|\mathbf{v}_{h_2} - \mathbf{v}_{h_3}|} = \log_{1/k} \frac{|\mathbf{v}_{h_2} - \mathbf{v}_{h_3}|}{|\mathbf{v}_{h_1} - \mathbf{v}_{h_2}|}, \tag{2.12}$$

не зависящая от точного решения \mathbf{u} . Аналогичным образом для приближенного определения порядка интегральной сходимости получаем формулу

$$\rho = \rho(a, b, T) = \log_k \frac{|\mathbf{V}_{h_1}(a, b, T) - \mathbf{V}_{h_2}(a, b, T)|}{|\mathbf{V}_{h_2}(a, b, T) - \mathbf{V}_{h_3}(a, b, T)|} = \log_{1/k} \frac{|\mathbf{V}_{h_2}(a, b, T) - \mathbf{V}_{h_3}(a, b, T)|}{|\mathbf{V}_{h_1}(a, b, T) - \mathbf{V}_{h_2}(a, b, T)|}. \tag{2.13}$$

Следует отметить, что первый способ вычисления порядков сходимости, использующий квазиточное численное решение, формально является более точным, но и существенно более трудоемким по сравнению со вторым способом, при котором применяются формулы (2.12) и (2.13). Поэтому в приводимых далее расчетах порядки сходимости в основном определяются с помощью второго способа, корректность которого предварительно проверяется путем сравнения на контрольных тестах с результатами, получаемыми на основе первого способа. Численные расчеты показывают (см. [12], [15]), что порядки локальной сходимости, вычисляемые по формуле (2.12), могут сильно осциллировать в областях влияния ударных волн, особенно у NFC-схем, что не позволяет с необходимой точностью определить значения этих порядков; в [15], [18], [19] для подавления таких осцилляций перед применением формулы (2.12) использовались различные методы локального осреднения получаемого разностного решения. Поэтому в данной работе мы в основном будем приводить порядки интегральной сходимости (2.13), позволяющие оценить точность, с которой численное решение аппроксимирует условия Гюгоню на фронте ударной волны.

Пусть $w = w(\mathbf{u})$ – гладкая скалярная функция векторного решения \mathbf{u} , точность вычисления которой необходимо оценить. Для этого так же, как при определении порядков сходимости численного решения, можно применять два различных способа. При использовании квазиточного численного решения \mathbf{v}_{h_k} сразу получается формула

$$\delta w_h = w(\mathbf{u}_h) - w(\mathbf{u}_{h_k}) \tag{2.14}$$

для дисбаланса (ошибки) вычисления функции w на базисной сетке (2.3). В случае применения второго способа, связанного с использованием формул (2.10)–(2.12), мы с учетом (2.6) предполагаем, что с точностью $o(h_i^r)$ выполнено условие

$$w_{h_i} - w = Dh_i^r \Rightarrow w_{h_i} - w_{h_{i+1}} = D(h_i^r - h_{i+1}^r) = Dh_i^r (1 - k^{-r}), \tag{2.15}$$

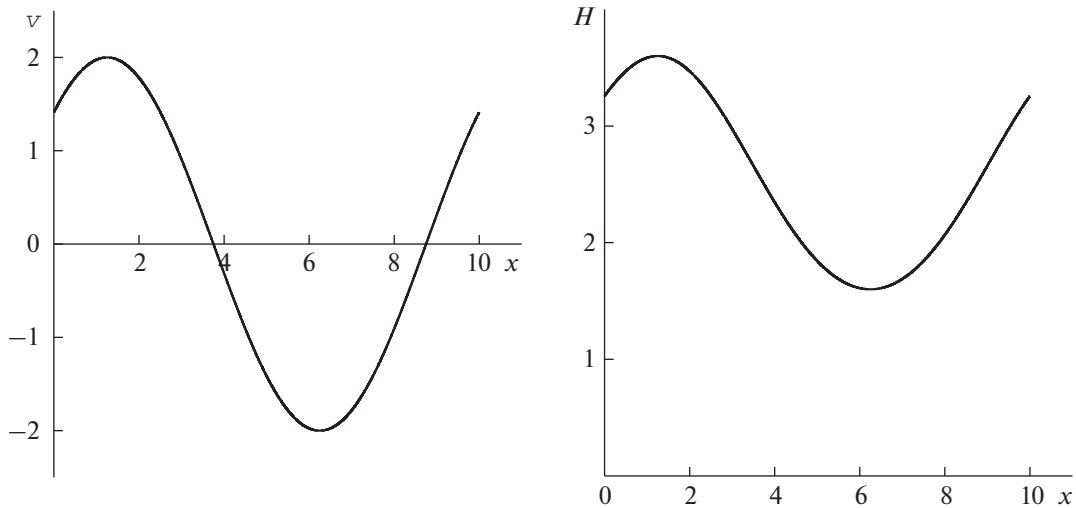
где $w_{h_i} = w(\mathbf{u}_{h_i})$ и D – скалярная величина, не зависящая от h_i . Из формул (2.15) при $i = 1$ имеем

$$D = \frac{w_{h_1} - w_{h_2}}{h_1^r (1 - k^{-r})} \Rightarrow w_{h_1} - w = \frac{w_{h_1} - w_{h_2}}{1 - k^{-r}}. \tag{2.16}$$

Подставляя во вторую формулу (2.16) выражение для порядка сходимости r , задаваемое уравнением (2.12), и учитывая, что $h = h_1$, получаем приближенную формулу

$$\delta w_h = w_h - w = (w_{h_1} - w_{h_2}) \left(1 - \frac{|\mathbf{v}_{h_2} - \mathbf{v}_{h_3}|}{|\mathbf{v}_{h_1} - \mathbf{v}_{h_2}|}\right)^{-1} \tag{2.17}$$

для дисбаланса вычисления функции w .



Фиг. 1. Начальные значения скорости жидкости v и глубины жидкости H , задаваемые формулами (3.2).

В приводимых далее тестовых расчетах применяются обе формулы (2.14) и (2.17). При этом на графиках мы будем показывать относительные дисбалансы вычисления функции w , определяемые по формуле

$$\Delta w_h = \lg \frac{|\delta w_h|}{|w_h|} = \lg \frac{|w_h - w|}{|w_h|}. \quad (2.18)$$

3. ОСНОВНАЯ ТЕСТОВАЯ ЗАДАЧА

В качестве конкретной гиперболической системы законов сохранения выберем систему уравнений первого приближения теории мелкой воды (см. [38]), дивергентная форма записи которой в случае прямоугольного горизонтального русла без учета влияния донного трения имеет вид (2.1), где

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} H \\ q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{H} + \frac{gH^2}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Здесь $H(x, t)$ и $q(x, t)$ – глубина и расход жидкости, g – ускорение свободного падения (в расчетах $g = 10$). Рассмотрим для системы (2.1), (3.1), задачу Коши (2.2) с начальными данными (фиг. 1)

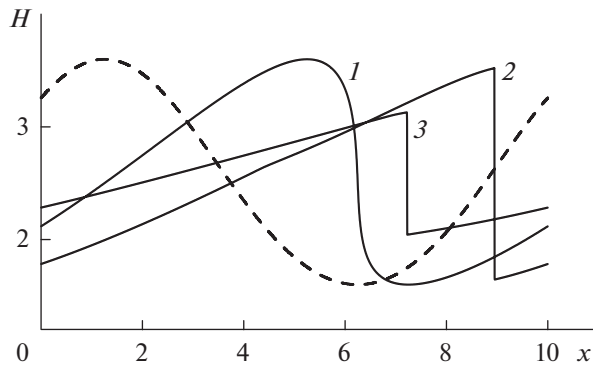
$$v(x, 0) = a \sin\left(\frac{2\pi x}{X} + \frac{\pi}{4}\right), \quad H(x, 0) = \frac{(v(x, 0) + b)^2}{4g} = \frac{1}{4g} \left[a \sin\left(\frac{2\pi x}{X} + \frac{\pi}{4}\right) + b \right]^2, \quad (3.2)$$

где $v = q/H$ – горизонтальная скорость жидкости, $a = 2$, $X = b = 10$. Начальным данным (3.2) соответствуют следующие начальные значения инвариантов $w_1 = v - 2c$ и $w_2 = v + 2c$:

$$w_1(x, 0) = -b, \quad w_2(x, 0) = 2v(x, 0) + b = 2a \sin\left(\frac{2\pi x}{X} + \frac{\pi}{4}\right) + b, \quad (3.3)$$

где $c = \sqrt{gH}$ – скорость распространения малых возмущений. Из формул (3.3) следует, что в начальный момент времени инвариант w_1 , соответствующий характеристическому направлению $\lambda_1 = v - c$, является постоянным, а инвариант w_2 , соответствующий характеристическому направлению $\lambda_2 = v + c$, является периодической функцией пространственной координаты.

В точном решении задачи (2.1), (3.1), (3.2) в момент времени $t \approx 0.54$ в результате градиентных катастроф формируется последовательность изолированных ударных волн, которые распространяются друг за другом с одинаковыми скоростями в положительном направлении оси x , в силу чего расстояние между соседними ударными волнами остается постоянным и равным длине пе-



Фиг. 2. Глубины жидкости H в квазиточном решении задачи Коши (2.1), (3.1), (3.2), получаемые в моменты времени $t = 0$ (штриховая линия), $t = 0.5$ (линия 1), $t = 1$ (линия 2) и $t = 2.5$ (линия 3).

риода X . На фиг. 2 на отрезке $[0, X]$ длины периода штриховой линией показана начальная глубина жидкости, задаваемая второй формулой (3.2), а сплошными линиями изображены квазиточные профили глубины, получаемые в результате численного расчета по схеме CABARETM из [30] на достаточно мелкой сетке в моменты времени $t = 0.5$, $t = 1$ и $t = 2.5$. К моменту времени $t = 0.5$ в точном решении начинают формироваться области больших градиентов, но решение еще остается гладким (линия 1 на фиг. 2). Ударные волны, которые в момент времени $t \approx 0.54$ возникают как сильные разрывы первоначально бесконечно малой амплитуды, в момент времени $t = 1$ имеют конечную амплитуду (линия 2 на фиг. 2), но область их влияния, расположенная внутри интервала $(4, 9) \subset [0, X]$, еще не заполняет всю расчетную область. К моменту времени $t = 2.5$ ударные волны проходят расстояние, большее длины периода X , и вся расчетная область становится их областью влияния. С учетом этого сильный разрыв, расположенный на линии 3 фиг. 2, соответствует ударной волне, которая сформировалась при $t \approx 0.54$ внутри интервала $[-X, 0]$.

4. ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ РУСАНОВА, CWA, CABARETM И WENO5

В данном разделе приводятся численные алгоритмы схем Русанова из [23], CWA из [15], CABARETM из [30] и WENO5 из [7], аппроксимирующих гиперболическую систему (2.1). Результаты тестовых расчетов по этим схемам задачи Коши (2.1), (3.1), (3.2), приведенные в следующем разд. 5, лежат в основе методики построения комбинированных схем. Отметим, что в схемах Русанова, CWA и WENO5 численные решения определяются в целых пространственных узлах $x_j = jh$ базисной сетки (2.3), в силу чего, наряду с \mathbf{v}_h , мы будем использовать для них сокращенные обозначения $\mathbf{v}_j^n = \mathbf{v}_h(x_j, t_n)$.

4.1. Схема Русанова

Исторически схема Русанова была первой явной разностной схемой третьего порядка, в которой для аппроксимации по времени использовался соответствующий метод Рунге–Кутты (краткая информация об этой схеме опубликована в [23], ее детальный анализ проведен в [39]).

Если на n -м временном слое известно численное решение \mathbf{v}_j^n , то в схеме Русанова на $(n + 1)$ -м временном слое решение \mathbf{v}_j^{n+1} определяется по формулам

$$\mathbf{v}_{j+1/2}^{(1)} = \frac{\mathbf{v}_j^n + \mathbf{v}_{j+1}^n}{2} - \frac{R(\mathbf{f}_{j+1}^n - \mathbf{f}_j^n)}{3}, \quad \mathbf{v}_j^{(2)} = \mathbf{v}_j^n - \frac{2R(\mathbf{f}_{j+1/2}^{(1)} - \mathbf{f}_{j-1/2}^{(1)})}{3}, \tag{4.1}$$

$$\mathbf{v}_j^{n+1} = \mathbf{v}_j^n - \frac{R(7(\mathbf{f}_{j+1}^n - \mathbf{f}_{j-1}^n) - 2(\mathbf{f}_{j+2}^n - \mathbf{f}_{j-2}^n))}{24} - \frac{3R(\mathbf{f}_{j+1}^{(2)} - \mathbf{f}_{j-1}^{(2)})}{8} - \frac{C\mathbf{w}_j^n}{24}, \tag{4.2}$$

в которых $R = \tau/h$, $\mathbf{f}_j^n = \mathbf{f}(\mathbf{v}_j^n)$, $\mathbf{f}_{j\pm 1/2}^{(1)} = \mathbf{f}(\mathbf{v}_{j\pm 1/2}^{(1)})$, $\mathbf{f}_{j\pm 1}^{(2)} = \mathbf{f}(\mathbf{v}_{j\pm 1}^{(2)})$;

$$\mathbf{w}_j^n = \mathbf{v}_{j+2}^n - 4\mathbf{v}_{j+1}^n + 6\mathbf{v}_j^n - 4\mathbf{v}_{j-1}^n + \mathbf{v}_{j-2}^n \quad (4.3)$$

есть искусственная вязкость четвертого порядка дивергентности, аппроксимирующая четвертую пространственную производную $h^4 \mathbf{u}_{xxxx}$, где $Ch^3/(24r)$ – коэффициент вязкости.

Поскольку схему Русанова (4.1)–(4.3) можно представить в виде явной двухслойной по времени разностной схемы с аналитической вектор-функцией численных потоков, то она удовлетворяет основной теореме работы [22], в силу которой ее порядок точности на гладких решениях совпадает с порядком аппроксимации этой схемой ε -условий Гюгоню, что обеспечивает повышенную точность при передаче этих условий через размазанные фронты ударных волн. При $C = 0$ схема (4.1)–(4.3) имеет порядок аппроксимации $O(h^4 + \tau^3)$. Однако в этом случае она является неустойчивой в линейном приближении (см. [23], [39]); для ее устойчивости необходимо, чтобы коэффициент C был положителен и удовлетворял неравенствам

$$3 \geq C \geq z^2(4 - z^2),$$

что приводит к третьему порядку схемы Русанова как по времени, так и по пространству. Тестовые расчеты разрывных решений уравнений газовой динамики проводились при близких значениях $C = 2.5$ в [23] и $C = 2.8$ в [39]. В настоящей работе мы будем использовать значение $C = 2.5$.

4.2. Компактная схема третьего порядка слабой аппроксимации (CWA-схема)

При построении практически всех реально используемых численных схем сквозного счета, как немонотонных (см. [23], [40], [41]), так и NFC-схем (см. [2]–[10]), повышенный порядок аппроксимации понимается в смысле тейлоровского разложения на гладких решениях, что не гарантирует аналогичного повышения точности при расчете обобщенных решений, поскольку классическое понятие аппроксимации становится неопределенным в окрестностях сильных разрывов. В то же время именно аппроксимацией в окрестности ударной волны определяется точность, с которой разностная схема передает условия Гюгоню через ее фронт. В связи с этим в [42] было введено понятие слабой численной аппроксимации гиперболической системы (2.1) на классе кусочно-непрерывных ограниченных функций и получены необходимые и достаточные условия такой аппроксимации (в том числе с повышенным порядком); причем в число необходимых условий входит консервативность разностной схемы, эквивалентность различных определений которой изучалась в [43]. Однако эти условия приводят к достаточно жестким ограничениям на вид численной схемы (для k -го порядка слабой аппроксимации необходимо, чтобы схема имела не менее k временных слоев). Причина этого заключается в том, что в [42] аппроксимация изучалась не на слабых решениях, а на классе кусочно-непрерывных ограниченных функций и, тем самым, в ней речь, по существу, шла о слабой аппроксимации разностным оператором дивергентного дифференциального оператора, из которой следует соответствующая слабая аппроксимация схемой системы (2.1).

В то же время, поскольку большинство реально используемых схем сквозного счета (см. [2]–[10], [23], [40], [41]) являются явными и двухслойными по времени, в них повышение порядка достигается за счет использования дифференциальных следствий аппроксимируемой системы на ее гладких решениях, в силу чего аппроксимационные свойства этих схем на разрывных решениях требуют специального, более детального изучения. С этой целью в [44] на примере явных двухслойных по времени консервативных схем была проанализирована возможность использования дифференциальных и интегральных следствий законов сохранения для повышения порядка слабой аппроксимации на разрывных решениях. Было показано, что (в отличие от линейного случая) дифференциальные следствия квазилинейного закона сохранения (за счет которых происходит повышение порядка на гладких решениях) в общем случае не имеют интегральных аналогов и поэтому для нелинейных схем повышение порядка аппроксимации на гладких решениях в общем случае не приводят к аналогичному повышению порядка слабой аппроксимации на разрывных решениях. В [22], [45] была изучена точность, с которой явные двухслойные по времени консервативные схемы аппроксимируют (ε, δ) -условия Гюгоню, представляющие собой соотношения, связывающие значения точного разрывного решения в точках $(x(t) + \varepsilon, t - \delta)$ и $(x(t) - \varepsilon, t + \delta)$ по обе стороны от линии фронта $x = x(t)$ нестационарной ударной волны, для которой $x'(t) > 0$. В [22] показано, что при $\delta = 0$ на ударных волнах, линии фронтов которых являются достаточно гладкими, разностные схемы с достаточно гладкими функциями численных потоков аппроксимируют $(\varepsilon, 0)$ -условия (ε -условия) Гюгоню с тем же порядком, который они

имеют на гладких решениях. В [45] показано, что при $\delta \neq 0$ эти схемы аппроксимируют условия Гюгонио лишь с первым порядком, независимо от их точности на гладких решениях.

Одним из недостатков проведенного в [22], [44], [45] анализа является то, что в нем аппроксимация рассматривается на разрывных решениях аппроксимируемой системы (2.1), в силу чего никак не учитывается процесс численного размазывания фронтов ударных волн. В то же время характер такого размазывания может оказывать существенное влияние на точность передачи условий Гюгонио (см. [46]). Поэтому в [15] был применен другой подход, при котором слабая аппроксимация определяется не на разрывных решениях \mathbf{u} системы (2.1), а на сходящихся к ним численных решениях \mathbf{v}_h (этот подход естественным образом согласован с основной теоремой работы [40] о слабой сходимости численных решений консервативных разностных схем). Было показано, что среди явных двухслойных по времени численных схем отсутствуют схемы повышенного порядка слабой аппроксимации, а в симметричных по времени и пространству компактных разностных схемах (см. [47]–[50]) порядки классической и слабой аппроксимации совпадают. Однако в таких компактных схемах отсутствует внутренний диссипативный механизм, и в случае аппроксимации гиперболической системы (2.1) они становятся неустойчивыми при расчете ударных волн. Поэтому для расчета разрывных решений уравнений Эйлера или резко меняющихся решений уравнений Навье–Стокса симметричную компактную схему модифицируют, вводя несимметричные компактные аппроксимации третьего порядка (см. [50]) или добавляя специальную искусственную вязкость первого порядка дивергентности (см. [49]). К сожалению, оба эти способа стабилизации симметричной компактной схемы приводят к потере основного ее достоинства – повышенного порядка слабой аппроксимации.

С учетом этого в [15], [51] был применен другой подход, при котором для обеспечения устойчивости симметричной компактной схемы в нее добавляется соответствующая искусственная вязкость повышенного порядка дивергентности. Простейшая из таких компактных схем (CWA-схема) получается из трехточечной по пространству и трехслойной по времени симметричной схемы четвертого порядка в результате добавления в нее искусственной вязкости четвертого порядка дивергентности, аналогичной (4.3). Операторная форма записи CWA-схемы (третьего порядка как классической, так и слабой аппроксимации) имеет вид (см. [15])

$$A_h \circ \Delta^\tau \circ \mathbf{v}_h + RA^\tau \circ \Delta_h \circ \mathbf{f}(\mathbf{v}_h) = C (\Delta_{h/2})^4 \circ T^{-\tau} \circ \mathbf{v}_h, \quad (4.4)$$

где

$$\Delta_h = T_h - T_{-h}, \quad \Delta^\tau = T^\tau - T^{-\tau}, \quad A_h = T_h + 4E + T_{-h}, \quad A^\tau = T^\tau + 4E + T^{-\tau}, \quad (4.5)$$

$$(\Delta_{h/2})^4 = (T_{h/2} - T_{-h/2})^4 = T_{2h} - 4T_h + 6E - 4T_{-h} + T_{-2h} \quad (4.6)$$

есть пространственный разностный оператор четвертого порядка дивергентности, $T_{jh}^{n\tau}$ – оператор сдвига, действие которого на каждую функцию $\mathbf{u}(x, t)$ определяется тождеством

$$T_{jh}^{n\tau} \circ \mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}(x + jh, t + n\tau), \quad (4.7)$$

с учетом которого $T_{jh}^0 = T_{jh}^0$, $T^{n\tau} = T_0^{n\tau}$, $E = T_0 = T^0 = T_0^0$; $C < 0$ – коэффициент вязкости. В настоящей работе мы будем использовать значение $C = -1/8$, при котором достигается максимальное подавление осцилляций на фронтах ударных волн.

Поскольку CWA-схема (4.4)–(4.7) является трехслойной по времени, то для получения численного решения задачи Коши (2.1), (2.2) на первом шаге по времени применяется явная схема МакКормака (см. [41]) второго порядка, что сохраняет третий порядок аппроксимации компактной схемы внутри расчетной области. Поскольку CWA-схема является неявной, то для нахождения ее численных решений на верхнем временном слое необходимо использовать трехточечные прогонки с итерациями по нелинейности. В случае аппроксимации системы законов сохранения теории мелкой воды (2.1), (3.1) эта процедура сводится (см. [15]) к двум скалярным прогонкам относительно глубины H и расхода q жидкости.

4.3. Схема CABARETM

Для численного решения гиперболических уравнений была предложена (см. [52]) трехслойная по времени и двухточечная по пространству схема Urwind Leapfrog, которая имеет второй порядок аппроксимации на гладких решениях, является явной и условно устойчивой при числах

Куранта $z \in (0, 1]$. Детальный анализ этой схемы при аппроксимации линейного уравнения переноса был проведен в [53], [54], где, с учетом кососимметричности своего пространственного шаблона, она была названа схемой Кабаре. Основные достоинства этой схемы связаны с тем, что она задана на компактном пространственном шаблоне, является обратимой по времени и точной при двух различных числах Куранта $z = 0.5, 1$, что наделяет ее уникальными диссипативными и дисперсионными свойствами (см. [54]). Для численного решения квазилинейных гиперболических систем законов сохранения (2.1) были разработаны NFC-варианты схемы КАБАРЕ (см. [55]), в которых нелинейная коррекция потоков проводится на основе принципа максимума (см. [36]); для данных схем в [9] была предложена аббревиатура SABARET. Различные варианты схемы SABARET эффективно применяются для численного моделирования различных прикладных задач математической физики, в частности, пространственно многомерных газодинамических течений (см. [56]), мезомасштабных течений в океане (см. [57]) и волновых течений мелкой воды над неровным дном (см. [58]).

Монотонность схемы SABARET при аппроксимации линейного уравнения переноса в одномерном случае изучалась в [59], [60], в двумерном случае – в [61]. Условия монотонности этой схемы при аппроксимации однородного квазилинейного скалярного закона сохранения с выпуклым потоком исследовались в [62], [63], с невыпуклым потоком – в [64]. Монотонность схемы SABARET, аппроксимирующей неоднородный скалярный закон сохранения, исследовалась в [65]. Монотонность модифицированной схемы SABARETM при аппроксимации гиперболической системы законов сохранения (2.1), допускающей вектор инвариантов $\mathbf{w} = W(\mathbf{u})$, изучалась в [30].

В схеме SABARETM наряду с потоковыми переменными $\mathbf{v}_j^n = \mathbf{v}_h(x_j, t_n)$, заданными в целых пространственных узлах базисной сетки (2.3), используются консервативные переменные $\mathbf{v}_{j+1/2}^n = \mathbf{v}_h(x_{j+1/2}, t_n)$, заданные в полужелтых пространственных узлах этой сетки. В схеме SABARETM по известным значениям \mathbf{v}_j^n и $\mathbf{v}_{j+1/2}^n$ определяются консервативные переменные

$$\mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1/2} = \mathbf{v}_{j+1/2}^n - \frac{R}{2}(\mathbf{f}_{j+1}^n - \mathbf{f}_j^n), \quad \mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1} = \mathbf{v}_{j+1/2}^n - R(\mathbf{f}_{j+1}^{n+1/2} - \mathbf{f}_j^{n+1/2}), \quad (4.8)$$

где $\mathbf{f}_j^n = \mathbf{f}(\mathbf{v}_j^n)$, $\mathbf{f}_j^{n+1/2} = \mathbf{f}(\mathbf{v}_j^{n+1/2})$, $\mathbf{v}_j^{n+1/2} = W^{-1}(\mathbf{w}_j^{n+1/2})$; W^{-1} – оператор, обратный к оператору W ; $\mathbf{w}_j^{n+1/2}$ – вектор численных инвариантов, каждая i -я компонента которого $(\mathbf{w}_i)_j^{n+1/2}$ вычисляется по i -м компонентам векторов инвариантов $\mathbf{w}_j^n = W(\mathbf{v}_j^n)$ и $\mathbf{w}_{j+1/2}^n = W(\mathbf{v}_{j+1/2}^n)$ с помощью формулы

$$(\mathbf{w}_i)_j^{n+1} = \Phi\left((\mathbf{w}_i)_{j-1}^n, (\mathbf{w}_i)_{j-1/2}^n, (\mathbf{w}_i)_j^n, (\mathbf{w}_i)_{j+1/2}^n, (\mathbf{w}_i)_{j+1}^n\right), \quad (4.9)$$

где Φ – функция, построение которой описано в [30].

После определения консервативных переменных $\mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1}$ находятся потоковые переменные \mathbf{w}_j^{n+1} и $\mathbf{v}_j^{n+1} = W^{-1}(\mathbf{w}_j^{n+1})$, где каждая i -я компонента $(\mathbf{w}_i)_j^{n+1}$ вектора инвариантов \mathbf{w}_j^{n+1} определяется по следующим формулам, при записи которых индекс i опущен:

$$\mathbf{w}_j^{n+1} = F(\tilde{\mathbf{w}}_j^{n+1}, m_j^{n+1}, M_j^{n+1}), \quad \tilde{\mathbf{w}}_j^{n+1} = 2\mathbf{w}_j^{n+1/2} - \mathbf{w}_j^n, \quad (4.10)$$

$$m_j^{n+1} = \min(\mathbf{w}_{j-1/2}^{n+1}, \mathbf{w}_{j+1/2}^{n+1}), \quad M_j^{n+1} = \max(\mathbf{w}_{j-1/2}^{n+1}, \mathbf{w}_{j+1/2}^{n+1}), \quad (4.11)$$

$$F(u, m, M) = \begin{cases} m, & u \leq m, \\ u, & m \leq u \leq M, \\ M, & u \geq M, \end{cases} \quad (4.12)$$

где $\mathbf{w}_{j\pm 1/2}^{n+1}$ суть i -е компоненты векторов инвариантов $\mathbf{w}_{j\pm 1/2}^{n+1} = W(\mathbf{v}_{j\pm 1/2}^{n+1})$.

Схема SABARETM (4.8)–(4.12) имеет второй порядок сходимости на гладких решениях. С учетом коррекции потоков, основанной на принципе максимума, эта схема с повышенной точностью локализует сильные разрывы, а с учетом дополнительной коррекции потоков (4.10)–(4.12) она сохраняет монотонность разностного решения относительно инвариантов линейного приближения аппроксимируемой системы (2.1).

4.4. Схема WENO5 третьего порядка по времени

WENO-схемы (см. [6], [7]) были построены в результате модификации ENO-схем из [4], которые, в свою очередь, были получены путем модификации TVD-схем из [3] с целью сохранения повышенной точности при аппроксимации локальных экстремумов в гладких частях рассчитываемых точных решений; при этом в схемах ENO и WENO свойство TVD при аппроксимации квазилинейного скалярного закона сохранения выполняется приближенно. Ключевая идея ENO-схем, связанная с выбором наиболее “гладкого” шаблона из нескольких кандидатов при аппроксимации потоков, в WENO-схемах видоизменяется следующим образом: используется выпуклая комбинация всех подходящих шаблонов, каждому из которых присваивается весовой коэффициент, определяющий его вклад в окончательную аппроксимацию численного потока.

Рассмотрим схему WENO5 третьего порядка по времени (см. [7]), при реализации которой используется глобальное расщепление потоков Лакса–Фридрикса. В этой схеме для аппроксимации по времени применяется метод Рунге–Кутты третьего порядка, в силу чего разностное решение \mathbf{v}_j^{n+1} определяется по известным значениям \mathbf{v}_j^n с помощью формул

$$\mathbf{v}_j^{(1)} = \mathbf{v}_j^n - RL[\mathbf{v}^n]_j, \quad \mathbf{v}_j^{(2)} = \frac{1}{4}(3\mathbf{v}_j^n + \mathbf{v}_j^{(1)} - RL[\mathbf{v}^{(1)}]_j), \quad \mathbf{v}_j^{n+1} = \frac{1}{3}(\mathbf{v}_j^n + 2\mathbf{v}_j^{(2)} - 2RL[\mathbf{v}^{(2)}]_j), \quad (4.13)$$

где оператор $L[\mathbf{v}]$ в каждом узле j вычисляется следующим образом:

$$L[\mathbf{v}]_j = \hat{\mathbf{f}}_{j+1/2} - \hat{\mathbf{f}}_{j-1/2}, \quad \hat{\mathbf{f}}_{j\pm 1/2} = \hat{\mathbf{f}}_{j\pm 1/2}^+ + \hat{\mathbf{f}}_{j\pm 1/2}^-. \quad (4.14)$$

Положительная часть $\hat{\mathbf{f}}_{j+1/2}^+$ численного потока в каждом узле j вычисляется по следующим формулам, при записи которых индекс “+” для краткости опускается:

$$\hat{\mathbf{f}}_{j+1/2} = \sum_{i=1}^m \tilde{f}_{j+1/2}^i \mathbf{r}^i(\mathbf{v}_{j+1/2}), \quad \tilde{f}_{j+1/2}^i = \sum_{k=0}^2 w_{kj}^i q_{kj}^i, \quad \mathbf{v}_{j+1/2} = \frac{\mathbf{v}_j + \mathbf{v}_{j+1}}{2}, \quad (4.15)$$

$$w_{kj}^i = w_k(f_{j-2}^i, f_{j-1}^i, f_j^i, f_{j+1}^i, f_{j+2}^i), \quad q_{kj}^i = q_k(f_{k+j-2}^i, f_{k+j-1}^i, f_{k+j}^i), \quad (4.16)$$

$$f_j^i = \mathbf{l}^i(\mathbf{v}_j)(\mathbf{f}(\mathbf{v}_j) + \gamma_i \mathbf{v}_j), \quad \gamma_i = \max |\lambda_i(\mathbf{v}_j)|, \quad (4.17)$$

где \mathbf{r}^i и \mathbf{l}^i – правый и левый собственные векторы матрицы Якоби системы (2.1), отвечающие собственному значению λ_i ,

$$w_k(f_{-2}, f_{-1}, f_0, f_1, f_2) = \frac{\alpha_k}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}, \quad \alpha_k = \frac{C_k}{(\varepsilon + \varphi_k)^2}, \quad (4.18)$$

$$C_0 = 1, \quad C_1 = 6, \quad C_2 = 3, \quad \varepsilon = 10^{-9},$$

$$\varphi_0 = a\psi_{-1}^2 + b(f_{-2} - 4f_{-1} + 3f_0)^2, \quad \varphi_1 = a\psi_0^2 + b(f_{-1} - f_{+1})^2, \quad \varphi_2 = a\psi_1^2 + b(3f_0 - 4f_1 + f_2)^2, \quad (4.19)$$

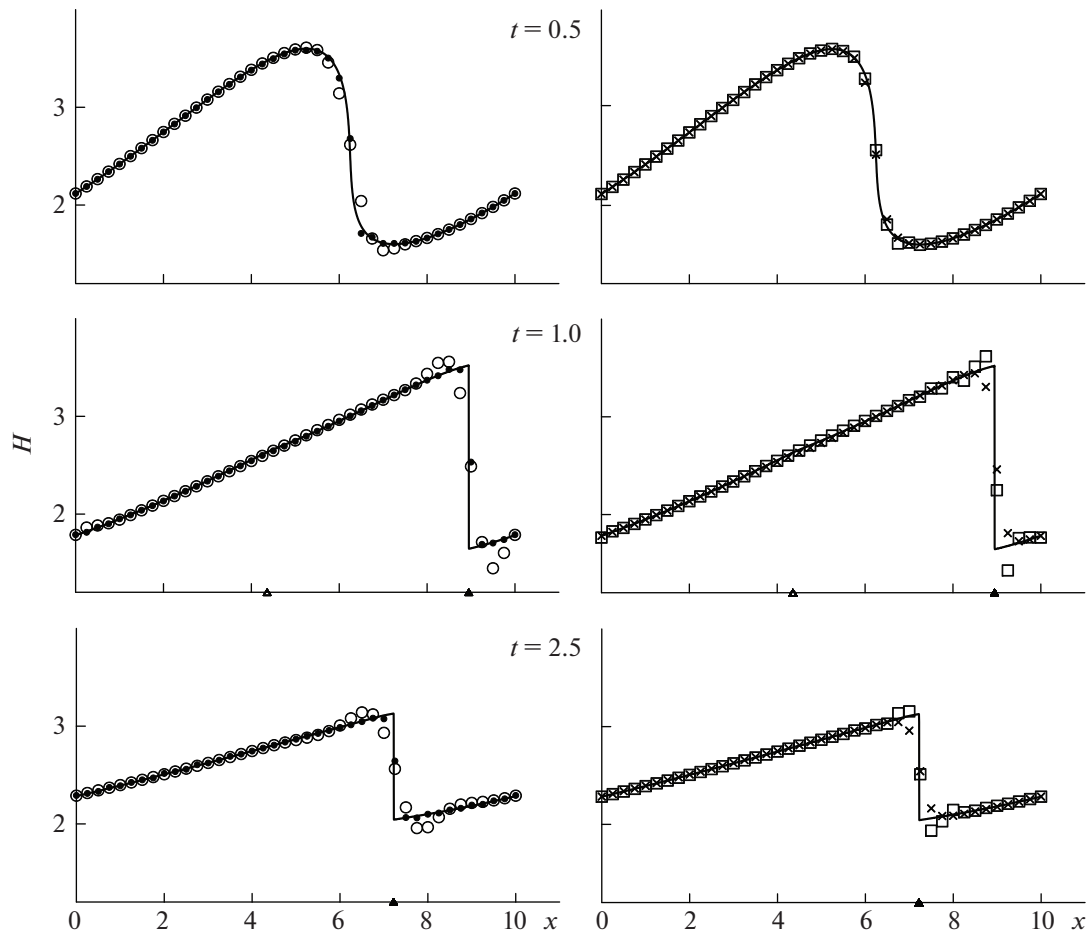
$$\psi_l = f_{l-1} - 2f_l + f_{l+1}, \quad q_k(f_0, f_1, f_2) = \frac{1}{6}(a_{k0}f_0 + a_{k1}f_1 + a_{k2}f_2), \quad (4.20)$$

$$a = 13/12, \quad b = 1/4, \quad a_{00} = a_{12} = a_{20} = 2, \quad a_{10} = a_{22} = -1, \quad (4.21)$$

$$a_{11} = a_{21} = 5, \quad a_{01} = -7, \quad a_{02} = 11.$$

Отрицательная часть $\hat{\mathbf{f}}_{j+1/2}^-$ численного потока, с учетом замены в первом равенстве (4.17) знака плюс на знак минус, вычисляется по формулам, которые симметричны формулам (4.15)–(4.21) относительно точки $x_{j+1/2} = (j + 1/2)h$.

В отличие от других классов NFC-схем, в которых для монотонизации разностного решения используются различные типы минимаксной коррекции потоков, в WENO-схемах такая коррекция достигается за счет введения весовых параметров (4.18), что позволяет сохранить повышенную гладкость функций численных потоков. В настоящее время WENO-схемы, особенно их современные модификации, широко применяются для численного моделирования различных прикладных задач газо- и гидродинамики.



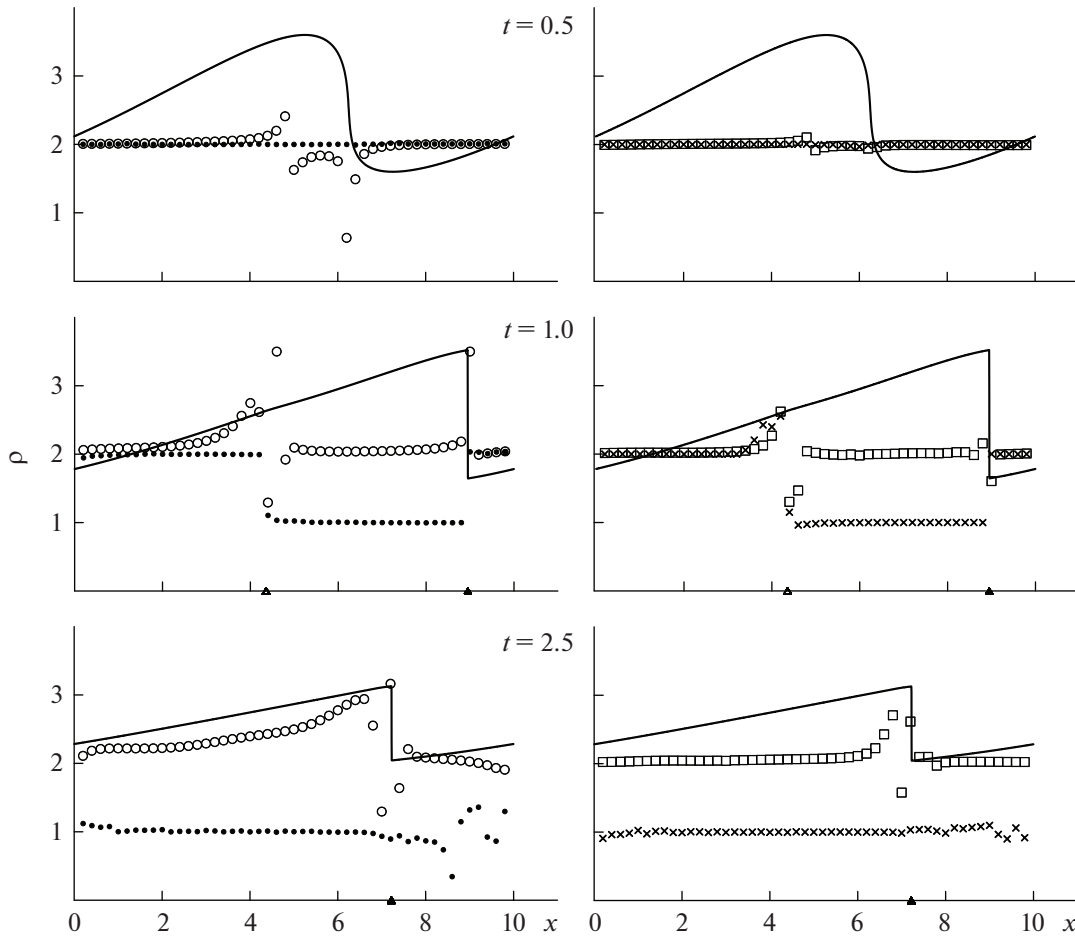
Фиг. 3. Глубины жидкости H , получаемые при численном решении задачи Коши (2.1), (3.1), (3.2) по схемам Русанова (кружки), CWA (квадратики), CABARETM (точки) и WENO5 (крестики). Сплошными линиями изображены квазиточные значения глубины.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ОСНОВНОЙ ТЕСТОВОЙ ЗАДАЧИ ПО СХЕМАМ РУСАНОВА, CWA, CABARETM И WENO5

В этом разделе на три момента времени $t = 0.5, 1, 2.5$ приведены результаты численных расчетов основной тестовой задачи (2.1), (3.1), (3.2) по схемам Русанова (4.1)–(4.3), CWA (4.4)–(4.7), CABARETM (4.8)–(4.12) и WENO5 (4.13)–(4.21), проведенные на равномерной сетке (2.3) с коэффициентом запаса $z = 0.45$, что обеспечивает выполнение условия устойчивости (2.4). На фиг. 3–6 результаты расчетов по схеме Русанова показаны кружками, по CWA-схеме – квадратиками, по схеме CABARETM – точками и по схеме WENO5 – крестиками.

На фиг. 3 приведены значения глубины жидкости, получаемые при численном расчете на сетке (2.3) с пространственным шагом $h = 0.25$. Сплошными линиями на этой фигуре изображены квазиточные профили глубины, получаемые в результате численного расчета по схеме CABARETM на достаточно мелкой сетке. Из фиг. 3 следует, что, в отличие от NFC-схем CABARETM и WENO5, схемы Русанова и CWA имеют заметные осцилляции в окрестностях ударных волн. Следует также отметить, что схема CABARETM заметно меньше размывает фронт ударной волны, чем схема WENO5 более высокого порядка аппроксимации.

На фиг. 4 показаны порядки интегральной сходимости $\rho(x_j, X, t)$, определяемые по формуле (2.13), в которой интегралы V_h вычисляются по формуле трапеций, а на фиг. 5 и 6 – относительные локальные дисбалансы $\Delta w_{ih}(x_j, t)$ вычисления инвариантов w_i , задаваемые формулами (2.17) и (2.18); причем в формуле (2.13) для схем Русанова, CWA и WENO5 параметр $k = 2$, а для схемы CABARETM параметр $k = 3$. Расчеты для фиг. 4–6 проводились на базисной сетке (2.3) с

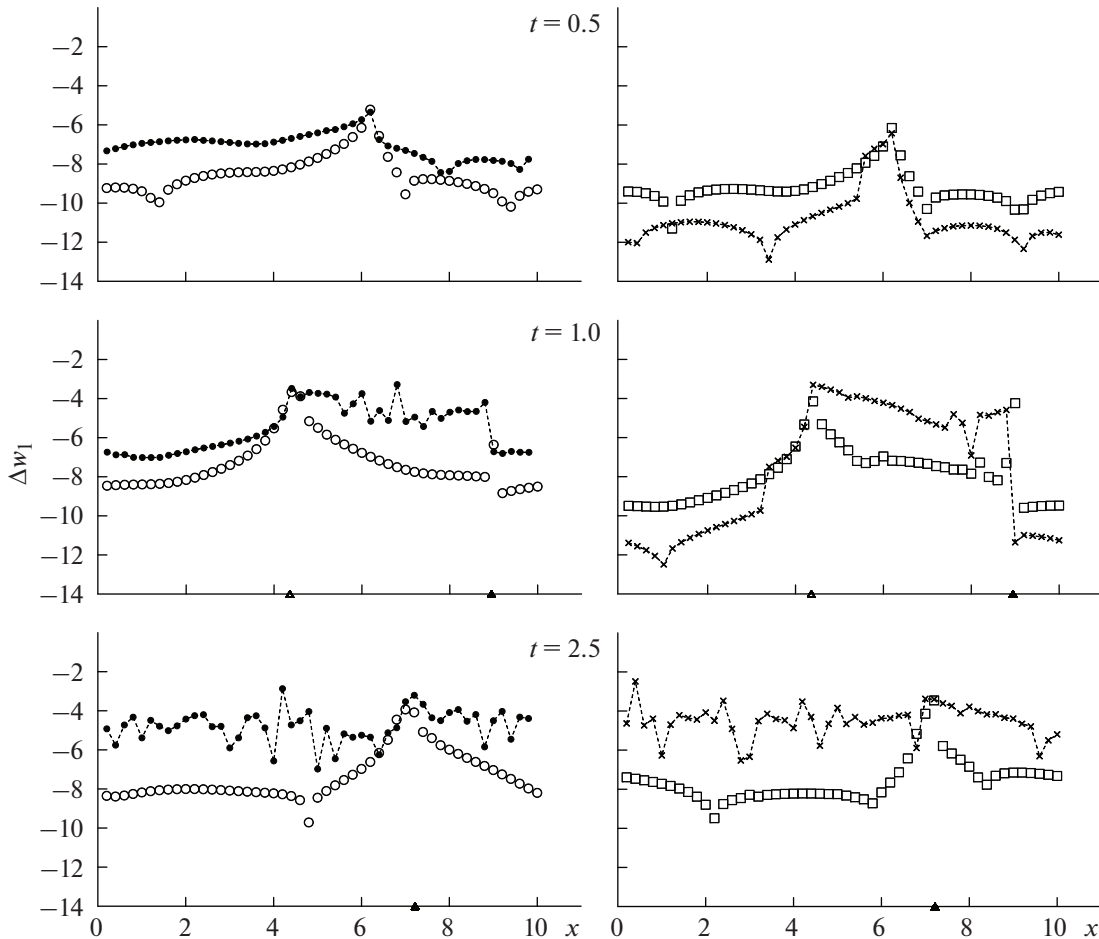


Фиг. 4. Порядки интегральной сходимости ρ , получаемые по схемам Русанова (кружки), CWA (квадратики), CABARETM (точки) и WENO5 (крестики). Сплошными линиями изображены квазиточные значения глубины.

пространственным шагом $h = 0.005$, что соответствует 2000 пространственным ячейкам сетки на отрезке $[0, X]$ длины периода; результаты этих расчетов показаны для каждого 40-го пространственного узла $j = 40i$ численной сетки. На фиг. 4–6 при $t = 1, 2.5$ темными треугольниками на оси x обозначены положения фронтов ударных волн, а при $t = 1$ светлым треугольником показана левая граница области влияния ударной волны.

Из фиг. 4 следует, что в момент времени $t = 0.5$, когда точное решение является гладким, и ударная волна еще не сформировалась, все схемы имеют приблизительно второй порядок интегральной сходимости ρ_j почти на всех отрезках $[x_j, X] \in [0, X]$. Заметные колебания порядков интегральной сходимости, получаемых по схеме Русанова в окрестности области больших градиентов точного решения, свидетельствуют о том, что эта схема более тонко реагирует на начальный этап формирования ударной волны. При $t = 1, 2.5$ из фиг. 4 следует, что в отличие от немонотонных HASIA-схем Русанова и CWA, обеспечивающих повышенный порядок интегральной сходимости, схемы CABARETM и WENO5 имеют приблизительно первый порядок интегральной сходимости на интервалах $[x_j, X]$, левая граница которых лежит в области влияния ударной волны. В момент времени $t = 2.5$, когда вся расчетная область становится областью влияния ударной волны, порядки интегральной сходимости NFC-схем CABARETM и WENO5 также снижаются приблизительно до первого порядка почти во всей расчетной области.

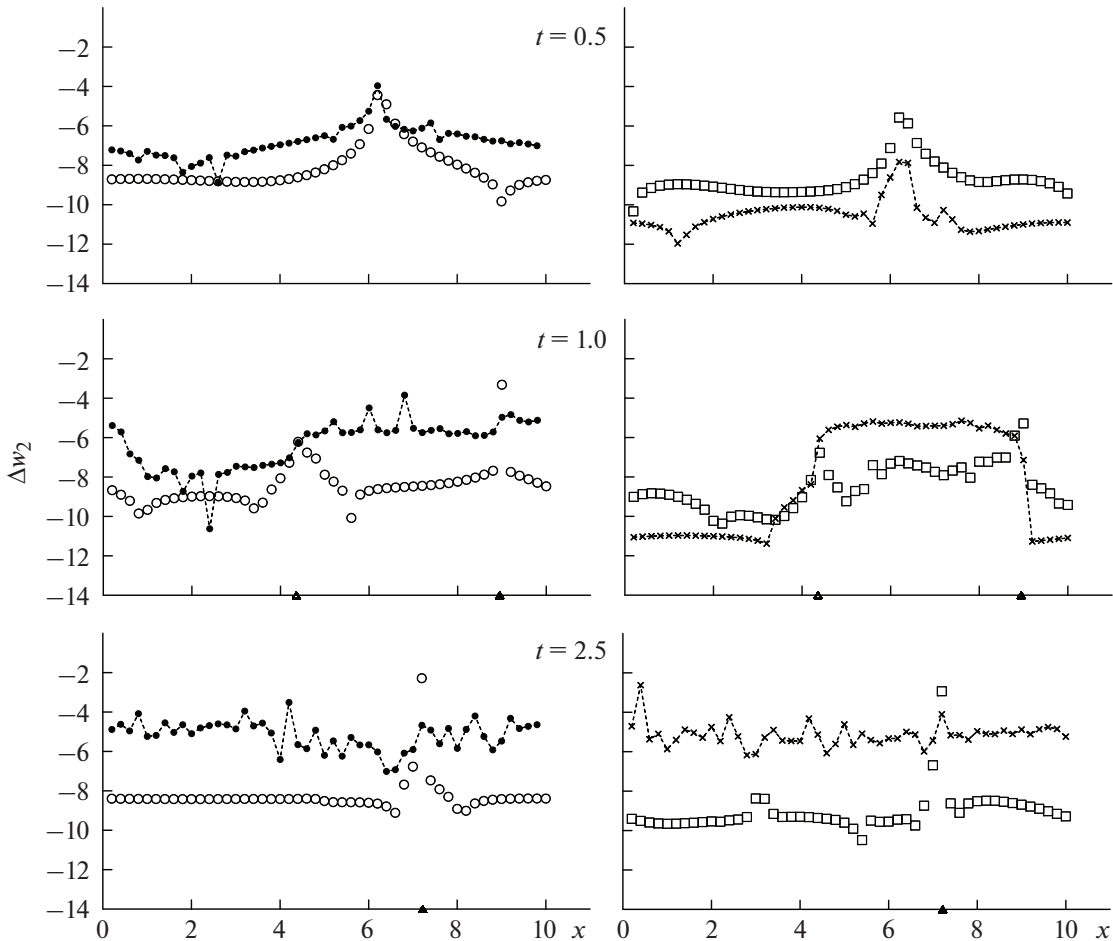
Из фиг. 5 и 6 следует, что вне области влияния ударной волны точность вычисления инвариантов во всех схемах является различной и согласуется с порядком их аппроксимации на гладких решениях. Однако в области влияния ударной волны, где порядок интегральной сходимости



Фиг. 5. Относительные локальные дисбалансы $\Delta w_l(x_j, t)$ вычисления инварианта $w_l = v - 2c$, получаемые по схемам Русанова (кружки), CWA (квадратики), SABARETM (точки) и WENO5 (крестики).

NFC-схем SABARETM и WENO5 снижается до первого, точность вычисления инвариантов по этим схемам резко падает, становится сравнимой и на несколько порядков меньшей, чем в HASIA-схемах Русанова и CWA, сохраняющих второй порядок интегральной сходимости. При этом значения функций $\Delta w_{lh}(x_j, t)$, получаемые по NFC-схемам, заметно осциллируют (у схемы SABARETM существенно больше, чем у схемы WENO5 формально более высокого порядка), что связано с мелкомасштабными колебаниями численного решения в областях влияния ударных волн, характерными для NFC-схем. Следует также отметить, что в момент времени $t = 1$, когда области влияния ударных волн еще не заполнили всю расчетную область, во всех схемах точность вычисления в этих областях инварианта $w_2 = v + 2c$, приходящего в них из гладких частей точного решения, существенно выше, чем инварианта $w_1 = v - 2c$, приходящего с фронта ударной волны и приносящего информацию о точности, с которой схема аппроксимирует условия Гюгонио. Причем максимальное снижение точности вычисления инварианта w_1 происходит не на правой границе области влияния, которая примыкает к фронту ударной волны, а в окрестности ее левой границы, где точное решение является достаточно гладким.

Из результатов численных расчетов, приведенных на фиг. 3–6, следует, что в теории численных схем сквозного счета сложилась следующая альтернатива: NFC-схемы, монотонно локализуя фронты ударных волн, теряют свою точность в областях их влияния, в то время как немонотонные HASIA-схемы, имеющие заметные нефизические осцилляции на фронтах ударных волн, в областях их влияния сохраняют повышенную точность.



Фиг. 6. Относительные локальные дисбалансы $\Delta w_{2h}(x_j, t)$ вычисления инварианта $w_2 = v + 2c$, получаемые по схемам Русанова (кружки), SWA (квадратики), CABARETM (точки) и WENO5 (крестики).

6. ГИБРИДНЫЕ СХЕМЫ

Первая попытка построения численных схем, которые монотонно локализуют фронты ударных волн и одновременно сохраняют повышенную точность в областях их влияния, была связана с применением методики построения гибридных схем (см. [24]–[28]), при которой на каждом временном слое численное решение сначала строится с помощью внешней немонотонной HASIA-схемы, имеющей заметные осцилляции на ударной волне. После этого в окрестности фронта ударной волны численное решение стандартным образом корректируется с помощью одной из NFC-схем, и на новом временном слое получается монотонизированное численное решение без заметных нефизических осцилляций. Опишем эту методику более детально при аппроксимации гибридной схемой задачи Коши (2.1), (2.2).

Предположим, что численное решение \mathbf{v}_j^n гибридной схемы, определяемое в целых узлах базисной сетки (2.3), известно на первых n временных слоях этой сетки. Численное решение \mathbf{v}_j^{n+1} на $(n + 1)$ -м временном слое находится следующим образом. По внешней немонотонной HASIA-схеме строится предварительное решение $\hat{\mathbf{v}}_j^{n+1}$ во всей однослойной расчетной области

$$S_{n+1} = \{(x_j, t_{n+1}) : x_j = jh, t_{n+1} = t_n + \tau\}$$

на $(n + 1)$ -м временном слое. После этого выделяется подобласть $S_{n+1}^* \subset S_{n+1}$ больших пространственных градиентов численного решения $\hat{\mathbf{v}}_j^{n+1}$, где это решение может иметь нефизические осцилляции. В этой подобласти, которая в общем случае является многосвязной, решение $\hat{\mathbf{v}}_j^{n+1}$ за-

меняется на численное решение $\tilde{\mathbf{v}}_j^{n+1}$ одношаговой по времени начально-краевой задачи, полученное по одной из NFC-схем на двухслойной сетке

$$S_{n,n+1}^* = \{(x_j, t_m): m = n, n+1, (x_j, t_{n+1}) \in S_{n+1}^*\}$$

с начальными условиями \mathbf{v}_j^n , заданными на множестве

$$S_n^* = \{(x_j, t_n): (x_j, t_{n+1}) \in S_{n+1}^*\}$$

и граничными условиями $\hat{\mathbf{v}}_j^{n+1}$ на границах области S_{n+1}^* . В результате решение \mathbf{v}_j^{n+1} гибридной схемы определяется по формуле

$$\mathbf{v}_j^{n+1} = \begin{cases} \hat{\mathbf{v}}_j^{n+1}, & (x_j, t_{n+1}) \in S_{n+1} \setminus S_{n+1}^*, \\ \tilde{\mathbf{v}}_j^{n+1}, & (x_j, t_{n+1}) \in S_{n+1}^*. \end{cases}$$

Из предыдущего раздела, в котором приведены результаты численного решения задачи Коши (2.1), (3.1), (3.2) для системы уравнений мелкой воды, следует, что схема CABARETM, имеющая компактный шаблон, с наибольшей точностью локализует фронты ударных волн (фиг. 3), в то время как HASIA-схемы Русанова и CWA, второго порядка интегральной сходимости (фиг. 4), имеют существенно более высокую точность в областях влияния ударных волн (фиг. 5, 6) по сравнению с NFC-схемами CABARETM и WENO5. С учетом этого возникает идея построения гибридных схем, в которых внешней схемой является одна из HASIA-схем Русанова или CWA, а в качестве внутренней NFC-схемы применяется схема CABARETM; далее для этих гибридных схем будем использовать аббревиатуры HR-схема (Hybrid Rusanov scheme) и HC-схема (Hybrid Compact scheme). В схемах HR и HC подобласть S_{n+1}^* , в которой применяется схема CABARETM, выделяется простейшим градиентным методом, предложенным в [29], [31]. В рамках этого метода

$$S_{n+1}^* = \{(x_j, t_{n+1}): j_n - m \leq j \leq j_n + m + 1\}, \quad (6.1)$$

где значения узлов j_n определяются из условия

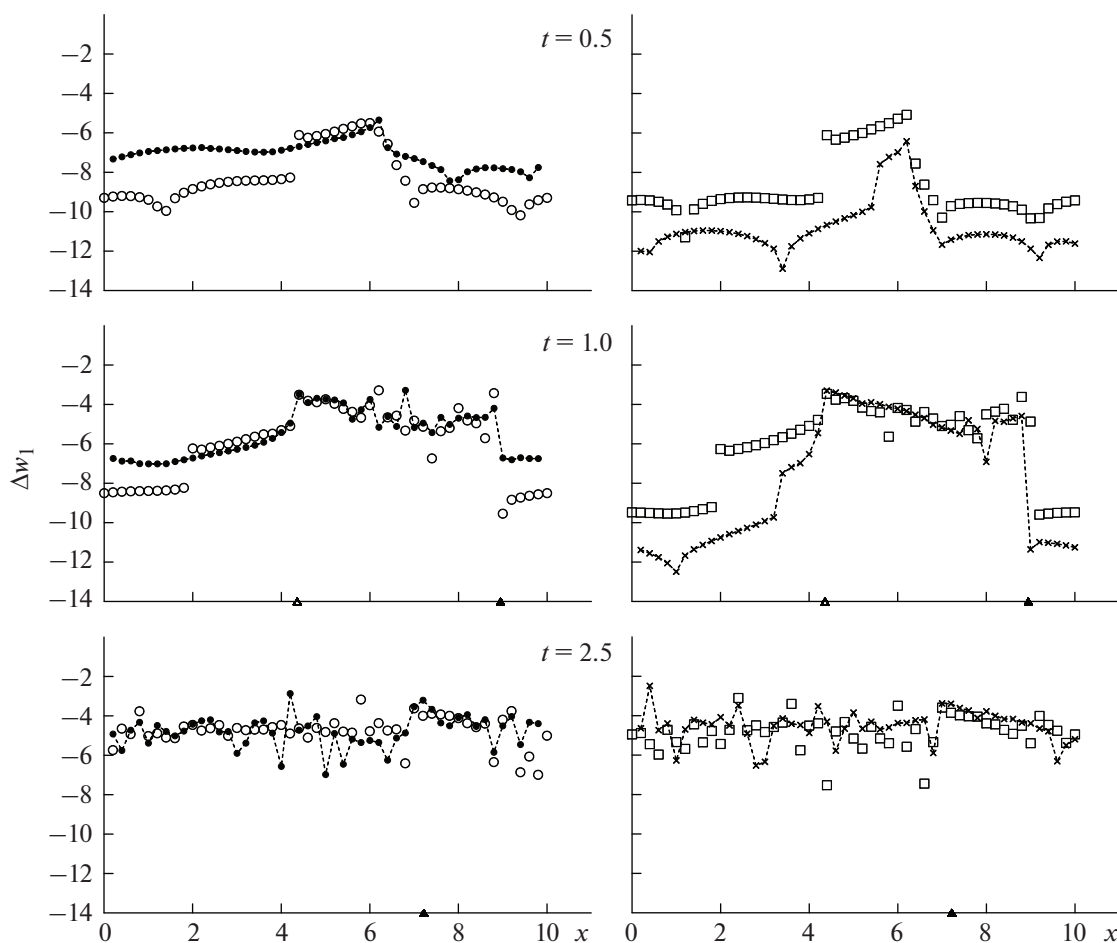
$$\left| \tilde{H}_{j_n+1/2}^{n+1} \right| = \max_j \left| \tilde{H}_{j+1/2}^{n+1} \right| \geq p, \quad \tilde{H}_{j+1/2}^{n+1} = \frac{H_{j+1}^{n+1} - H_j^{n+1}}{h}, \quad (6.2)$$

m и p – входные параметры; в приводимых далее расчетах $m = 6$ и $p = 1.5$.

На фиг. 7, 8 показаны относительные локальные дисбалансы $\Delta w_{ih}(x_j, t)$ вычисления инвариантов w_i , полученные при расчете основной тестовой задачи (2.1), (3.1), (3.2) по схемам HR, HC, CABARETM и WENO5 на равномерной сетке (2.3) с коэффициентом запаса $z = 0.45$. Эти дисбалансы определялись по формулам (2.17) и (2.18), в которых $h_i = h/k^{i-1}$, где $k = 3$ для схем HR, HC, CABARETM и $k = 2$ для схемы WENO5. Расчеты для фиг. 7, 8 проводились на базисной сетке (2.3) с пространственным шагом $h = 0.005$, и их результаты показаны для каждого 40-го пространственного узла $j = 40i$ численной сетки.

Из результатов расчетов, приведенных на фиг. 7, 8, следует, что гибридные схемы HR и HC теряют основное преимущество исходных HASIA-схем Русанова и CWA – повышенный порядок интегральной сходимости на интервалах $[x_j, X]$, левая граница которых лежит в области влияния ударной волны. Это приводит к снижению точности схем HR и HC в областях влияния ударных волн, которая становится сравнимой с точностью NFC-схем CABARETM и WENO5 и существенно более низкой, чем в схемах Русанова и CWA. Поскольку алгоритм гибридизации (6.1), (6.2) в схемах HR и HC начинает работать в момент времени $t \approx 0.3$, т.е. раньше, чем возникают ударные волны в точном решении, то снижение точности этих схем происходит в областях влияния больших градиентов численного решения, которые содержат внутри себя и заметно превосходят области влияния ударных волн.

Далее будет изложена методика построения принципиально новых численных методов сквозного счета (получивших название комбинированные схемы), которые сочетают достоинства как NFC-схем, так и HASIA-схем, а именно, монотонно локализируют фронты ударных волн и одновременно сохраняют повышенную точность в областях их влияния.

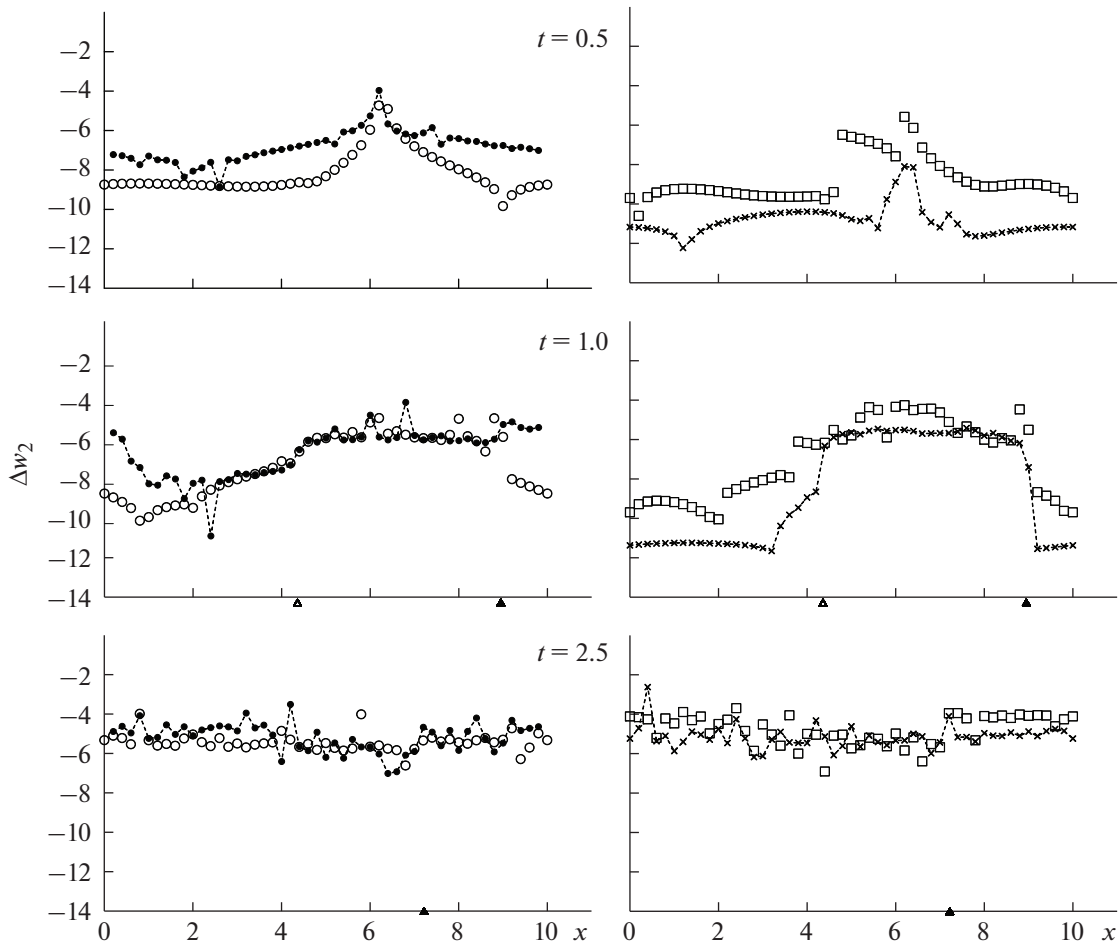


Фиг. 7. Относительные локальные дисбалансы $\Delta w_{1h}(x_j, t)$ вычисления инварианта $w_1 = v - 2c$, получаемые по схемам HR (кружки), NS (квадратики), SABARETM (точки) и WENO5 (крестики).

7. ПЕРВЫЕ КОМБИНИРОВАННЫЕ СХЕМЫ

Из результатов предыдущего раздела следует, что гибридные схемы, в которых в качестве внешней применяется одна из HASIA-схем, не сохраняют основного преимущества этих HASIA-схем — повышенную точность в областях влияния ударных волн. Данный недостаток как NFC-схем, так и гибридных схем, непосредственно связан с их главным преимуществом — монотонной локализацией фронтов ударных волн, поскольку любая конечная сумма ряда Фурье для разрывной функции не является монотонной. С учетом этого осцилляции, возникающие на фронтах ударных волн в немонотонных HASIA-схемах, несут информацию о волновой структуре фурье-разложения разрывной функции в окрестности сильного разрыва, что позволяет этим схемам с повышенной точностью передавать условия Гюгоню и, как следствие, сохранять повышенную точность в областях влияния ударных волн. NFC-схемы и гибридные схемы в результате искусственного сглаживания численных ударных волн эту информацию теряют, что приводит к снижению их точности при аппроксимации условий Гюгоню.

В [29], [31] была предложена методика построения комбинированных схем, которые сочетают достоинства как NFC-схем, так и немонотонных HASIA-схем, а именно, монотонно локализируют фронты ударных волн и одновременно сохраняют повышенную точность в областях их влияния. В комбинированной схеме применяется базисная немонотонная HASIA-схема, по которой численное решение \hat{v}_j^n задачи Коши (2.1), (2.2) строится во всей расчетной области S , задаваемой формулой (2.3). В подобласти $S^* \subset S$, где решение \hat{v}_j^n имеет большие градиенты, приводящие к нефизическим осцилляциям, оно корректируется путем построения численного решения \check{v}_j^n



Фиг. 8. Относительные локальные дисбалансы $\Delta w_{2h}(x_j, t)$ вычисления инварианта $w_2 = v + 2c$, получаемые по схемам HR (кружки), NS (квадратики), CABARETM (точки) и WENO5 (крестики).

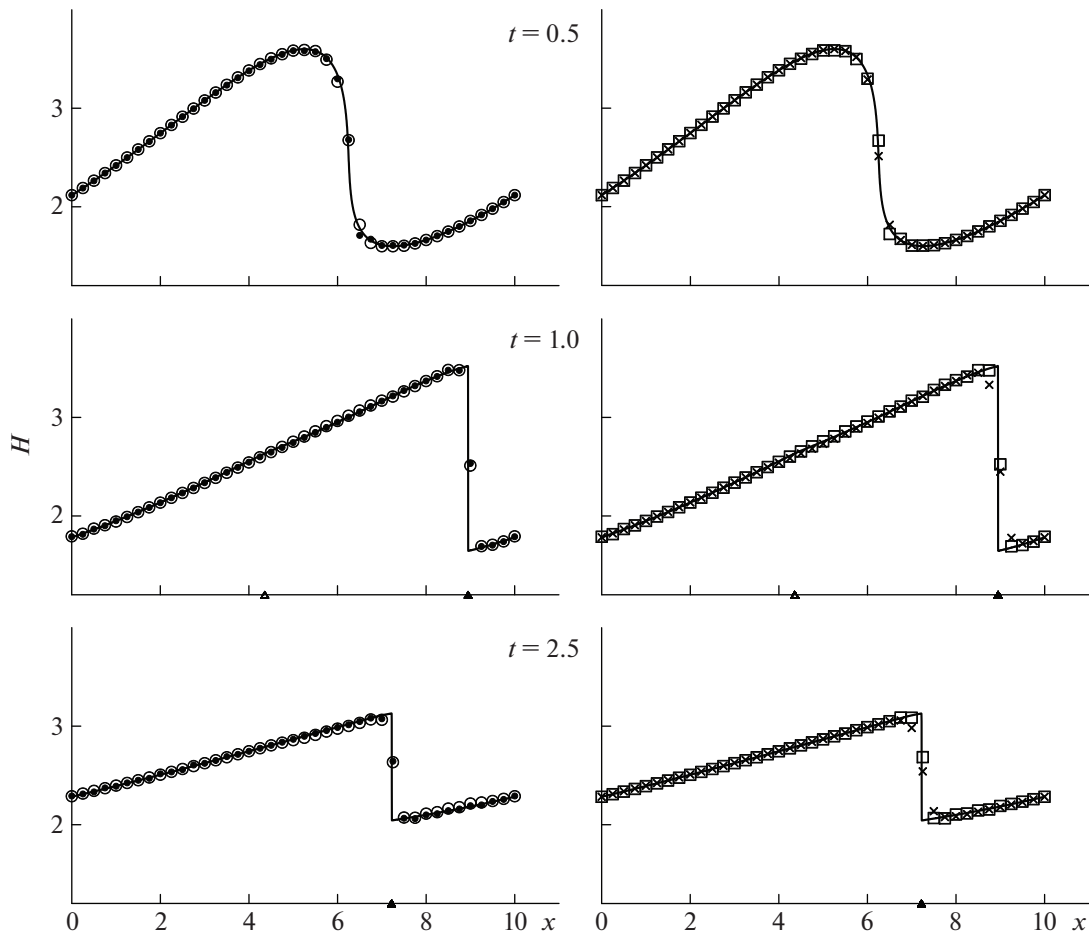
внутренней начально-краевой задачи по одной из NFC-схем с начальными и граничными условиями, получаемыми на границе области $S \setminus S^*$ из решения $\hat{\mathbf{v}}_j^n$. В результате решение комбинированной схемы в расчетной области (2.3) определяется по формуле

$$\mathbf{v}_j^n = \begin{cases} \hat{\mathbf{v}}_j^n, & (x_j, t_n) \in S \setminus S^*, \\ \tilde{\mathbf{v}}_j^n, & (x_j, t_{n+1}) \in S^*. \end{cases}$$

Принципиальное отличие комбинированной схемы от гибридной заключается в том, что внутренняя NFC-схема не влияет на решение, получаемое по базисной HASIA-схеме в области $S \setminus S^*$, что позволяет комбинированной схеме сохранять повышенную точность в областях влияния ударных волн. Далее для комбинированных схем, в которых базисной является схема Русанова или SWA-схема, а в качестве внутренней применяется схема CABARETM, будем использовать аббревиатуры CR-схема (Combined Rusanov scheme) и CCWA-схема (Combined Compact Weak Approximation scheme). При численном решении по комбинированным схемам CR и CCWA задачи Коши (2.1), (3.1), (3.2) для системы уравнений мелкой воды внутренняя область S^* , в которой применяется схема CABARETM, выделяется следующим образом:

$$S^* = \{(x_j, t_n) \in S : j_n - m \leq j \leq j_n + m + 1\}, \tag{7.1}$$

где значения узлов j_n определяются из условия (6.2); в приводимых далее расчетах $m = 6$ и $p = 1.5$.



Фиг. 9. Глубины жидкости H , получаемые при численном решении задачи Коши (2.1), (3.1), (3.2) по схемам CR (кружки), CCWA (квадратики), CABARETM (точки) и WENO5 (крестики). Сплошными линиями изображены квазиточные значения глубины.

На фиг. 9 приведены значения глубины жидкости, получаемые при численном расчете задачи Коши (2.1), (3.1), (3.2) по схемам CR (кружки), CCWA (квадратики), CABARETM (точки) и WENO5 (крестики) на сетке (2.3) с пространственным шагом $h = 0.25$. Из фиг. 9 следует, что в комбинированных схемах CR и CCWA эффективно подавляются нефизические осцилляции, присущие базисным HASIA-схемам Русанова и CWA на фронтах ударных волн (фиг. 3). Поскольку внутренней схемой для данных комбинированных схем является схема CABARETM, с высокой точностью локализирующая ударные волны, то схемы CR и CCWA (подобно схеме CABARETM) заметно меньше размазывают фронт ударной волны по сравнению со схемой WENO5 более высокого порядка аппроксимации. Так как внутренняя схема CABARETM не влияет на решения базисных схем Русанова и CWA в области $S \setminus S^*$, то комбинированные схемы CR и CCWA (в отличие от гибридных схем HR и HCWA) сохраняют повышенную точность вычисления инвариантов в областях влияния ударных волн, которая вне области (7.1) совпадает с точностью вычисления инвариантов по схемам Русанова и CWA (фиг. 5, 6), имеющих повышенный порядок интегральной сходимости (фиг. 4).

8. СОГЛАСОВАННЫЕ КОМБИНИРОВАННЫЕ СХЕМЫ

Основной недостаток комбинированных схем CR и CCWA, построенных в предыдущем разделе, заключается в том, что соответствующие им базисная и внутренняя схемы имеют существенно различный тип, что приводит к определенным сложностям при реализации численного алгоритма на границе внутренней расчетной области (7.1). Поэтому следующий этап в развитии теории комбинированных схем был связан с разработкой согласованных численных алгоритмов,

в которых базисная и внутренняя схемы являются схемами одного класса, а именно, внутренняя схема получается из базисной схемы в результате применения соответствующей NFC-процедуры. В [32] такая комбинированная схема была построена на основе DG-метода из [8], а в [33] – на основе бикомпактных разностных схем (см. [10]).

8.1. Комбинированная схема DG-метода

В отличие от описанных в разд. 4 конечно-разностных схем, DG-схема представляет собой (см. [8]) проекционно-разностный метод (проекционный по пространственной переменной x и разностный по временной переменной t), в котором численное решение ищется в виде кусочно-полиномиальной разрывной функции относительно пространственной переменной x . Впервые предложенный в [66] и детально изученный в [8], DG-метод в настоящее время активно развивается (см. [67]–[70]) и применяется для решения сложных многомасштабных задач математической физики (см. [71]–[75]). Одним из основных достоинств данного метода является компактность пространственного шаблона, что позволяет обеспечить повышенный порядок аппроксимации на многомерных неструктурированных сетках с произвольной формой ячеек (см. [71]–[77]). Для монотонизации численного решения в окрестностях сильных разрывов в DG-схемах применяются различные методы коррекции потоков (см. [68], [73], [76], [78], [79]); наиболее распространенными из них являются NFC-лимитеры (см. [8], [70], [76], [77], [80], [81]), которые, однако, могут приводить к снижению точности получаемого численного решения (см. [18]). При этом DG-метод показал (см. [82]) заметные преимущества по сравнению с MUSCL-схемами из [2] при численном расчете различных тестовых задач как на декартовых сетках, так и на неподвижных и движущихся сетках Вороного.

Поскольку применение DG-схемы для расчета многомерных прикладных задач требует выполнения большего числа достаточно громоздких вычислений, то эффективное использование этой схемы связано с применением всех возможностей современной вычислительной техники (см. [83], [84]), что диктует необходимость создания программных комплексов, достаточно легко адаптируемых для работы на различных (в том числе гибридных) параллельных компьютерных архитектурах. С учетом этого при решении DG-методом многомерных уравнений Навье–Стокса был разработан новый сеточно-операторный подход к программированию задач математической физики (см. [74]), позволяющий единообразно компактно записывать и эффективно вычислять сложные математические формулы на разных типах сеток и для различных вычислительных архитектур, в том числе для графических ускорителей CUDA (см. [84], [85]).

Далее в этом разделе приводятся результаты работы [32], в которой исследуется точность различных модификаций пространственно-одномерной DG-схемы, заданной на равномерной численной сетке (2.3). Рассмотрим сначала проекционно-дифференциальную форму записи DG-схемы (проекционную по x и дифференциальную по t), в рамках которой численное решение $\mathbf{v}_h(x, t)$ в каждой пространственной ячейке $[x_j, x_{j+1})$ сетки (2.3) представляет собой полином степени не выше p относительно переменной x :

$$\mathbf{v}_h(x, t) = \mathbf{v}_{hj}(x, t) = \sum_{i=0}^p \mathbf{v}_{ji}(t) \varphi_{hji}(x), \quad x \in [x_j, x_{j+1}), \quad (8.1)$$

где $\mathbf{v}_{ji}(t)$ – искомые вектор-функции,

$$\varphi_{hji}(x) = \left(\frac{x - x_{j+1/2}}{h} \right)^i \quad (8.2)$$

есть базисные многочлены. В приводимых далее формулах индекс h у функций \mathbf{v}_{hj} и φ_{hji} для краткости опускается.

При аппроксимации DG-схемой гиперболической системы (2.1) каждая функция $\mathbf{v}_j(x, t)$ удовлетворяет векторному дифференциальному уравнению (см. [8])

$$\frac{d}{dt} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathbf{v}_j \varphi_{jk} dx = \Psi_{jk}, \quad (8.3)$$

в котором

$$\Psi_{jk} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathbf{f}(\mathbf{v}_j) \varphi'_{jk} dx - \mathbf{F}_{j+1} \varphi_{jk}(x_{j+1}) + \mathbf{F}_j \varphi_{jk}(x_j), \tag{8.4}$$

где

$$\mathbf{F}_j = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{v}_{j-1}(x_j, t)) + \mathbf{f}(\mathbf{v}_j(x_j, t))}{2} - \frac{a_j (\mathbf{v}_j(x_j, t) - \mathbf{v}_{j-1}(x_j, t))}{2} \tag{8.5}$$

есть численные потоки, определяемые по формуле Русанова–Лакса–Фридрихса,

$$a_j = \max_m \max (|\lambda_m(\mathbf{v}_{j-1}(x_j, t))|, |\lambda_m(\mathbf{v}_j(x_j, t))|),$$

λ_m – собственные значения матрицы Якоби \mathbf{f}_u системы (2.1). С учетом формулы (8.1)

$$\frac{d}{dt} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathbf{v}_j \varphi_{jk} dx = \sum_{i=0}^p a_{ki}^j \frac{d\mathbf{v}_{ji}}{dt}, \quad a_{ki}^j = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_{jk} \varphi_{ji} dx,$$

где матрицы $A_j = (a_{ki}^j)$ являются невырожденными, векторное уравнение (8.3) эквивалентно следующей системе векторных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{v}_{ji}}{dt} = \sum_{k=0}^p b_{ik}^j \Psi_{jk}, \quad i = \overline{0, p}, \tag{8.6}$$

в которой $B_j = (b_{ik}^j)$ – матрица, обратная к A_j .

Следуя [32], мы будем рассматривать DG-метод (8.1)–(8.6), для которого $p = 1$, в силу чего численное решение (8.1) ищется в виде кусочно-линейной по x вектор-функции

$$\mathbf{v}_h(x, t) = \mathbf{v}_{j0}(t) + \frac{x - x_{j+1/2}}{h} \mathbf{v}_{j1}(t), \quad x \in [x_j, x_{j+1}]. \tag{8.7}$$

Для такого DG-метода будем использовать аббревиатуру DG1. Поскольку DG1-метод (8.1)–(8.7) имеет не менее, чем второй порядок точности на гладких решениях, и не принадлежит классу NFC-схем, то получаемое на его основе численное решение может иметь заметные нефизические осцилляции на фронтах ударных волн. Для подавления этих осцилляций применим ограничитель Кокбурна (см. [8]), который каждую компоненту v_{j1} векторной функции \mathbf{v}_{j1} , входящей в формулу (8.7), заменяет на величину

$$w_{j1} = M(v_{j1}, \alpha(v_{j+1,0} - v_{j0}), \alpha(v_{j0} - v_{j-1,0})), \tag{8.8}$$

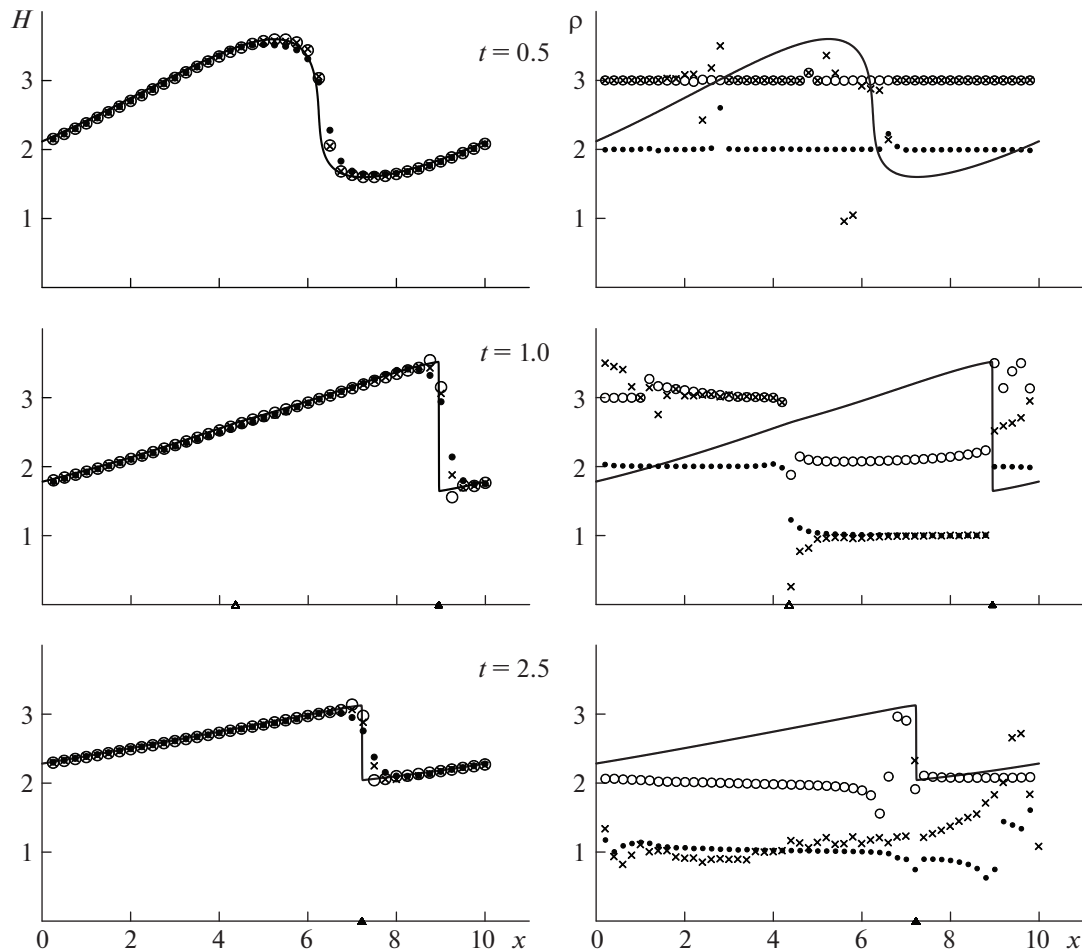
где $\alpha \in [1, 2]$ – эвристический параметр, v_{j0} – соответствующие компоненты векторов \mathbf{v}_{j0} ,

$$M(v_1, v_2, v_3) = s \min(|v_1|, |v_2|, |v_3|) \tag{8.9}$$

есть стандартный оператор $\min\text{mod}$, в котором $s = \text{sign}(v_i)$ при условии, что все числа v_i , входящие в соотношение (8.9), имеют одинаковый знак, и $s = 0$, если это условие не выполнено. Для DG1-методов, коррекция которых по формуле (8.8) происходит при параметрах $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$, будем использовать обозначения DG1A1 и DG1A2 соответственно.

Для DG-схемы (8.1)–(8.9) полудискретное численное решение $\mathbf{v}_h(x, n\tau)$ получается путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8.6) методом Рунге–Кутты третьего порядка по формулам, аналогичным (4.13). При этом тестовые расчеты показывают, что увеличение параметра α , входящего в оператор коррекции (8.8), приводит к уменьшению схемной вязкости, что может вызвать возникновение небольших осцилляций на фронтах ударных волн. В то же время уменьшение параметра α , связанное с увеличением схемной вязкости, будет приводить к более сильному размазыванию фронтов ударных волн. С учетом этого метод DG1A1 полностью подавляет численные осцилляции, возникающие на фронтах ударных волн в DG1-методе, в то время как метод DG1A2 подавляет эти осцилляции лишь частично.

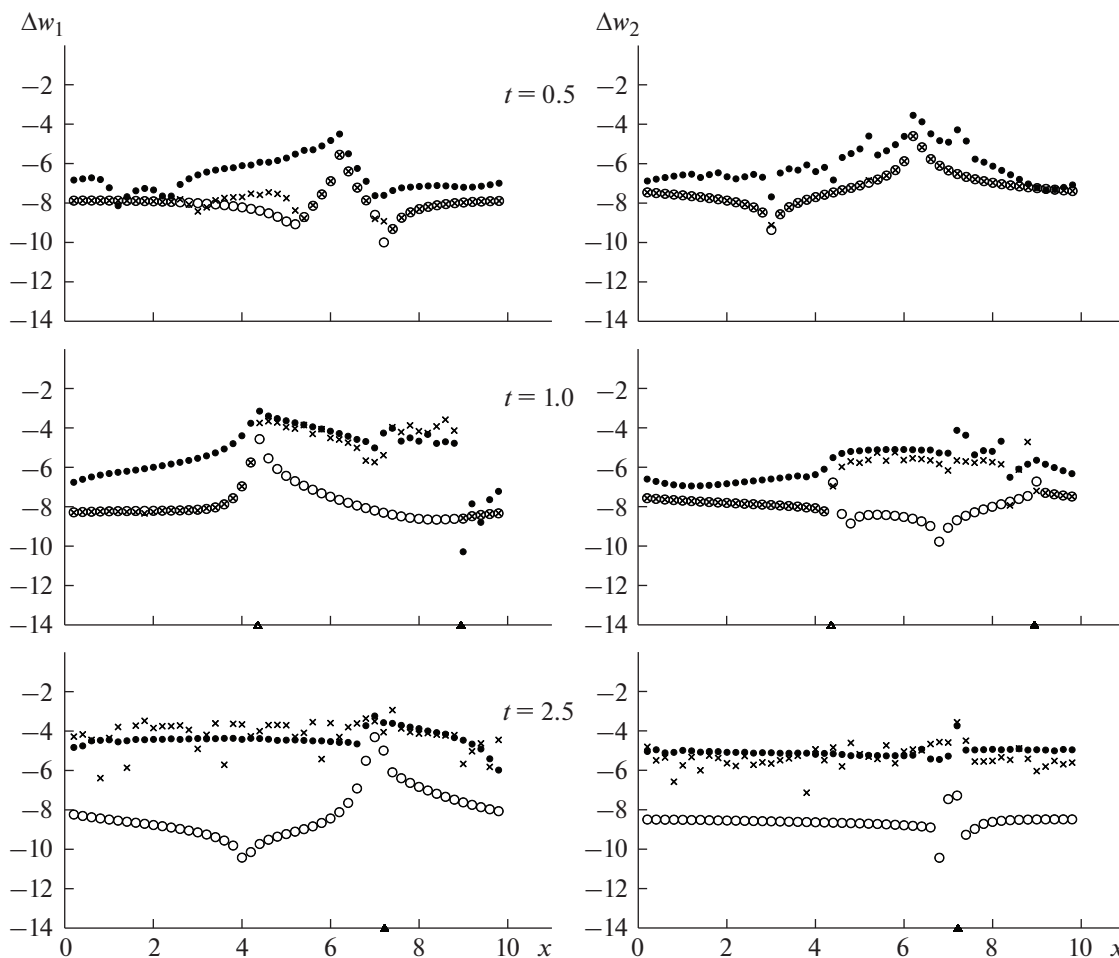
На фиг. 10–12 приведены результаты численных расчетов основной тестовой задачи (2.1), (3.1), (3.2) по трем DG-схемам: DG1, DG1A1 и DG1A2, проведенные на равномерной сетке (2.3)



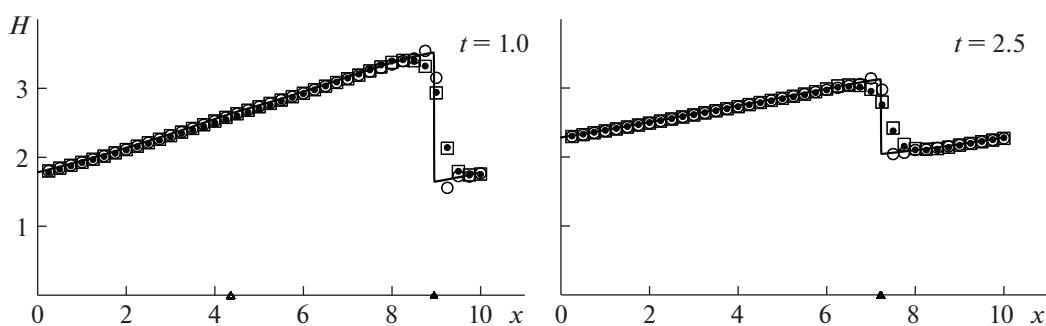
Фиг. 10. Глубины жидкости H и порядки интегральной сходимости ρ , получаемые при численном решении задачи Коши (2.1), (3.1), (3.2) по схемам DG1 (кружки), DG1A1 (точки) и DG1A2 (крестики). Сплошными линиями изображены квазиточные значения глубины.

с коэффициентом запаса $z = 0.45$, что обеспечивает выполнение условия устойчивости (2.4); результаты расчетов по схеме DG1 показаны кружками, по схеме DG1A1 – точками и по схеме DG1A2 – крестиками. При $t = 1, 2.5$ темными треугольниками на оси x обозначены положения фронтов ударных волн, а при $t = 1$ светлым треугольником показана левая граница области влияния ударной волны. Сплошными линиями на фиг. 10 и 12 изображены квазиточные профили глубины, получаемые в результате численного расчета по схеме DG1A1 на достаточно мелкой сетке. На фиг. 10 показаны численные значения глубины жидкости $H(x_{j+1/2}, t)$ и порядки интегральной сходимости $\rho(x_j, X, t)$, определяемые по формуле (2.13), в которой $k = 3$, а на фиг. 11 – относительные локальные дисбалансы $\Delta w_{ih}(x_{j+1/2}, t)$, вычисления инвариантов w_i , задаваемые формулами (2.17) и (2.18). Глубины жидкости H вычислялись на сетке (2.3) с пространственным шагом $h = 0.25$, а величины ρ и Δw_{ih} были вычислены на базисной сетке (2.3) с шагом $h = 0.005$ и показаны для каждой 40-й ячейки этой сетки.

На графиках, приведенных слева на фиг. 10, видно, что в отличие от NFC-схем DG1A1 и DG1A2, схема DG1 имеет заметные осцилляции в окрестностях ударных волн; при этом схемы DG1 и DG1A2 заметно меньше размывают фронт ударной волны, чем схема DG1A1. Из графиков, показанных справа на фиг. 10, следует, что немонотонная схема DG1, несмотря на нефизические осцилляции на фронте ударной волны, обеспечивает второй порядок интегральной сходимости на отрезках $[x_j, X]$, левая граница которых расположена внутри области влияния ударной волны. Схемы DG1A1 и DG1A2, полученные путем монотонизации схемы DG1, подоб-



Фиг. 11. Относительные локальные дисбалансы $\Delta w_{ih}(x_{j+1/2}, t)$ вычисления инвариантов w_i , получаемые по схемам DG1 (кружки), DG1A1 (точки) и DG1A2 (крестики).



Фиг. 12. Глубины жидкости H , получаемые при численном решении задачи Коши (2.1), (3.1), (3.2) по схемам DG1 (кружки), DG1A1 (точки) и CDG (квадратики). Сплошными линиями изображены квазиточные значения глубины.

но конечно-разностным NFC-схемам, снижают скорость этой сходимости приблизительно до первого порядка, что приводит к заметному снижению их точности по сравнению со схемой DG1 при вычислении инвариантов в области влияния ударной волны (фиг. 11).

На графиках, приведенных справа на фиг. 10, видно, что при $t = 0.5, 1$ схемы DG1 и DG1A2 имеют третий порядок интегральной сходимости на интервалах $[x_j, X]$, левая граница которых

лежит вне области влияния ударной волны, в то время как схема DG1A1 имеет на этих интервалах второй порядок интегральной сходимости. Объясняется это тем, что схема DG1 обеспечивает третий порядок локальной аппроксимации на гладких решениях и коррекция потоков в схеме DG1A2 этот порядок сохраняет, в то время как более сильная коррекция потоков в схеме DG1A1 снижает точность этой аппроксимации до второго порядка. В результате вне области влияния ударной волны инварианты вычисляются по схеме DG1A1 с существенно более низкой точностью, чем по схемам DG1 и DG1A2 (фиг. 11).

Проведенный анализ точности схем DG1 и DG1A1 позволяет использовать их для построения методом, изложенным в разд. 7, комбинированной схемы разрывного метода Галеркина, в которой в качестве базисной HASIA-схемы применяется немонотонная схема DG1, а в качестве внутренней NFC-схемы – схема DG1A1. Для получаемой таким образом комбинированной DG-схемы будем использовать аббревиатуру CDG-схема (Combined Discontinuous Galerkin scheme). На фиг. 12 при $t = 1, 2.5$ приведены значения глубины жидкости $H(x_{j+1/2}, t)$, получаемые при численном расчете задачи Коши (2.1), (3.1), (3.2) по схемам CDG (квадратики), DG1 (кружки) и DG1A1 (точки) на сетке (2.3) с пространственным шагом $h = 0.25$. На фиг. 12 видно, что в комбинированной CDG-схеме эффективно подавляются нефизические осцилляции на фронтах ударных волн, присущие базисной DG1-схеме (фиг. 10). Поскольку внутренняя схема DG1A1 не влияет на решение базисной схемы DG1 вне многосвязной области (7.1), внутри которой расположены ударные волны, то комбинированная CDG-схема сохраняет повышенную точность вычисления инвариантов в областях влияния ударных волн, которая совпадает с точностью вычисления инвариантов по схеме DG1 (фиг. 11), имеющей повышенный порядок интегральной сходимости (фиг. 10).

8.2. Бикомпактные комбинированные схемы

Определяющей чертой бикомпактных схем является высокоточная компактная аппроксимация пространственных производных на шаблоне, который размещается в одной ячейке сетки. По каждому пространственному направлению этот шаблон включает в себя лишь два целых узла сетки, что и дало название этому классу схем. Высокий четный порядок аппроксимации по пространству в бикомпактных схемах достигается за счет введения дополнительных искомым сеточных функций, определенных на множестве либо уже имеющихся целых, либо вспомогательных дробных узлов. Для отыскания этих дополнительных функций привлекаются дифференциальные следствия аппроксимируемых уравнений. Преимущество бикомпактных схем заключается в сочетании нескольких положительных свойств: это слабые ограничения по устойчивости (благодаря неявности временной дискретизации), экономичная реализация, совпадение числа граничных условий в разностной и дифференциальной постановках задачи (благодаря минимальности шаблона), высокое спектральное разрешение (см. [86], [87]).

Применительно к нестационарным уравнениям в частных производных бикомпактные схемы были впервые построены: для одномерного линейного уравнения теплопроводности в [88], для одномерного линейного уравнения переноса в [10], для одномерных гиперболических систем законов сохранения в [89]. В дальнейшем бикомпактные схемы получили обобщение на различные многомерные уравнения и системы уравнений: гиперболические уравнения (см. [90]) и системы (см. [28], [91]), уравнения Эйлера для многокомпонентных химически реагирующих газов (см. [92]), линейное уравнение конвекции-диффузии (см. [93]), уравнения Навье–Стокса для несжимаемой жидкости (см. [94]). Для эффективной реализации многомерных бикомпактных схем было предложено применять локально-одномерное расщепление (см. [95]) и метод итерируемой приближенной факторизации (см. [96]). В работах [86], [87] были исследованы диссипативные и дисперсионные свойства бикомпактных схем. Было показано в [86], что бикомпактные схемы имеют лучшее спектральное разрешение по сравнению с классическими компактными схемами такого же порядка аппроксимации по пространству. В [11] был предложен метод консервативной монотонизации бикомпактных схем, в котором устранен главный недостаток метода гибридной схемы (см. [10], [28], [89]–[91]) – нарушение свойства консервативности. Вопросы точности бикомпактных схем в областях влияния ударных волн и построения комбинированных бикомпактных схем рассматривались в [21], [33], [97]. В настоящем разделе дается обзор результатов из [21], [33].

Простейшая бикомпактная схема, аппроксимирующая систему (2.1), имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} A_0^x(\mathbf{v}_{j+1/2}^* - \mathbf{v}_{j+1/2}^n) + \Lambda_1^x \mathbf{f}^+(\mathbf{v}_{j+1/2}^*) &= \mathbf{0}, & \frac{1}{\tau} A_0^x(\mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1} - \mathbf{v}_{j+1/2}^*) + \Lambda_1^x \mathbf{f}^-(\mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1}) &= \mathbf{0}, \\ \frac{1}{\tau} \Lambda_1^x(\mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1} - \mathbf{v}_{j+1/2}^*) + \Lambda_2^x \mathbf{f}^-(\mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1}) &= \mathbf{0}; & \frac{1}{\tau} \Lambda_1^x(\mathbf{v}_{j+1/2}^* - \mathbf{v}_{j+1/2}^n) + \Lambda_2^x \mathbf{f}^+(\mathbf{v}_{j+1/2}^*) &= \mathbf{0}; \end{aligned} \tag{8.10}$$

где искомые функции \mathbf{v}_j^n и $\mathbf{v}_{j+1/2}^n$, так же как в схеме SABARETM, вычисляются в целых и полу-целых пространственных узлах однородной разностной сетки (2.3), действие сеточных операторов $A_0^x, \Lambda_1^x, \Lambda_2^x$ определяется формулами

$$A_0^x \mathbf{v}_{j+1/2}^n = \frac{\mathbf{v}_j^n + 4\mathbf{v}_{j+1/2}^n + \mathbf{v}_{j+1}^n}{6}, \quad \Lambda_1^x \mathbf{v}_{j+1/2}^n = \frac{\mathbf{v}_{j+1}^n - \mathbf{v}_j^n}{h}, \quad \Lambda_2^x \mathbf{v}_{j+1/2}^n = \frac{4(\mathbf{v}_j^n - 2\mathbf{v}_{j+1/2}^n + \mathbf{v}_{j+1}^n)}{h^2},$$

а функции $\mathbf{f}^\pm(\mathbf{u})$ порождаются глобальным расщеплением потоков Лакса–Фридрикса

$$\mathbf{f}^\pm(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{f}(\mathbf{u}) \pm C_2 \mathbf{u}, \quad C_2 = \frac{1+2\delta}{2} \max_{k,j,\alpha} |\lambda_k(\mathbf{v}_{j+\alpha}^n)|, \tag{8.11}$$

в котором параметр $\delta > 0$ отвечает за запас положительной либо отрицательной определенности матриц Якоби $A^\pm(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_u^\pm(\mathbf{u})$. Бикомпактная схема (8.10) является консервативной и безусловно устойчивой, имеет четвертый порядок аппроксимации по пространству и первый порядок аппроксимации по времени, поскольку в этой схеме для дискретизации по времени применяется неявный метод Эйлера первого порядка. При аппроксимации линейного уравнения переноса схема (8.10) монотонна при числах Куранта, не меньших 1/4.

Далее мы рассматриваем три бикомпактные схемы на основе (8.10): MViC, NFC-схему формально третьего порядка аппроксимации по времени (см. [11]); RViC, HASIA-схему с пассивной (в терминологии [34]) или глобальной экстраполяцией Ричардсона (см. [21]) второго порядка по времени; SViC, комбинированную схему второго порядка аппроксимации по времени (см. [33]).

Дадим краткое описание схемы MViC. Ее построение начинается с того, что порядок аппроксимации схемы (8.10) по времени повышается до третьего. Для этого временные производные аппроксимируются не разностями назад, а диагонально-неявным методом Рунге–Кутты соответствующего порядка из работы [98]:

$$\begin{array}{c|ccc} a & & & a \\ \hline a_{21} + a & a_{21} & a & \\ 1 & a_{31} & a_{32} & a \\ \hline & a_{31} & a_{32} & a \end{array}, \quad a = 1 + \sqrt{2} \cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{1}{3} \arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}\right),$$

$$a_{21} = -\frac{a-1/3}{2(a^2-2a+1/2)}, \quad a_{32} = -\frac{2(a^2-2a+1/2)^2}{a-1/3}, \quad a_{31} = 1-a-a_{32}.$$

Добавим, что данный метод является жестко-точным и L -устойчивым. Полученную таким образом бикомпактную схему третьего порядка аппроксимации по времени будем называть схемой B . По теореме Годунова из [1] схема B является немонотонной. Генерируемые ею нефизические осцилляции подавляются с помощью метода консервативной монотонизации, предложенного в [11]. Его конструкция предполагает использование второй схемы – монотонной схемы A . Последняя не обязана быть бикомпактной и может быть выбрана исходя из любых нужных критериев (экономичность, устойчивость, количество аппроксимационной вязкости). В качестве схемы A возьмем схему (8.10).

Рассмотрим переход со слоя t_n на слой t_{n+1} по схеме MViC. Искомое решение \mathbf{v}_h^{n+1} находится в три этапа. На первом этапе по схемам A и B вычисляются два решения на слое t_{n+1} : \mathbf{v}_h^A и \mathbf{v}_h^B соответственно. Общим промежуточным начальным условием для обеих схем полагается решение \mathbf{v}_h^n .

На втором этапе решение \mathbf{v}_h^B ограничивается локально в каждой ячейке $K_{j+1/2} = [x_j, x_{j+1}]$ около своего интегрального среднего $\bar{\mathbf{v}}_{j+1/2}^B = A_0^x \mathbf{v}_{j+1/2}^B$:

$$\tilde{v}_h(x; K_{j+1/2}) = \bar{v}_{j+1/2}^B + \beta_{j+1/2} [v_h^B(x) - \bar{v}_{j+1/2}^B], \quad x = x_j, x_{j+1/2}, x_{j+1}, \quad (8.12)$$

где

$$\beta_{j+1/2} = \frac{1}{1 + d_{j+1/2}^2}, \quad d_{j+1/2} = \frac{C_1 \max_{x=x_j, x_{j+1/2}, x_{j+1}} |v_h^A(x) - v_h^B(x)|}{\max_{x=x_j, x_{j+1/2}, x_{j+1}} |v_h^A(x)|}. \quad (8.13)$$

Формулы (8.12), (8.13) применяются покомпонентно, т.е. $v \equiv v^i$, $\beta \equiv \beta^i$, $d = d^i$, $i = \overline{1, m}$. На третьем этапе устраняется многозначность решения \tilde{v}_h на границах между ячейками, после чего мы получаем результирующее решение на слое t_{n+1} :

$$\mathbf{v}_h(x_j, t_{n+1}) = \frac{\tilde{\mathbf{v}}_h(x_j; K_{j-1/2}) + \tilde{\mathbf{v}}_h(x_j; K_{j+1/2})}{2}, \quad \mathbf{v}_h(x_{j+1/2}, t_{n+1}) = \tilde{\mathbf{v}}_h(x_{j+1/2}; K_{j+1/2}). \quad (8.14)$$

Число $C_1 \geq 0$ является параметром метода консервативной монотонизации (см. [11]).

Суть формул (8.12)–(8.14) сводится к следующему. В областях гладкости точного решения

$$|v_h^A(x) - v_h^B(x)| = O(\tau), \quad d_{j+1/2} = O(\tau), \quad |\beta_{j+1/2} - 1| = O(\tau^2)$$

и решение \mathbf{v}_h^B корректируется лишь на величину $O(h^3)$. Вблизи сильных разрывов точного решения

$$|v_h^A(x) - v_h^B(x)| = O(1), \quad d_{j+1/2} = O(1), \quad |\beta_{j+1/2} - 1| = O(1)$$

и решение \mathbf{v}_h^B сглаживается на величину $O(1)$. Из формул (8.12) и (8.13) следует, что монотонизация тем интенсивнее, чем больше параметр C_1 ; в предельном случае при $C_1 = 0$ монотонизация отсутствует.

Перейдем к схеме RBiC и основанной на ней комбинированной схеме SBiC. Чтобы построить решение по схеме RBiC, необходимо сначала провести полный расчет задачи по бикompактной схеме (8.10) на двух сетках: с шагами $h_1 = h$, $\tau_1 = \tau$ и шагами $h_2 = h/2$, $\tau_2 = \tau/2$. Затем на любом слое t_n^1 по двум полученным решениям с помощью пассивной экстраполяции Ричардсона второго порядка вычисляется искомое решение

$$\mathbf{v}_h(x_{j+\alpha}^1, t_n^1; B) = 2\mathbf{v}_{h_2}(x_{j+\alpha}^1, t_n^1; A) - \mathbf{v}_h(x_{j+\alpha}^1, t_n^1; A), \quad (8.15)$$

где ради краткости мы обозначили схему (8.10) буквой A (как в MBiC), а схему RBiC – буквой B . Подчеркнем, что пассивная (глобальная) экстраполяция Ричардсона, в отличие от активной (локальной), реализуется не при каждом переходе со слоя на слой (подобно стадиям методов Рунге–Кутты), а только после полного завершения счета.

Решение, задаваемое формулой (8.15), содержит осцилляции, однако их количество невелико, и они локализованы в окрестностях ударных волн. Поскольку схема RBiC реализуется пассивно, эти осцилляции разумно устранять некоторой простой пост-обработкой. Применяя для этого формулы, аналогичные формулам гибридной схемы из [10], мы приходим к комбинированной схеме SBiC из [33]:

$$\begin{aligned} v_h(x_{j+\alpha}^1, t_n^1; \text{SBiC}) &= v_h(x_{j+\alpha}^1, t_n^1; B) + \omega_{j+\alpha} D_{j+\alpha}, \\ D_{j+\alpha} &= v_{h_2}(x_{j+\alpha}^1, t_n^1; A) - v_h(x_{j+\alpha}^1, t_n^1; B), \quad \omega_{j+\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{при } |D_{j+\alpha}| \leq d_* Q, \\ 1 - \frac{d_* Q}{|D_{j+\alpha}|} & \text{иначе,} \end{cases} \\ Q &= \max_{j,\alpha} v_{h_2}(x_{j+\alpha}^1, t_n^1; A) - \min_{j,\alpha} v_{h_2}(x_{j+\alpha}^1, t_n^1; A), \end{aligned} \quad (8.16)$$

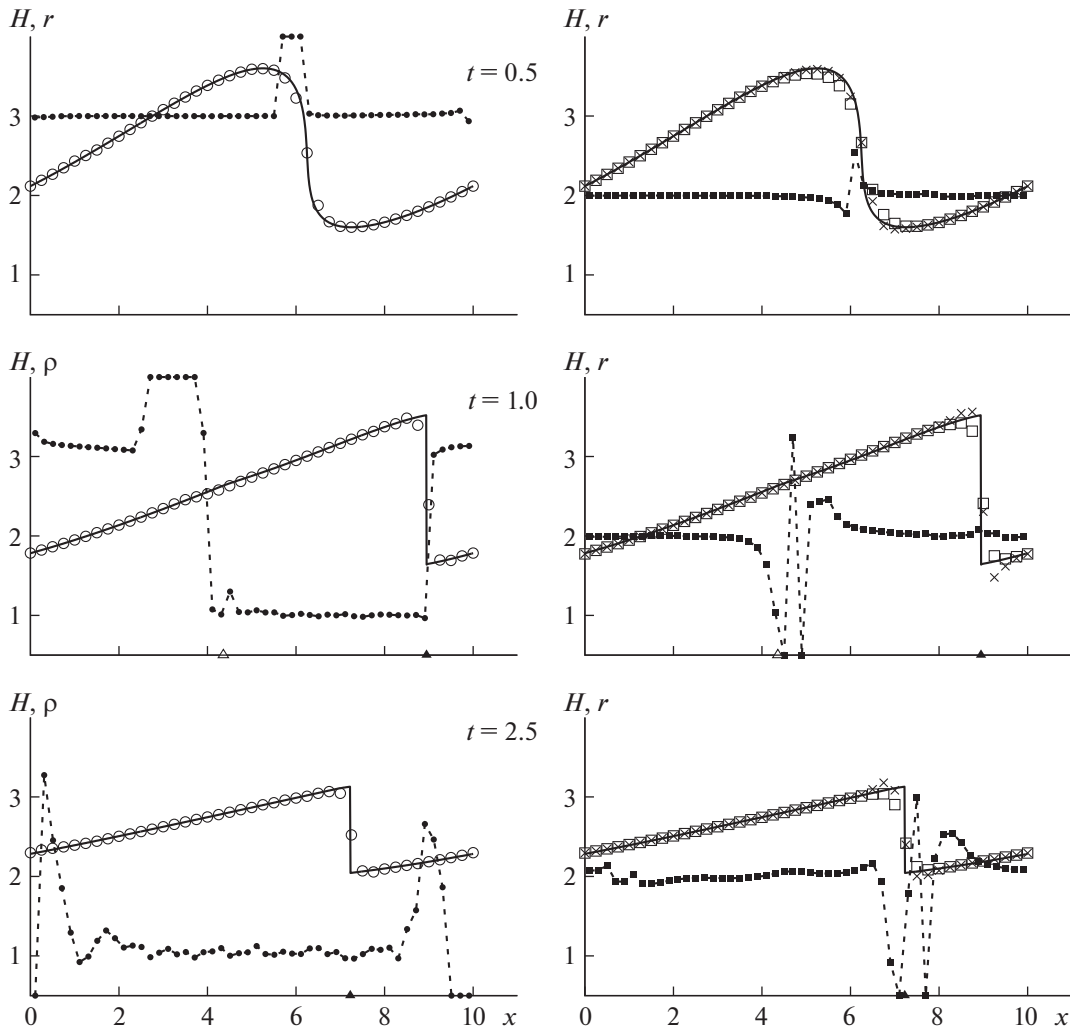
где $d_* \geq 0$ – входной параметр схемы СВiС. Как и формулы (8.12)–(8.14), формула (8.16) применяется покомпонентно. В комбинированной схеме СВiС базисной HASIA-схемой является схема RBiC (схема B), а внутренней монотонной схемой – схема (8.10) (схема A). Отметим, что для реализации комбинированной схемы СВiС не нужно явного выделения фронтов ударных волн вида (6.1), (6.2) и последующего решения внутренних начально-краевых задач. Обратим внимание на одно важное свойство базисной схемы RBiC. Предположим, что ударная волна большой амплитуды распространяется по фону, близкому к границам области применимости данной физической модели. Например, в случае уравнений мелкой воды такой границей является нулевая глубина жидкости ($H = 0$), в случае уравнений газовой динамики – нулевые плотность, температура и давление газа. При сквозном расчете такого процесса по какой-либо HASIA-схеме может возникнуть осцилляция, которая выведет решение в область физически недопустимых значений, что, в свою очередь, приведет к аварийному завершению счета. В схеме же RBiC такая ситуация исключена, так как решение этой базисной схемы строится пассивно из монотонных решений внутренней бикompактной схемы (8.10).

Обсудим результаты расчетов основной тестовой задачи, описанной в разд. 3, по бикompактным схемам MViC, RBiC и СВiC. Укажем значения параметров схем: во всех схемах $\delta = 0.2$; в схеме MViC $\tau/h = 0.09$ и $C_1 = 10$; в схемах RBiC и СВiC $\tau/h = 0.05$, в схеме СВiC $d_* = 0.01$.

На фиг. 13 показаны численные значения глубины жидкости H , а также порядки локальной сходимости r , определяемые по формуле (2.7) при $k = 2$, и порядки интегральной сходимости ρ , определяемые по формуле (2.9), в которой $k = 2$ и интегралы V_{h_i} вычисляются по формуле парабол. Порядки интегральной сходимости приводятся в том случае (графики слева на фиг. 13 при $t = 1, 2.5$), когда порядки локальной сходимости разностных решений сильно осциллируют и не дают необходимой информации о точности этих решений. На фиг. 14 приведены относительные локальные дисбалансы Δw_{ih} вычисления инвариантов w_i , задаваемые формулами (2.14) и (2.18). Глубины жидкости H определялись на сетке (2.3) с пространственным шагом $h = 0.25$, а величины r , ρ и Δw_{ih} были вычислены на базисной сетке (2.3) с шагом $h = 0.005$ и показаны для каждой 40-й ячейки этой сетки. В качестве квазиточного решения в формулах (2.7) и (2.9) использовалось численное решение, полученное по схеме Русанова на достаточно мелкой сетке.

Из фиг. 13 следует, что профили глубины, рассчитанные по схемам MViC и СВiC, практически не отличаются друг от друга. Разница между схемами проявляется только к моменту времени $t = 2.5$: NFC-схема MViC размывает фронт ударной волны на две ячейки, а комбинированная схема СВiC – на три. Немонотонность HASIA-схемы RBiC заметна при $t = 1.0, 2.5$. Как уже было отмечено выше, осцилляции численного решения локализованы непосредственно перед и за фронтом ударной волны. В комбинированной схеме СВiC эти осцилляции отсутствуют. Из фиг. 13 также следует, что бикompактная схема MViC, как и другие NFC-схемы, снижает свою точность в области влияния ударной волны: порядок сходимости снижается с третьего до первого. Комбинированная бикompактная схема СВiC имеет второй порядок локальной сходимости во всей расчетной области, за исключением некоторых окрестностей ударных волн. Это означает, что бикompактная схема RBiC с пассивной экстраполяцией Ричардсона по времени является HASIA-схемой.

Из фиг. 14 следует, что при $t = 0.5$, когда начинают формироваться области больших градиентов, но решение еще остается гладким, схемы RBiC и СВiC предсказуемо проигрывают NFC-схемам MViC и WENO5 по реальной точности. Это объясняется более низким, вторым порядком аппроксимации по времени у схем RBiC и СВiC. Однако при $t = 1.0$ в области влияния ударной волны схемы RBiC и СВiC, наоборот, превосходят NFC-схемы MViC и WENO5: погрешности инвариантов для первой пары схем в среднем на порядок меньше. Тем не менее схемы MViC и WENO5 по-прежнему демонстрируют лучшую точность вне области влияния. По мере расширения этой области данное преимущество исчезает. К моменту времени $t = 2.5$, когда область влияния ударной волны занимает всю расчетную область, схемы RBiC и СВiC оказываются в среднем на порядок точнее всюду, кроме относительно небольших окрестностей ударных волн. При этом схемы MViC и WENO5, будучи по существу разными схемами, имеют примерно одну и ту же точность в области влияния ударной волны.



Фиг. 13. Глубины жидкости H , порядки локальной сходимости r и интегральной сходимости ρ , получаемые по схемам MBiC (кружки полые и закрашенные), SBiC (квадратики полые и закрашенные) и RBiC (крестики). Сплошными линиями изображены квазиточные значения глубины.

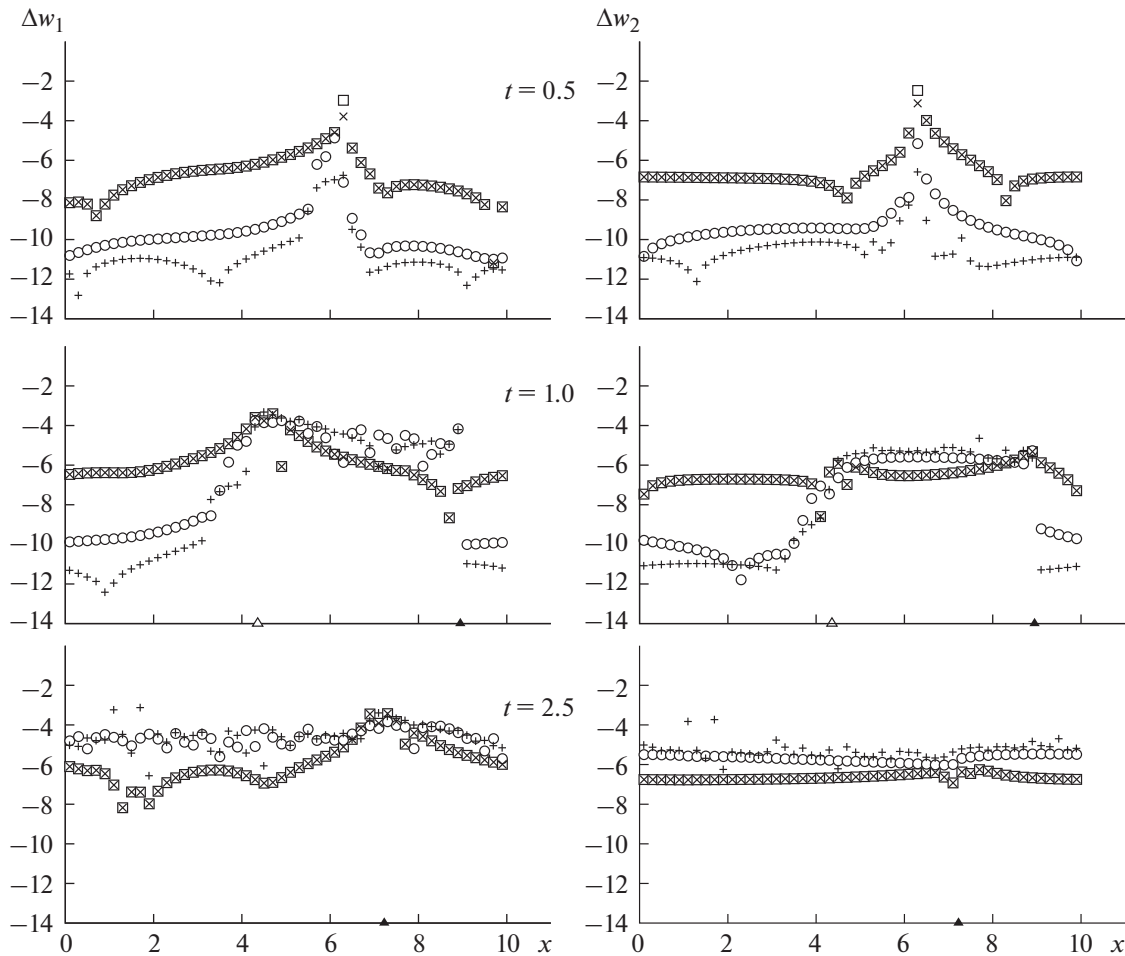
9. ЗАДАЧА О МНОГОКРАТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УДАРНЫХ ВОЛН

В этом разделе приводятся результаты работы [99], в которой проведен сравнительный анализ точности комбинированных разностных схем CR и CCWA, построенных в разд. 7, со схемой WENO5 при численном моделировании задачи о многократном взаимодействии ударных волн на равномерной сетке (2.3) с коэффициентом запаса $z = 0.45$ в условии устойчивости (2.4).

Рассмотрим для системы уравнений мелкой воды (2.1), (3.1) задачу Коши (2.2) с периодическими начальными данными

$$h(x, 0) = 2 \sin \frac{\pi(2x + 5)}{X} + 3, \quad v(x, 0) = 0, \quad (9.1)$$

где $X = 10$ – длина периода; на фиг. 15 начальное значение глубины жидкости $h(x, 0)$ показано штриховой линией. Квазиточное решение задачи (2.1), (3.1), (9.1) моделируется численным расчетом по CR-схеме на мелкой сетке с пространственным шагом $h = 0.005$. Профили глубины, получаемые в этом расчете в моменты времени $t = 0.5, 1, 2, 3$, изображены на фиг. 15 сплошными линиями на отрезке $[0, X]$ длины периода. В результате решения данной задачи впадина, расположенная в начальный момент времени на интервале $[0, X]$ (штриховая линия), постепенно заполняется жидкостью, что приводит к подъему ее уровня в окрестности точки $x = X/2$ (линия I).

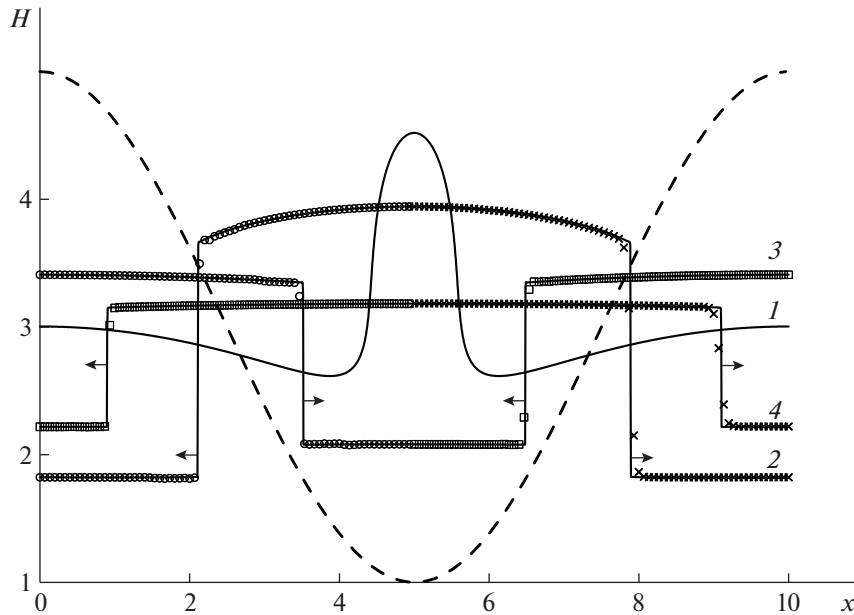


Фиг. 14. Относительные локальные дисбалансы $\Delta w_{ih}(x_j, t)$ вычисления инвариантов w_i , получаемые по схемам MBiC (кружки), SBiC (квадратики), RBiC (косые крестики) и WENO5 (прямые крестики).

Этот подъем уровня вызывает формирование двух расходящихся ударных волн (линия 2), которые на границах интервала $[0, X]$ взаимодействуют с ударными волнами, двигающимися им навстречу. В результате этого взаимодействия на интервале $[0, X]$ образуются две сходящиеся ударные волны (линия 3). Эти ударные волны, соударяясь в точке $x = X/2$, формируют две новые расходящиеся ударные волны (линия 4). Далее этот процесс повторяется, приводя к возникновению новых пар сходящихся и расходящихся ударных волн, амплитуда которых постепенно уменьшается, что связано с потерей полной энергии потока на фронтах этих волн.

На фиг. 15 в моменты времени $t = 1, 2, 3$ приведены глубины жидкости, получаемые в результате численных расчетов задачи (2.1), (3.1), (9.1) по схемам CR, CCWA и WENO5 с пространственным шагом $h = 1/15$. Поскольку эти разностные решения (так же, как и точное решение) симметричны относительно точки $x = X/2$, то на фиг. 15 каждое из них в фиксированный момент времени приводится на одном из отрезков $[0, X/2]$ или $[X/2, X]$ длины полупериода. Из фиг. 15 следует, что комбинированные схемы CR и CCWA размазывают фронт ударной волны существенно меньше, чем схема WENO5. Это объясняется тем, что в этих комбинированных схемах в качестве внутренней используется схема CABARETM, которая с высокой точностью локализует фронты ударных волн.

На фиг. 16 в моменты времени $t = 0.5, 1, 2, 3$ показаны относительные локальные дисбалансы $\Delta w_{1h}(x_j, t)$, вычисления инварианта $w_1 = v - 2c$, задаваемые формулами (2.14) и (2.18) при $h = 0.02$, в которых квазиточное значение инварианта w_1 моделируется расчетом по CR-схеме при $h = 0.0002$. В силу симметрии начальных данных (9.1) графики относительных локальных



Фиг. 15. Глубины жидкости H , получаемые при численном решении задачи Коши (2.1), (3.1), (9.1) в моменты времени $t = 0$ (штриховая линия), $t = 0.5$ (линия 1), $t = 1$ (линия 2), $t = 2$ (линия 3) и $t = 3$ (линия 4). Кружками показаны результаты численного расчета по CR-схеме, квадратиками – по CCWA-схеме и крестиками – по схеме WENO5.

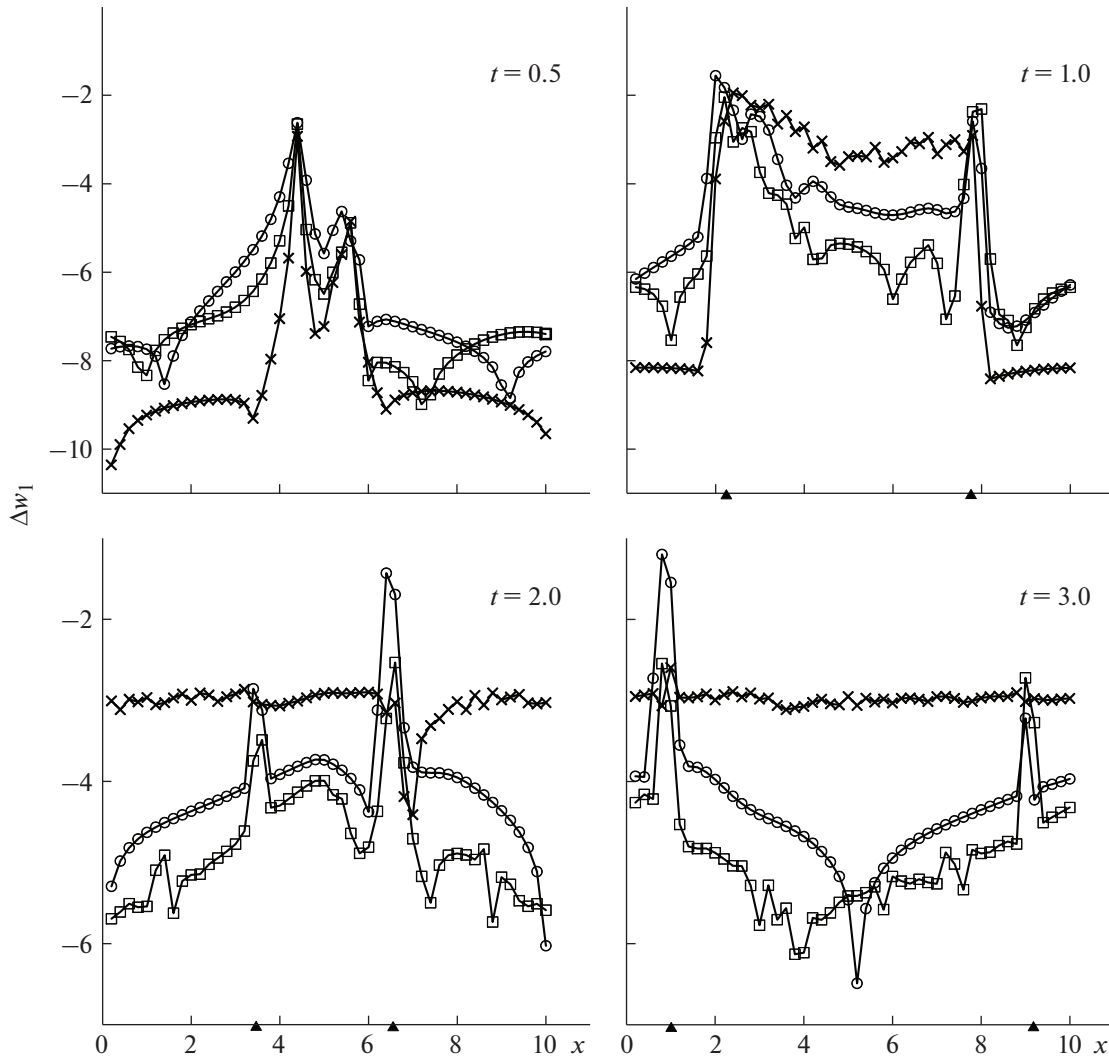
дисбалансов $\Delta w_{2h}(x_j, t)$ вычисления инварианта $w_2 = v + 2c$ получаются из графиков, приведенных на фиг. 16, путем их отражения относительно вертикальной прямой $x = X/2$. Из фиг. 16 при $t = 0.5, 1$ следует, что на интервалах, которые не входят в области влияния ударных волн, точность вычисления инвариантов в схеме WENO5 существенно выше, чем в комбинированных схемах; это объясняется более высокой точностью схемы WENO5 на гладких решениях. Однако на интервалах, расположенных между расходящимися ударными волнами, на фиг. 16 при $t = 1$ точность схемы WENO5 резко падает и становится ниже, чем в комбинированных схемах. С течением времени, когда вся расчетная область становится областью влияния взаимодействующих ударных волн (фиг. 16 при $t = 2, 3$), точность вычисления инвариантов в комбинированных схемах становится существенно выше, чем в схеме WENO5, везде за исключением малых окрестностей ударных волн, где сходимость разностного решения к точному отсутствует. Отметим также, что CCWA-схема, в которой базисной является компактная схема (4.4)–(4.7), демонстрирует более высокую точность, чем CR-схема, в которой базисной является схема Русанова (4.1)–(4.3). Это объясняется тем, что компактная схема (4.4)–(4.7) имеет третий порядок как классической аппроксимации на гладких решениях, так и слабой аппроксимации на разрывных решениях, в то время как схема Русанова третьего порядка классической аппроксимации имеет лишь первый порядок слабой аппроксимации.

10. ПРИМЕНЕНИЕ КОМБИНИРОВАННОЙ БИКОМПАКТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ДВУМЕРНЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

В этом разделе приводятся результаты работы [97], в которой комбинированная бикомпактная схема, предложенная в [33], обобщается на многомерный случай.

Двумерные уравнения первого приближения теории мелкой воды в случае плоского горизонтального дна без учета влияния донного трения имеют вид

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x + \mathbf{g}(\mathbf{u})_y = \mathbf{0}, \quad (10.1)$$



Фиг. 16. Относительные локальные дисбалансы $\Delta w_{1l}(x_j, t)$ вычисления инварианта $w_1 = v - 2c$, получаемые при численном решении задачи Коши (2.1), (3.1), (9.1) по схемам Русанова (кружки), CWA (квадратики) и WENO5 (крестики).

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} H \\ q_x \\ q_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} q_x \\ q_x^2/H + gH^2/2 \\ q_x q_y/H \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} q_y \\ q_x q_y/H \\ q_y^2/H + gH^2/2 \end{pmatrix}, \quad (10.2)$$

где $H(x, y, t)$ и $q_x(x, y, t)$, $q_y(x, y, t)$ – глубина и горизонтальные компоненты импульса жидкости соответственно, g – ускорение свободного падения (в расчетах $g = 10$). Рассмотрим для системы (10.1), (10.2) задачу Коши со следующими периодическими начальными данными (фиг. 17):

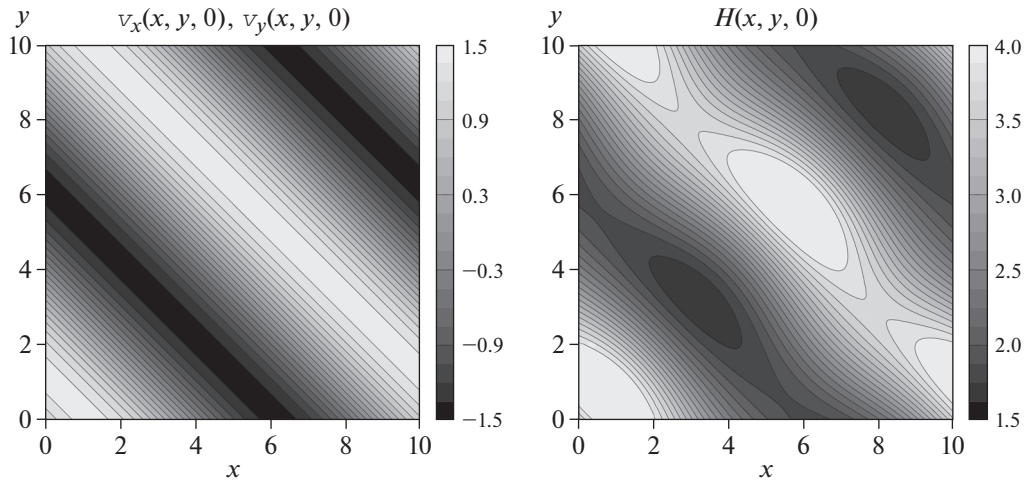
$$v_x(x, y, 0) = v_y(x, y, 0) = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{2\pi x}{X} + \frac{2\pi y}{Y} + \frac{\pi}{4}\right), \quad (10.3)$$

$$H(x, y, 0) = H_1(x, y)H_2(x, y), \quad (10.4)$$

в которых

$$H_1(x, y) = \frac{1}{4g} \left[a \sin\left(\frac{2\pi x}{X} + \frac{2\pi y}{Y} + \frac{\pi}{4}\right) + b \right]^2, \quad (10.5)$$

$$H_2(x, y) = 1 + \frac{1}{10} \left[\sin^2\left(\frac{2\pi x}{X} + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi y}{Y} + \frac{\pi}{4}\right) \right],$$



Фиг. 17. Начальные значения скоростей жидкости v_x , v_y и глубины жидкости H , задаваемые формулами (10.3) и (10.4).

где $v_x = q_x/H$, $v_y = q_y/H$ – компоненты скорости жидкости, $a = 2$, $X = Y = b = 10$. Двумерные начальные условия (10.3) и (10.4) соответствующим образом согласованы с одномерными начальными условиями (3.2) основной тестовой задачи и с учетом множителя (10.5) в начальном условии (10.4) являются существенно двумерными. При решении двумерной задачи Коши (10.1)–(10.4), аналогично решению одномерной тестовой задачи (2.1), (3.1), (3.2), в момент времени $t \approx 0.5$ в результате градиентных катастроф начинает формироваться последовательность изолированных ударных волн, которые распространяются друг за другом с одинаковыми скоростями; при $t \geq 1$ области влияния этих ударных волн заполняют всю расчетную область.

Комбинированная бикомпактная схема СВiС, аппроксимирующая задачу (10.1)–(10.4) и представляющая собой двумерный вариант схемы A из п. 8.2, строится на равномерной прямоугольной разностной сетке

$$S_2 = \{(x_i, y_j, t_n) : x_i = ih_x, y_j = jh_y, t_n = n\tau, n \geq 0\}, \quad (10.6)$$

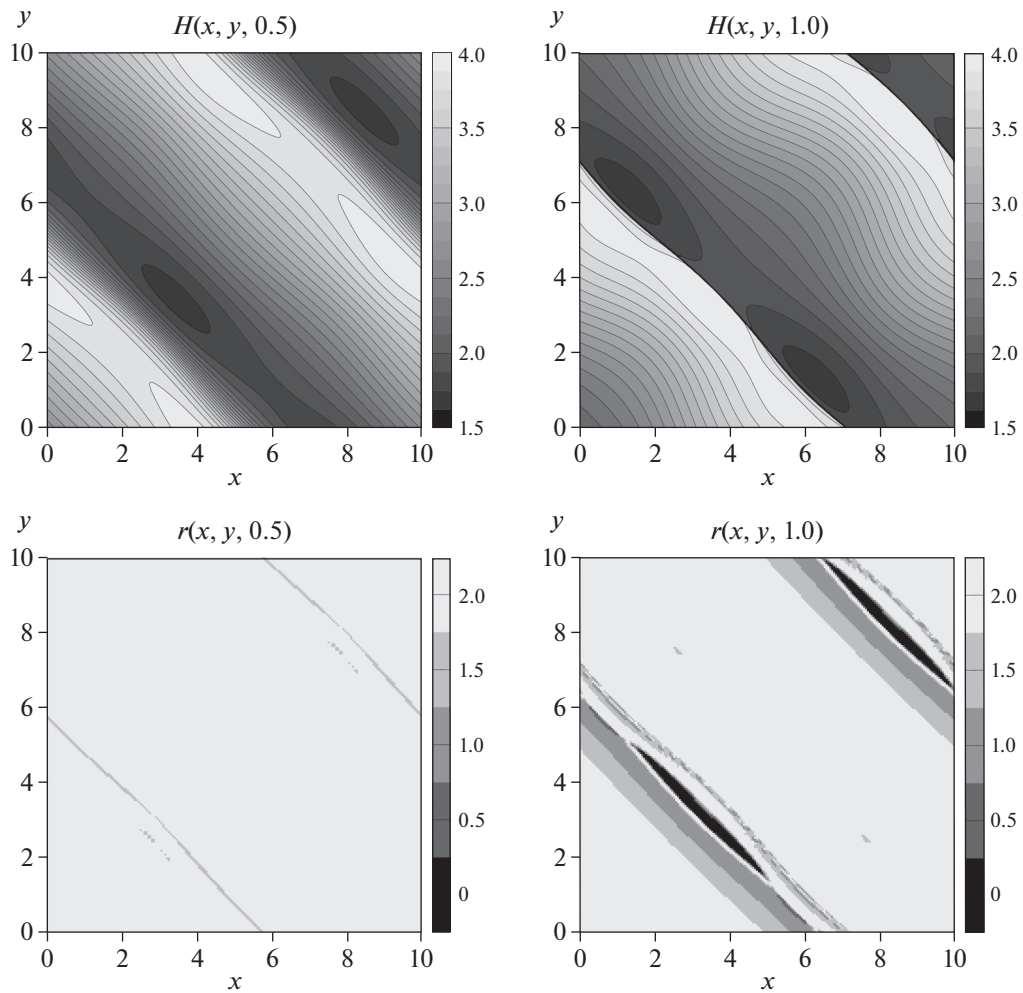
в которой $h_x = X/M_x$ и $h_y = Y/M_y$ – постоянные шаги сетки по пространственным переменным x и y , где M_x и M_y – заданные целые положительные числа; τ – постоянный шаг сетки по времени. Так же, как в пространственно одномерных бикомпактных схемах, в пространственно двумерной схеме СВiС численное решение определяется как в целых x_i , y_j , так и в полуцелых $x_{i+1/2} = (i + 1/2)h_x$, $y_{j+1/2} = (j + 1/2)h_y$, пространственных узлах разностной сетки (10.6). Для этого решения на n -м временном слое введем сокращенное обозначение \mathbf{v}_h^n , где $\mathbf{h} = (h_x, h_y)$.

Применяя методы локально-одномерного расщепления из [95] и глобального расщепления потоков Лакса–Фридрикса, представим систему (10.1) в виде суммы четырех одномерных систем

$$\frac{1}{4} \mathbf{u}_t + \mathbf{f}^\pm(\mathbf{u})_x = \mathbf{0}, \quad \frac{1}{4} \mathbf{u}_t + \mathbf{g}^\pm(\mathbf{u})_y = \mathbf{0}, \quad (10.7)$$

в которых потоки $\mathbf{f}^\pm(\mathbf{u})$, $\mathbf{g}^\pm(\mathbf{u})$ определяются аналогично одномерному случаю (8.11). При переходе с временного слоя t_n на слой t_{n+1} системы (10.7) решаются последовательно с шагом $\tau/4$ с помощью одномерных схем A , построенных в п. 8.2. Например, одномерные разностные схемы, аппроксимирующие системы (10.7) с потоками $\mathbf{f}^\pm(\mathbf{u})$, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} A_0^x(\mathbf{v}_{i+1/2, j+\alpha}^{(2)} - \mathbf{v}_{i+1/2, j+\alpha}^{(1)}) + \Lambda_1^x \mathbf{f}^\pm(\mathbf{v}_{i+1/2, j+\alpha}^{(2)}) &= \mathbf{0}, \\ \frac{1}{\tau} \Lambda_1^x(\mathbf{v}_{i+1/2, j+\alpha}^{(2)} - \mathbf{v}_{i+1/2, j+\alpha}^{(1)}) + \Lambda_2^x \mathbf{f}^\pm(\mathbf{v}_{i+1/2, j+\alpha}^{(2)}) &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$



Фиг. 18. Глубины жидкости H и порядки локальной сходимости r , получаемые при численном решении по комбинированной схеме СВiС двумерной задачи Коши (10.1)–(10.4).

где $\mathbf{v}^{(1)}$ и $\mathbf{v}^{(2)} = S_x^\pm(\tau) \circ \mathbf{v}^{(1)}$ – промежуточные численные решения, $S_x^\pm(\tau)$ – операторы перехода, $\alpha = 0, 1/2$. Аналогичным образом для одномерных бикомпактных схем A , аппроксимирующих системы (10.7) с потоками $\mathbf{g}^\pm(\mathbf{u})$, будем использовать операторную форму записи $\mathbf{v}^{(2)} = S_y^\pm(\tau) \circ \mathbf{v}^{(1)}$. С учетом этого двумерная бикомпактная схема A , аппроксимирующая систему (10.1), задается формулой

$$\mathbf{v}_h^{n+1} = S_y^-(\tau) \circ S_y^+(\tau) \circ S_x^-(\tau) \circ S_x^+(\tau) \circ \mathbf{v}_h^n.$$

Пассивная экстраполяция Ричардсона (8.15) и процедура пост-обработки комбинированной схемы (8.16) естественным образом обобщаются на двумерный случай, что позволяет построить двумерные схемы RBiC и СВiC. Отметим, что применение локально-одномерного расщепления в построенной двумерной бикомпактной схеме A является уместным, поскольку эта схема имеет первый порядок аппроксимации по времени, который повышается до второго порядка с помощью экстраполяции Ричардсона в схеме RBiC.

Рассмотрим результаты расчетов задачи Коши (10.1)–(10.4) по комбинированной бикомпактной схеме СВiC, которые выполнялись при параметрах $\delta = 0.2$, $\tau/h_x = \tau/h_y = 0.04$ и $d_* = 0.01$. На фиг. 18 в моменты времени $t = 0.5, 1.0$ приведены графики глубины жидкости, получаемые при расчете на сетке (10.6) с пространственными шагами $h_x = h_y = 0.025$, и графики порядков

локальной сходимости, определяемые по формуле, аналогичной (2.7), в которой $k = 2$ и в качестве базисной сетки используется разностная сетка (10.6) при $h_x = h_y = 0.05$. Из фиг. 18 следует, что в решении, получаемом по комбинированной схеме СВiC, отсутствуют нефизические осцилляции в окрестностях ударных волн, а порядки локальной сходимости $r \approx 2$ почти во всей расчетной области, как при $t = 0.5$, когда ударные волны только начинают формироваться, так и при $t = 1$, когда области влияния ударных волн занимают всю расчетную область. Отклонение от второго порядка сходимости происходит только в малых окрестностях ударных волн, где отсутствует локальная сходимость разностного решения к точному.

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в данной работе комбинированные схемы сквозного счета: CR (Combined Rusanov), CCWA (Combined Compact Weak Approximation), CDG (Combined Discontinuous Galerkin) и СВiC (Combined BiCompact), при численном расчете основной тестовой задачи (2.1), (3.1), (3.2) обеспечивают существенно более высокую точность в областях влияния ударных волн по сравнению со стандартными NFC-схемами (MUSCL, TVD, CU, WENO5, DG1A2, CABARETM, MBiC), которые в настоящее время широко применяются при численном моделировании прикладных задач математической физики. Причем, как показали тестовые расчеты, точность комбинированных схем при расчете разрывных решений может быть на несколько порядков выше точности NFC-схем (независимо от формального порядка аппроксимации этих схем на гладких решениях), в силу чего изложенные в данной работе результаты заметно превосходят современный мировой уровень развития данного научного направления и, по нашему мнению, в значительной степени будут определять дальнейшее развитие этого научного направления. Поэтому безусловно актуальной представляется необходимость дальнейшего всестороннего развития теории комбинированных схем сквозного счета и изучение возможностей применения этих схем для численного расчета различных многомерных прикладных задач. Сформулируем основные перспективные направления развития теории комбинированных схем.

В комбинированных схемах CR, CCWA и CDG в качестве базисных применяются HASIA-схемы третьего порядка, в то время как в комбинированной бикомпактной схеме СВiC базисной является HASIA-схема второго порядка. В результате точность вычисления инвариантов в области влияния ударных волн по схеме СВiC приблизительно на порядок выше, чем в NFC-схеме WENO5 (фиг. 14), но одновременно приблизительно на порядок ниже, чем в схемах CR, CCWA и CDG (фиг. 5, 6, 11). Поэтому несомненный интерес представляет разработка новых комбинированных бикомпактных схем, в которых в качестве базисных будут использованы бикомпактные HASIA-схемы не ниже третьего порядка, что позволит существенно повысить точность этих комбинированных схем, по сравнению со схемой СВiC.

В настоящей работе тестирование разностных схем сквозного счета проводилось на задачах Коши с гладкими периодическими начальными условиями, в точных решениях которых ударные волны возникают в результате градиентных катастроф строго внутри расчетных областей. Сделано это было для того, чтобы на первом этапе построения теории комбинированных схем избежать проблемы, связанной с сохранением повышенной точности этих схем при аппроксимации разрывных начальных и граничных условий. Поэтому на следующих этапах развития этой теории необходимо будет разработать методику построения комбинированных схем, имеющих повышенную точность при численном расчете обобщенных решений задач Коши и начально-краевых задач с разрывными начальными и граничными условиями, в частности, при расчете различных задач Римана о распаде начального разрыва.

К настоящему времени преимущества комбинированных схем были продемонстрированы на тестах, связанных с расчетом разрывных решений системы уравнений мелкой воды, представляющей собой простейшую сильно нелинейную гиперболическую систему законов сохранения (см. [35]), не имеющую контактных разрывов и допускающую запись в форме инвариантов. Поэтому в дальнейшем предполагается провести изучение точности комбинированных схем при расчете разрывных решений гиперболических систем законов сохранения общего вида, в частности, законов сохранения неизознотропической газовой динамики (см. [36]), допускающих контактные разрывы.

В данной работе при построении комбинированных схем область расчета по внутренней NFC-схеме определяется простейшим градиентным методом (6.2), что затрудняет применение этих схем для моделирования более сложных (в том числе многомерных) задач, в которых происходит многократное взаимодействие сильных разрывов. В то же время в рамках теории по-

строения гибридных схем (см. [24]–[28]) разработаны более эффективные методы выделения областей, внутри которых сосредоточены основные особенности рассчитываемого точного решения. Наиболее распространенными являются методы, использующие коэффициенты Фурье-разложения (см. [24]) или вейвлет-разложения (см. [25]) разностного решения, основанные на определении численного производства энтропии (см. [26]), а также использующие слабую локальную невязку разностного решения, получаемую путем подстановки непрерывного аналога этого решения в аппроксимируемую систему законов сохранения, записанную в слабо интегральной форме (см. [27]). С учетом этого в дальнейшем планируется разработать новые классы комбинированных схем сквозного счета, в которых для выделения областей больших градиентов, где расчет проводится по внутренней NFC-схеме, будут применены наиболее эффективные методы, развитые в теории гибридных схем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47. № 3. С. 271–306.
2. Van Leer B. Toward the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comput. Phys. 1979. V. 32. № 1. P. 101–136. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(79\)90145-1](https://doi.org/10.1016/0021-9991(79)90145-1)
3. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1983. V. 49. P. 357–393. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(83\)90136-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(83)90136-5)
4. Harten A., Osher S. Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes // SIAM J. Numer. Anal. 1987. V. 24. № 2. P. 279–309. https://doi.org/10.1007/978-3-642-60543-7_11
5. Nessyahu H., Tadmor E. Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1990. V. 87. № 2. P. 408–463. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(90\)90260-8](https://doi.org/10.1016/0021-9991(90)90260-8)
6. Liu X.D., Osher S., Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes // J. Comput. Phys. 1994. V. 115. № 1. P. 200–212. <https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1187>
7. Jiang G.S., Shu C.W. Efficient implementation of weighted ENO schemes // J. Comput. Phys. 1996. V. 126. P. 202–228. <https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0130>
8. Cockburn B. An introduction to the discontinuous Galerkin method for convection-dominated problems // Lect. Not. Math. 1998. V. 1697. P. 150–268. <https://doi.org/10.1007/BFb0096353>
9. Karabasov S.A., Goloviznin V.M. Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics // J. Comput. Phys. 2009. V. 228. P. 7426–7451. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.06.037>
10. Rogov B.B., Михайловская М.Н. Монотонные бикомпактные схемы для линейного уравнения переноса // Матем. моделирование. 2011. Т. 23. № 6. С. 98–110. <https://doi.org/10.1134/S2070048212010103>
11. Bragin M.D., Rogov B.V. Conservative limiting method for high-order bicomcompact schemes as applied to systems of hyperbolic equations // Appl. Numer. Math. 2020. V. 151. P. 229–245. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2020.01.005>
12. Остапенко В.В. О сходимости разностных схем за фронтом нестационарной ударной волны // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37. № 10. С. 1201–1212.
13. Casper J., Carpenter M.H. Computational consideration for the simulation of shock-induced sound // SIAM J. Sci. Comput. 1998. V. 19. № 1. P. 813–828. <https://www.jstor.org/stable/2587267>
14. Engquist B., Sjögreen B. The convergence rate of finite difference schemes in the presence of shocks // SIAM J. Numer. Anal. 1998. V. 35. P. 2464–2485. <https://www.jstor.org/stable/2587267>
15. Остапенко В.В. О построении разностных схем повышенной точности для сквозного расчета нестационарных ударных волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 12. С. 1857–1874.
16. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О сходимости разностных схем сквозного счета // Докл. АН. 2010. Т. 433. № 5. С. 599–603. <https://doi.org/10.1134/S1064562410040265>
17. Михайлов Н.А. О порядке сходимости разностных схем WENO за фронтом ударной волны // Матем. моделирование. 2015. Т. 27. № 2. С. 129–138. <https://doi.org/10.1134/S2070048215050075>

18. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф. О точности разрывного метода Галеркина при расчете ударных волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 8. С. 148–156. <https://doi.org/10.1134/S0965542518080122>
19. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О монотонности и точности схемы КАБАРЕ при расчете обобщенных решений с ударными волнами // Вычисл. техн. 2018. Т. 23. № 2. С. 37–54.
20. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О точности схем типа MUSCL при расчете ударных волн // Докл. РАН. Матем., информ., процессы управл. 2020. Т. 492. С. 43–48. <https://doi.org/10.1134/S1064562420030126>
21. Брагин М.Д., Рогов Б.В. О точности бикомпактных схем при расчете нестационарных ударных волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 5. С. 884–899. <https://doi.org/10.1134/S0965542520050061>
22. Остапенко В.В. О конечно-разностной аппроксимации условий Гюгонио на фронте ударной волны, распространяющейся с переменной скоростью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 8. С. 1355–1367.
23. Русанов В.В. Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180. № 6. С. 1303–1305.
24. Gelb A., Tadmor E. Adaptive edge detectors for piecewise smooth data based on the minmod limiter // J. Sci. Comput. 2006. V. 28. P. 279–306. <https://doi.org/10.1007/s10915-006-9088-6>
25. Arandiga F., Baeza A., Donat R. Vector cell-average multiresolution based on Hermite interpolation // Adv. Comput. Math. 2008. V. 28. P. 1–22. <https://doi.org/10.1007/s10444-005-9007-7>
26. Guermont J.L., Pasquetti R., Popov B. Entropy viscosity method for nonlinear conservation laws // J. Comput. Phys. 2011. V. 230. P. 4248–4267. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.11.043>
27. Dewar J., Kurganov A., Leopold M. Pressure-based adaption indicator for compressible Euler equations // Numer. Meth. Part. Diff. Eq. 2015. V. 31. P. 1844–1874. <https://doi.org/10.1002/num.21970>
28. Брагин М.Д., Рогов Б.В. Гибридные бикомпактные схемы с минимальной диссипацией для уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 6. С. 958–972. <https://doi.org/10.1134/S0965542516060099>
29. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О построении комбинированных разностных схем повышенной точности // Докл. АН. 2018. Т. 478. № 5. С. 517–522. <https://doi.org/10.1134/S1064562418010246>
30. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О монотонности схемы КАБАРЕ, аппроксимирующей гиперболическую систему законов сохранения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 9. С. 1488–1504. <https://doi.org/10.1134/S0965542518090129>
31. Зюзина Н.А., Ковыркина О.А., Остапенко В.В. Монотонная разностная схема, сохраняющая повышенную точность в областях влияния ударных волн // Докл. АН. 2018. Т. 482. № 6. С. 639–643. <https://doi.org/10.1134/S2070048219010186>
32. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф. Комбинированная схема разрывного метода Галеркина, сохраняющая повышенную точность в областях влияния ударных волн // Докл. АН. 2019. Т. 489. № 2. С. 119–124. <https://doi.org/10.1134/S106456241906005X>
33. Брагин М.Д., Рогов Б.В. Комбинированная монотонная бикомпактная схема, имеющая повышенную точность в областях влияния ударных волн // Докл. АН. 2020. Т. 492. С. 79–84. <https://doi.org/10.1134/S1064562420020076>
34. Faragó I., Havasi A., Zlatev Z. Efficient implementation of stable Richardson Extrapolation algorithms // Comput. Math. Appl. 2010. V. 60. № 8. P. 2309–2325. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.08.025>
35. Lax P.D. Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. Philadelphia: Soc. Industr. Appl. Math. 1972. 48 p.
36. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
37. Остапенко В.В., Хандеева Н.А. К обоснованию метода интегральной сходимости исследования точности конечно-разностных схем сквозного счета // Матем. моделирование. 2021. Т. 33. № 6. С. 1028–1037. <https://doi.org/10.1134/S207004822106017X>
38. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
39. Burstein S.Z., Mirin A.A. Third order difference methods for hyperbolic equations // J. Comput. Phys. 1970. V. 5. № 3. P. 547–571. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(70\)90080-X](https://doi.org/10.1016/0021-9991(70)90080-X)

40. *Lax P., Wendroff B.* Systems of Conservation Laws // Commun. Pure Appl. Math. 1960. V. 13. P. 217–237. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160130205>
41. *MacCormack R.W.* The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // AIAA. 1969. P. 69–354. <https://doi.org/10.2514/6.1969-354>
42. *Остапенко В.В.* Об аппроксимации законов сохранения разностными схемами сквозного счета // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. № 9. С. 1405–1417. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(90\)90165-0](https://doi.org/10.1016/0041-5553(90)90165-0)
43. *Остапенко В.В.* Об эквивалентных определениях понятия консервативности для конечно-разностных схем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29. № 8. С. 1114–1128. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(89\)90124-9](https://doi.org/10.1016/0041-5553(89)90124-9)
44. *Остапенко В.В.* О повышении порядка слабой аппроксимации законов сохранения на разрывных решениях // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. № 10. С. 146–157.
45. *Остапенко В.В.* Аппроксимация условий Гюгонио явными консервативными разностными схемами на нестационарных ударных волнах // Сиб. журн. вычисл. матем. 1998. Т. 1. № 1. С. 77–88.
46. *Остапенко В.В.* О локальном выполнении законов сохранения на фронте размазанной ударной волны // Матем. моделирование 1990. Т. 2. № 7. С. 129–138.
47. *Hirsh R.* Higher order accurate difference solutions of a fluid mechanics problems by a compact differencing technique // J. Comput. Phys. 1975. V. 19. № 1. P. 90–109. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(75\)90118-7](https://doi.org/10.1016/0021-9991(75)90118-7)
48. *Berger A.E., Solomon J.M., Ciment M., Leventhal S.H., Weinberg B.C.* Generalized OCI schemes for boundary layer problems // Math. Comput. 1980. V. 35. № 6. P. 695–731. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1980-0572850-8>
49. *Белоцерковский О.М., Быркин А.П., Мазуров А.П., Толстых А.И.* Разностный метод повышенной точности для расчета течений вязкого газа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1982. Т. 22. № 6. С. 1480–1490. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(82\)90110-0](https://doi.org/10.1016/0041-5553(82)90110-0)
50. *Толстых А.М.* Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука, 1990.
51. *Остапенко В.В.* Симметричные компактные схемы с искусственными вязкостями повышенного порядка дивергентности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 7. С. 1019–1038.
52. *Iserles A.* Generalized leapfrog methods // IMA Journal of Numerical Analysis. 1986. V. 6. № 4. P. 381–392. <https://doi.org/10.1093/imanum/6.4.381>
53. *Головизнин В.М., Самарский А.А.* Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Матем. моделирование. 1998. Т. 10. № 1. С. 86–100.
54. *Головизнин В.М., Самарский А.А.* Некоторые свойства разностной схемы “Кабаре” // Матем. моделирование. 1998. Т. 10. № 1. С. 101–116.
55. *Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карabasov С.А., Короткин И.А.* Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Изд-во МГУ, 2013.
56. *Karabasov S.A., Goloviznin V.M.* New efficient high-resolution method for nonlinear problems in aeroacoustics // AIAA J. 2007. V. 45. № 12. P. 2861–2871. <https://doi.org/10.2514/1.29796>
57. *Karabasov S.A., Berloff P.S., Goloviznin V.M.* Cabaret in the ocean gyres // Ocean Modelling. 2009. V. 30. № 2. P. 155–168. <https://doi.org/10.1016/j.ocemod.2009.06.009>
58. *Головизнин В.М., Исаков В.А.* Применение балансно-характеристической схемы для решения уравнений мелкой воды над неровным дном // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 7. С. 1142–1160. <https://doi.org/10.1134/S0965542517070089>
59. *Ковыркина О.А., Остапенко В.В.* О монотонности двухслойной по времени схемы Кабаре // Матем. моделирование 2012. Т. 24. № 9. С. 97–112. <https://doi.org/10.1134/S2070048213020051>
60. *Ковыркина О.А., Остапенко В.В.* О монотонности схемы КАБАРЕ, аппроксимирующей гиперболическое уравнение со знакопеременным характеристическим полем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 5. С. 796–815. <https://doi.org/10.1134/S0965542516050122>
61. *Ковыркина О.А., Остапенко В.В.* О монотонности схемы КАБАРЕ в многомерном случае // Докл. АН. 2015. Т. 462. № 4. С. 385–390. <https://doi.org/10.1134/S1064562415030217>
62. *Зюзина Н.А., Остапенко В.В.* О монотонности схемы КАБАРЕ, аппроксимирующей скалярный закон сохранения с выпуклым потоком // Докл. АН. 2016. Т. 466. № 5. С. 513–517. <https://doi.org/10.1134/S1064562416010282>

63. *Зюзина Н.А., Остапенко В.В.* Монотонная аппроксимация схемой КАБАРЕ скалярного закона сохранения в случае знакопеременного характеристического поля // Докл. АН. 2016. Т. 470. № 4. С. 375–379. <https://doi.org/10.1134/S1064562416050185>
64. *Остапенко В.В., Черевко А.А.* Применение схемы КАБАРЕ для расчета разрывных решений скалярного закона сохранения с невыпуклым потоком // Докл. АН. 2017. Т. 476. № 5. С. 518–522. <https://doi.org/10.1134/S1028335817100056>
65. *Зюзина Н.А., Остапенко В.В., Полунина Е.И.* Метод расщепления при аппроксимации схемой CABARET неоднородного скалярного закона сохранения // Сиб. журн. вычисл. матем. 2018. Т. 21. № 2. С. 185–200. <https://doi.org/10.1134/S1995423918020052>
66. *Reed W.H., Hill T.R.* Triangular mesh methods for the neutron transport equation // Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-UR-73-79, 1973. USA. <https://www.osti.gov/servlets/purl/4491151>
67. *Arnold D.N., Brezzi F., Cockburn B., Marini L.D.* Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems // SIAM J. Numer. Anal. 2002. V. 39. № 5. P. 1749–1779. <https://doi.org/10.1137/S0036142901384162>
68. *Peraire J., Persson P.O.* High-order discontinuous Galerkin methods for CFD // Adv. in CFD: Adaptive High-Order Meth. Comput. Fluid Dyn. 2011. V. 2. P. 119–152. https://doi.org/10.1142/9789814313193_0005
69. *Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф.* Использование разрывного метода Галеркина при решении задач газовой динамики // Матем. моделирование. 2014. Т. 26. № 1. С. 17–32. <https://doi.org/10.1134/S207004821404005X>
70. *Shu C.W.* High order WENO and DG methods for time-dependent convection-dominated PDEs: A brief survey of several recent developments // J. Comput. Phys. 2016. V. 316. P. 598–613. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.04.030>
71. *Волков А.В.* Особенности применения метода Галеркина к решению пространственных уравнений Навье–Стокса на неструктурированных гексаэдральных сетках // Уч. записки ЦАГИ. 2009. Т. 40. № 6. С. 41–59. https://www.elibrary.ru/item.asp?id_065602
72. *Yasue K., Furudate M., Ohnishi N., Sawada K.* Implicit discontinuous Galerkin method for RANS simulation utilizing pointwise relaxation algorithm // Commun. Comput. Phys. 2010. V. 7. № 3. P. 510–533. <https://doi.org/10.4208/cicp.2009.09.055>
73. *Dumbser M.* Arbitrary high order $P_N P_M$ schemes on unstructured meshes for the compressible Navier–Stokes equations // Comput. Fluid. 2010. V. 39. № 1. P. 60–76. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2009.07.003>
74. *Краснов М.М., Кучугов П.А., Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф.* Разрывный метод Галеркина на трехмерных тетраэдральных сетках. Использование операторного метода программирования // Матем. моделир. 2017. Т. 29. № 2. С. 3–22. <https://doi.org/10.1134/S2070048217050064>
75. *Luo H., Baum J.D. and Lohner R.* Fast p-multigrid discontinuous Galerkin method for compressible flow at all speeds // AIAA J. 2008. V. 46. № 3. P. 635–652. <https://doi.org/10.2514/1.28314>
76. *Luo H., Baum J.D., Lohner R.A.* Hermite WENO-based limiter for discontinuous Galerkin method on unstructured grids // J. Comput. Phys. 2007. V. 225. P. 686–713. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2006.12.017>
77. *Zhu J., Zhong X., Shu C.W., Qiu J.* Runge–Kutta discontinuous Galerkin method using a new type of WENO limiters on unstructured meshes // J. Comput. Phys. 2013. V. 248. P. 200–220. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2013.04.012>
78. *Волков А.В., Ляпунов С.В.* Монотонизация метода конечного элемента в задачах газовой динамики // Уч. записки ЦАГИ. 2009. Т. 40. № 4. С. 15–28. https://www.elibrary.ru/item.asp?id_904664
79. *Krivodonova L., Xin J., Remacle J.F., Chevogeon N., Flaherty J.* Shock detection and limiting with discontinuous Galerkin methods for hyperbolic conservation laws // Appl. Numer. Math. 2004. V. 48. № 3. P. 323–338. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2003.11.002>
80. *Krivodonova L.* Limiters for high-order discontinuous Galerkin methods // J. Comput. Phys. 2007. V. 226. № 1. P. 879–896. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.05.011>
81. *Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф.* Построение лимитера для разрывного метода Галеркина на основе усреднения решения // Матем. моделирование. 2018. Т. 30. № 5. С. 99–116. <https://doi.org/10.1134/S2070048219010101>
82. *Mocz P., Vogelsberger M., Sijacki D., Pakmor R., Hernquist L.* A discontinuous Galerkin method for solving the fluid and MHD equations in astrophysical simulations // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2014. V. 437. № 1. P. 397–414. <https://doi.org/10.1093/mnras/stt1890>

83. *Klockner A., Warburton T., Hesthaven J.S.* Nodal discontinuous Galerkin methods on graphics processors // *J. Comput. Phys.* 2009. V. 228. № 21. P. 7863–7882.
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.06.041>
84. *Chan J., Wang Z., Modave A., Remacle J., Warburton T.* GPU-accelerated discontinuous Galerkin methods on hybrid meshes // *J. Comput. Phys.* 2016. V. 318. P. 142–168.
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.04.003>
85. *Краснов М.М., Ладонкина М.Е.* Разрывный метод Галеркина на трехмерных тетраэдральных сетках. Применение шаблонного метапрограммирования языка C++ // *Программирование.* 2017. № 3. С. 41–53.
86. *Rogov B.V.* Dispersive and dissipative properties of the fully discrete bcompact schemes of the fourth order of spatial approximation for hyperbolic equations // *Appl. Numer. Math.* 2019. V. 139. P. 136–155.
<https://doi.org/10.1016/j.apnum.2019.01.008>
87. *Chikitkin A.V., Rogov B.V.* Family of central bcompact schemes with spectral resolution property for hyperbolic equations // *Appl. Numer. Math.* 2019. V. 142. P. 151–170.
<https://doi.org/10.1016/j.apnum.2019.03.007>
88. *Рогов Б.В., Михайловская М.Н.* О сходимости компактных разностных схем // *Матем. моделирование.* 2008. Т. 20. № 1. С. 99–116.
<https://doi.org/10.1134/S2070048209010104>
89. *Михайловская М.Н., Рогов Б.В.* Монотонные компактные схемы бегущего счета для систем уравнений гиперболического типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2012. Т. 52. № 4. С. 672–695.
<https://doi.org/10.1134/S0965542512040124>
90. *Рогов Б.В.* Высокоточная монотонная компактная схема бегущего счета для многомерных уравнений гиперболического типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2013. Т. 53. № 2. С. 264–274.
<https://doi.org/10.1134/S0965542513020097>
91. *Chikitkin A.V., Rogov B.V., Utyuzhnikov S.V.* High-order accurate monotone compact running scheme for multidimensional hyperbolic equations // *Appl. Numer. Math.* 2015. V. 93. P. 150–163.
<https://doi.org/10.1016/j.apnum.2014.02.008>
92. *Брагин М.Д., Рогов Б.В.* Высокоточные бикомпактные схемы для численного моделирования течений многокомпонентных газов с несколькими химическими реакциями // *Матем. моделирование.* 2020. Т. 32. № 6. С. 21–36.
<https://doi.org/10.1134/S2070048221010063>
93. *Брагин М.Д., Рогов Б.В.* Бикомпактные схемы для многомерного уравнения конвекции-диффузии // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2021. Т. 61. № 4. С. 625–643.
<https://doi.org/10.1134/S0965542521040023>
94. *Брагин М.Д., Рогов Б.В.* О точности бикомпактных схем в задаче о распаде вихря Тейлора–Грина // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2021. Т. 61. № 11. С. 1759–1778.
<https://doi.org/10.1134/S0965542521110051>
95. *Брагин М.Д., Рогов Б.В.* О точном пространственном расщеплении многомерного скалярного квазилинейного гиперболического закона сохранения // *Докл. АН.* 2016. Т. 469. № 2. С. 143–147.
<https://doi.org/10.1134/S1064562416040086>
96. *Брагин М.Д., Рогов Б.В.* Метод итерируемой приближенной факторизации операторов высокоточной бикомпактной схемы для систем многомерных неоднородных уравнений гиперболического типа // *Докл. АН.* 2017. Т. 473. № 3. С. 263–267.
<https://doi.org/10.1134/S1064562417020107>
97. *Брагин М.Д., Рогов Б.В.* Комбинированная многомерная бикомпактная схема, имеющая повышенную точность в областях влияния нестационарных ударных волн // *Докл. АН.* 2020. Т. 494. С. 9–13.
<https://doi.org/10.1134/S1064562420050282>
98. *Alexander R.* Diagonally implicit Runge–Kutta methods for stiff O.D.E.'s // *SIAM J. Numer. Anal.* 1977. V. 14. № 6. P. 1006–1021. <http://www.jstor.org/stable/2156678>
99. *Остапенко В.В., Хандеева Н.А.* О точности разностных схем при расчете взаимодействия ударных волн // *Докл. АН.* 2019. Т. 485. № 6. С. 40–45.
<https://doi.org/10.1134/S1028335819040128>