

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.6

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ БАЛАНСНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ
СХЕМА С УЛУЧШЕННЫМИ ДИСПЕРСИОННЫМИ СВОЙСТВАМИ
ДЛЯ ЗАДАЧ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ¹⁾

© 2022 г. Н. А. Афанасьев^{1,*}, Н. Э. Шагиров^{1,**}, В. М. Головизнин^{1,***}

¹ 119991 Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*e-mail: vmnaf@cs.msu.ru

**e-mail: nikkey.shagirov@yandex.ru

***e-mail: gol@ibrae.ac.ru

Поступила в редакцию 09.04.2022 г.
Переработанный вариант 09.04.2022 г.
Принята к публикации 07.07.2022 г.

Балансно-характеристические схемы для численного решения систем гиперболических уравнений объединяют достоинства консервативных методов улавливания скачка и метода характеристик. Они оперируют двумя типами переменных — консервативными и потоковыми. Консервативные переменные имеют смысл средних величин, относятся к серединам ячеек и вычисляются на основе метода конечного объема. Поточковые переменные определяют потоки на гранях расчетных ячеек и рассчитываются с использованием характеристической формы уравнений и локальных инвариантов Римана. Эта часть алгоритма допускает различные реализации, от которых зависят диссипативные и дисперсионные свойства алгоритмов. Так, в схеме КАБАРЕ потоковые величины вычисляются линейной экстраполяцией локальных инвариантов, но существуют и схемы с интерполяцией инвариантов и последующим переносом их по характеристикам (схемы с активными потоками). В последнем случае также возможны различные варианты. Результатам исследования одного из возможных вариантов балансно-характеристических схем интерполяционного типа для систем уравнений гиперболического типа и посвящена эта статья. Библ. 15. Табл. 1. Фиг. 13.

Ключевые слова: вычислительная гидродинамика, балансно-характеристические методы, гиперболические уравнения, инварианты Римана.

DOI: 10.31857/S0044466922110023

1. ВВЕДЕНИЕ

Вычислительная гидродинамика, как правило, имеет дело с системами законов сохранения гиперболического типа с возмущенной правой частью [1], [2]. К таким системам, в частности, относятся уравнения динамики стратифицированной жидкости со свободной границей, описывающие циркуляцию морей и океанов [3]. Сложная природа таких задач требует разработки численных методов высокого порядка точности, обладающих минимальным вычислительным шаблоном, применимых на сетках с произвольной топологией ячеек и эффективных с точки зрения параллелизации.

Одним из активно развивающихся подходов к решению систем уравнений гиперболического типа являются балансно-характеристические методы [4]. Такие методы позволяют учитывать не только дивергентную, но и характеристическую природу уравнений, реконструируя потоки с использованием локальных инвариантов Римана. Для балансно-характеристической схемы КАБАРЕ [5] был проведен полный цикл исследований, начиная от решения одномерного линейного уравнения переноса [6] и заканчивая решением многомерных задач газовой динамики [5] и вычислительной океанологии [7], [8].

Недостатком схемы КАБАРЕ является ограниченность сферы ее применения расчетными сетками с четырехугольными и гексагональными ячейками. Известные обобщения схемы КАБАРЕ на треугольные двумерные сетки [9], [10] обладают рядом недостатков, затрудняющих

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант 18-11-00163).

их применение для решения прикладных задач. Разработка балансно-характеристических схем с хорошими диссипативными и дисперсионными свойствами на расчетных сетках с более общей структурой ячеек является, таким образом, достаточно актуальной задачей.

В работе [2] был предложен балансно-характеристический метод решения систем гиперболического типа, основанный на параболической реконструкции инвариантов Римана внутри ячейки и последующим их переносом на новый временной слой. Метод был сформулирован для одномерных задач, а для многомерного случая были сформулированы основные идеи его обобщения. В ходе экспериментов выяснилось, что используемые в данном методе процедуры монотонизации на основе принципа максимума [11] неэффективны. Дальнейшее развитие предложенного метода оказалось нецелесообразным.

В настоящей статье предлагается балансно-характеристический метод второго порядка аппроксимации, также основанный на параболической реконструкции инвариантов Римана, но учитывающий интегральный смысл консервативных переменных метода. Для нового метода приводятся дисперсионные и диссипативные поверхности, анализируются его свойства в применении к линейному уравнению переноса. Метод тестируется на одномерных уравнениях переноса, Хопфа и мелкой воды.

Текст организован следующим образом. В разд. 2 приведены метод [2] и новый метод для линейного уравнения переноса, проанализированы их свойства. В разд. 3 описывается новый балансно-характеристический метод для одномерных систем законов сохранения гиперболического типа, обсуждаются его особенности. Тестовые расчеты для уравнений переноса, Хопфа и мелкой воды приводятся в разд. 4. Статья завершается разд. 5 с заключительными замечаниями.

2. ОПИСАНИЕ МЕТОДА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Рассмотрим простейшее одномерное линейное однородное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c = \text{const} > 0. \quad (1)$$

Здесь x – пространственная координата, t – время. Для определенности будем считать, что $(x, t) \in \Omega = [a, b] \times [0, T]$ и дополним наше уравнение начальным условием

$$u(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (2)$$

и некоторым граничным условием (например, условием периодичности).

Введем пространственно-временную сетку $\omega = \omega_h \times \omega_\tau$, где $\omega_h = \{x_j | a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b; x_{j+1} - x_j = h, j = 0, N-1\}$ – сетка по пространству, $\omega_\tau = \{t_n | 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_K = T; t_{n+1} - t_n = \tau, n = 0, K-1\}$ – сетка по времени. Определим в центрах пространственных ячеек так называемые консервативные переменные: $U_{j+1/2}^n$ – на целых слоях по времени, $U_{j+1/2}^{n+1/2}$ – на полуцелых слоях по времени. В узлах сетки ω определим так называемые потоковые переменные: u_j^n .

2.1. Метод ICCh-1 для линейного уравнения переноса

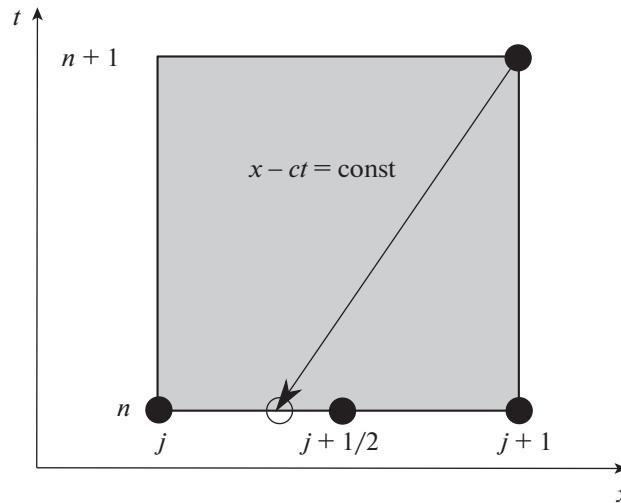
Ранее в работе [2] был предложен новый балансно-характеристический метод интерполяционного типа для решения уравнения (1):

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1/2} - U_{j+1/2}^n}{\tau/2} + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0, \quad (3)$$

$$u_{j+1}^{n+1} = (1 - 3r + 2r^2)u_{j+1}^n + 4r(1 - r)U_{j+1/2}^n + 2r(r - 0.5)u_j^n, \quad (4)$$

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1} - U_{j+1/2}^{n+1/2}}{\tau/2} + c \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} = 0, \quad (5)$$

где $r = c\tau/h$ – число Куранта–Фридрихса–Леви. Уравнения (3) и (5) (консервативные фазы) есть консервативные аппроксимации (1) по методу конечного объема в ячейке $[x_j, x_{j+1}]$ на слоях n и $n+1$ соответственно. Уравнение (4) (характеристическая фаза) представляет собой перенос инварианта Римана u по характеристике $x - ct = \text{const}$, опущенной из точки (x_{j+1}, t_{n+1}) на слой по



Фиг. 1. Шаблон характеристической фазы алгоритма.

времени n (см. фиг. 1). При этом переносимое значение u восполняется по параболе $P_2(x)$, построенной по 3 значениям на нижнем слое: $u_{j+1}^{n+1} = P_2(x_{j+1} - c\tau)$,

$$P_2(x_{j+1}) = u_{j+1}^n, \tag{6}$$

$$P_2(x_j) = u_j^n, \tag{7}$$

$$P_2(x_{j+1/2}) = U_{j+1/2}^n.$$

Метод *ICCh-1* (*interpolatory conservative-characteristic 1*) (3)–(5) является устойчивым при числах Куранта $r \in [0, 1]$ и обладает вторым порядком аппроксимации, но, в отличие от балансно-характеристической схемы КАБАРЕ [5], не является обратимым по времени. Для получения монотонного решения метод также дополняется процедурой нелинейной коррекции потоков на основе принципа максимума [11] после характеристической фазы (4):

$$u_{j+1}^{n+1} = \begin{cases} \tilde{u}_{j+1}^{n+1}, & \text{если } [\min u]_{j+1/2}^n \leq \tilde{u}_{j+1}^{n+1} \leq [\max u]_{j+1/2}^n, \\ [\min u]_{j+1/2}^n, & \text{если } \tilde{u}_{j+1}^{n+1} < [\min u]_{j+1/2}^n, \\ [\max u]_{j+1/2}^n, & \text{если } \tilde{u}_{j+1}^{n+1} > [\max u]_{j+1/2}^n, \end{cases} \tag{8}$$

где \tilde{u}_{j+1}^{n+1} – потоковое значение, полученное в результате характеристической фазы (4), и

$$[\min u]_{j+1/2}^n = \min\{u_j^n, U_{j+1/2}^n, u_{j+1}^n\},$$

$$[\max u]_{j+1/2}^n = \max\{u_j^n, U_{j+1/2}^n, u_{j+1}^n\}.$$

Метод *ICCh-1* разрабатывался в первую очередь для того, чтобы распространить его на двумерные треугольные и трехмерные тетраэдральные сетки, на которых применение схемы КАБАРЕ достаточно проблематично [9], [10]. Но данный метод обладает нормальной дисперсией (т.е. бегущие волны всех гармоник запаздывают по отношению к аналитическому решению) при малых числах Куранта, что отражено на его дисперсионной поверхности (см. фиг. 3). Экспериментальные расчеты показывают, что нормальная дисперсия метода делает процедуру монотонизации (8) неэффективной, и затрудняет использование метода даже на простейших нелинейных уравнениях гиперболического типа. Актуальной становится разработка интерполяционного балансно-характеристического метода, обладающего схожим с методом *ICCh-1* вычислительным шаблоном и хотя бы частично аномальной дисперсией при малых числах Куранта.

2.2. Метод ICCh-2 для линейного уравнения переноса

Для построения модифицированного балансно-характеристического метода интерполяционного типа изменим характеристическую фазу метода ICCh-1 (4), а консервативные фазы (3) и (5) оставим прежними. Как и ранее, потоковое значение u_{j+1}^{n+1} мы будем переносить по характеристике $x - ct = \text{const}$, опущенной из точки (x_{j+1}, t_{n+1}) на слой по времени n (см. фиг. 1), но функцию $u(x)$ на нижнем слое восполним с помощью другой параболы $\tilde{P}_2(x)$.

Так как консервативные фазы (3), (5) есть аппроксимации закона сохранения (1), то консервативные переменные $U_{j+1/2}^n$ приближают средние значения $u(x, t_n)$ по ячейкам $[x_j, x_{j+1}]$:

$$U_{j+1/2}^n \approx \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} u(x, t_n) dx.$$

Воспользуемся этим свойством и построим на нижнем слое параболу $\tilde{P}_2(x)$, удовлетворяющую условиям (6), (7) и интегральному условию:

$$\frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \tilde{P}_2(x) dx = U_{j+1/2}^n.$$

Тогда перенос потокового значения по характеристике $u_{j+1}^{n+1} = \tilde{P}_2(x_{j+1} - c\tau)$ приведет к отличной от (4) характеристической фазе:

$$u_{j+1}^{n+1} = (1 - 4r + 3r^2)u_{j+1}^n + 6r(1 - r)U_{j+1/2}^n + r(3r - 2)u_j^n. \quad (9)$$

Отметим, что способ параболической реконструкции инварианта Римана (9) также используется в V-схеме Ван Лиры [12] и методе *Active Flux* третьего порядка [13]. Схему (3), (9), (5) назовем ICCh-2-методом (interpolatory conservative-characteristic 2).

2.3. Свойства метода ICCh-2

Для анализа диссипативных и дисперсионных свойств полученной разностной схемы подставим в уравнения (3), (9), (5) частное решение в виде бегущей волны:

$$u_j^n = A \exp\{i(\omega n\tau - kjh)\} = Aq^n \exp\{-i(kjh)\}, \quad q = e^{i\omega\tau},$$

$$U_{j+1/2}^n = B \exp\{i(\omega n\tau - k(j + 0.5)h)\} = Bq^n \exp\{-i[k(j + 0.5)h]\}.$$

Таким образом, получим следующее квадратное уравнение для определения q :

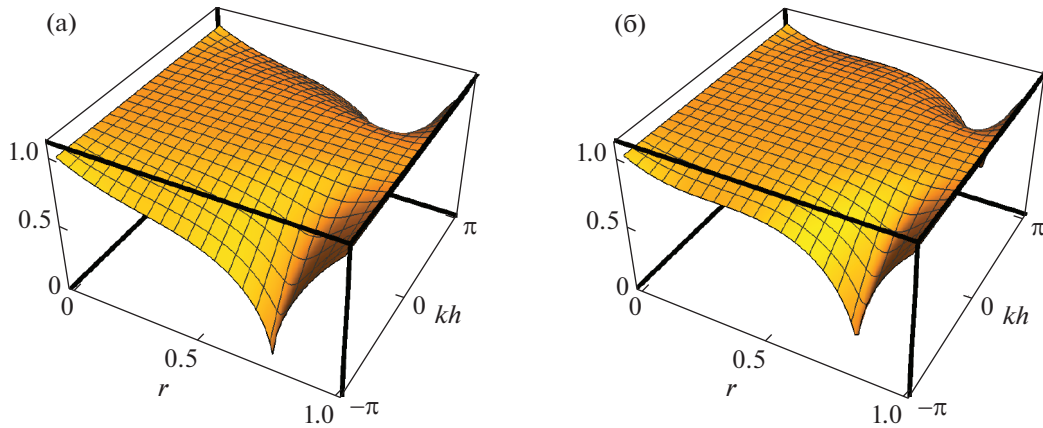
$$q^2 + q[4r - 3r^3 - 2 + e^{ikh}(3r^3 - 6r^2 + 2r)] + 1 - 4r + 6r^2 - 3r^3 + e^{ikh}(3r^3 - 2r) = 0.$$

Данное уравнение имеет два корня: $q_1 = q_1(r, kh)$, $q_2 = q_2(r, kh)$, которые зависят от приведенного волнового числа $kh \in [-\pi, \pi]$, а также от числа Куранта r . Модули этих корней определяют область устойчивости схемы: схема устойчива, если $|q_1| \leq 1$ и $|q_2| \leq 1$. Относительная дисперсия разностной схемы задается величиной

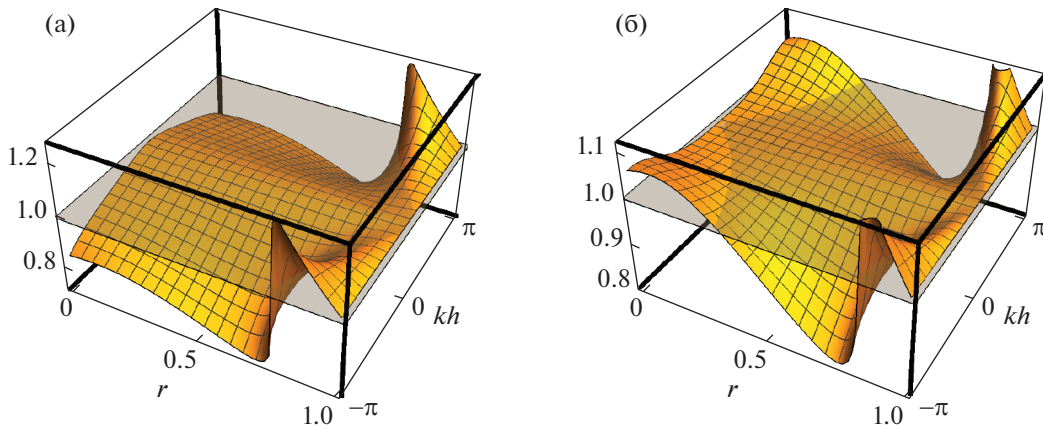
$$\gamma(r, kh) = \frac{\omega}{kc} = -\frac{i}{rkh} \ln[q(r, kh)]$$

и определяет степень отклонения фазовой скорости бегущей волны относительно аналитического решения уравнения (1). Дисперсия называется нормальной, если $|\gamma(r, kh)| < 1$ (т.е. бегущая волна отстает от аналитического решения), и аномальной, если $|\gamma(r, kh)| > 1$ (т.е. бегущая волна опережает аналитическое решение). Отметим, что один из двух корней (обозначим его как q_2) всегда является паразитным, и не несет в себе никакой полезной информации о свойствах схемы (кроме разве что определения области неустойчивости схемы при $|q_2| > 1$).

На фиг. 2 приведены диссипативные поверхности первых корней $z = |q_1(r, kh)|$ методов ICCh-1 (а) и ICCh-2 (б) для чисел Куранта $r \in [0, 1]$, на фиг. 3 – дисперсионные поверхности первых корней $z = |\gamma_1(r, kh)|$ методов ICCh-1 (а) и ICCh-2 (б). На фиг. 4 также дополнительно приведены дис-



Фиг. 2. Диссипативные поверхности первых корней $z = |q_1(r, kh)|$ методов *ICCh-1* (а) и *ICCh-2* (б).



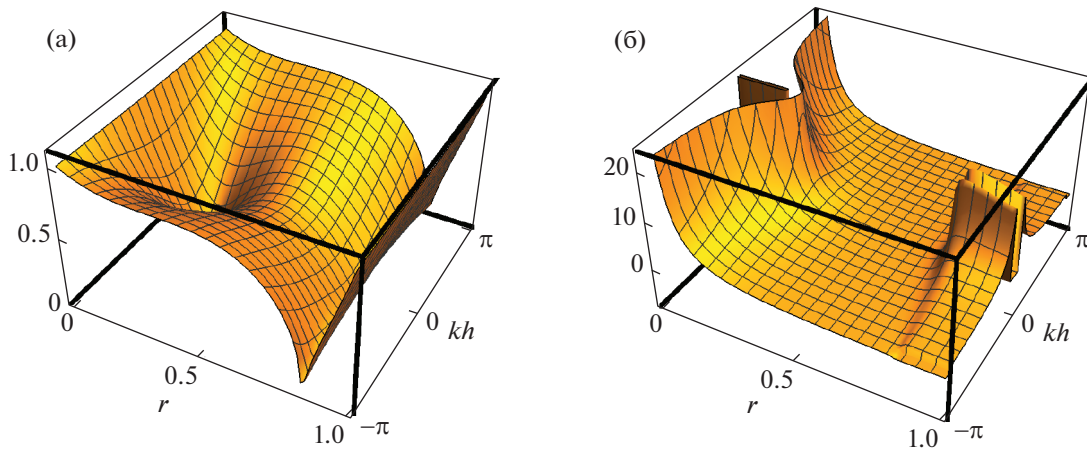
Фиг. 3. Дисперсионные поверхности первых корней $z = |\gamma_1(r, kh)|$ методов *ICCh-1* (а) и *ICCh-2* (б).

сипативная (а) и дисперсионная (б) поверхности второго корня метода *ICCh-2*. Поверхности для чисел Куранта $r \in (1, +\infty)$ не приводятся, так как в этой области оба метода являются неустойчивыми ($|q_1| > 1$).

Как видно из диссипативных поверхностей на фиг. 2, метод *ICCh-2*, как и метод *ICCh-1*, устойчив при $0 \leq r \leq 1$ и необратим по времени, но при этом обладает меньшей диссипацией. Дисперсионные поверхности на фиг. 3 показывают, что метод *ICCh-2* обладает аномальной дисперсией при малых числах Куранта, но только для высоких гармоник. Метод *ICCh-1* при этом обладает только нормальной дисперсией в области малых чисел Куранта. Именно наличие области аномальной дисперсии позволяет частично монотонизировать метод *ICCh-2*, что будет показано на тестовых расчетах.

В работе [2] было показано, что метод *ICCh-1* обладает вторым порядком аппроксимации как по времени, так и по пространству. Покажем, что и для метода *ICCh-2* это выполняется. Для этого просуммируем уравнения (3), (5) и подставим вместо потоковых значений u_j^{n+1} и u_{j+1}^{n+1} выражения, задаваемые (9):

$$\begin{aligned} & \frac{U_{j+1/2}^{n+1} - U_{j+1/2}^n}{\tau} + \frac{c}{2} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} + \frac{c}{2} \left[(1 - 4r + 3r^2) \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} + \right. \\ & \left. + 6r(1 - r) \frac{U_{j+1/2}^n - U_{j-1/2}^n}{h} + r(3r - 2) \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} \right] = 0. \end{aligned} \tag{10}$$



Фиг. 4. Диссипативная поверхность $z = |q_2(r, kh)|$ и дисперсионная поверхность $z = |\gamma_2(r, kh)|$ второго (паразитного) корня метода *ICCh-2*.

Заменяя в (10) значения сеточных функций на значения аналитического решения $u(x, t)$ в соответствующих точках и раскладывая $u(x, t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(x_{j+1/2}, t_n)$, можно получить:

$$u_t(x_{j+1/2}, t_n) + cu_x(x_{j+1/2}, t_n) - \frac{c^2\tau}{2}u_{xx}(x_{j+1/2}, t_n) + \frac{\tau}{2}u_{tt}(x_{j+1/2}, t_n) + \left(\frac{ch^2}{24} - \frac{c^2\tau h}{8} + \frac{5c^3\tau^2}{24}\right)u_{xxx}(x_{j+1/2}, t_n) + \dots = 0. \tag{11}$$

Воспользовавшись в (11) тем, что $u_t + cu_x = 0$ и $u_{tt} = c^2u_{xx}$ (что получается дифференцированием (1) по времени), получим следующий вид для погрешности аппроксимации в точке $(x_{j+1/2}, t_n)$:

$$\Psi_{j+1/2}^n = \left(\frac{ch^2}{24} - \frac{c^2\tau h}{8} + \frac{5c^3\tau^2}{24}\right)u_{xxx}(x_{j+1/2}, t_n) + \dots \tag{12}$$

Учитывая, что при решении уравнений гиперболического типа явными методами τ и h есть величины одного порядка, (12) позволяет заключить, что метод *ICCh-2* обладает вторым порядком аппроксимации. Как и метод *ICCh-1*, для получения монотонного решения метод *ICCh-2* надо дополнять процедурой монотонизации (8).

3. ОПИСАНИЕ МЕТОДА ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Рассмотрим систему одномерных квазилинейных законов сохранения:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial x} = \mathbf{Q}(x, t, \mathbf{u}), \tag{13}$$

где \mathbf{u} – вектор неизвестных, $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ – векторная функция потоков, $\mathbf{Q}(x, t, \mathbf{u})$ – векторная функция источников и стоков. Систему (13) будем называть *консервативной формой* уравнений. Раскрывая в (13) производную по x , получим так называемую *простую форму* уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A(\mathbf{u})\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{Q}(x, t, \mathbf{u}), \tag{14}$$

где $A(\mathbf{u})$ – матрица Якоби $\mathbf{F}(\mathbf{u})$. Предполагая, что система (14) является гиперболической (т.е. все собственные значения $A(\mathbf{u})$ действительны и имеется полный базис из собственных векторов) и что все аналитические выражения для инвариантов Римана известны (что выполняется для уравнения Хопфа и уравнений мелкой воды), получаем *характеристическую форму* уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial t} + \Lambda(\mathbf{u})\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial x} = \widehat{\mathbf{Q}}(x, t, \mathbf{I}),$$

где $\mathbf{I} = \mathbf{I}(\mathbf{u}) = \{I_k\}$ – вектор инвариантов Римана, $\Lambda(\mathbf{u}) = \text{diag}\{\lambda_k\}$ – диагональная матрица собственных значений матрицы $A(\mathbf{u})$, $\hat{\mathbf{Q}}(x, t, \mathbf{I})$ – некоторая правая часть (точный вид которой нам неважен).

Метод *ICCh-2* для системы законов сохранения (13) на неравномерной пространственно-временной сетке с шагами $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ и $h_{j+1/2} = x_{j+1} - x_j$ состоит из 3 фаз.

Фаза 1 (консервативная). Явное вычисление консервативных переменных на полуцелом слое $\mathbf{U}_{j+1/2}^{n+1/2}$ с помощью аппроксимации консервативных уравнений (13):

$$\frac{\mathbf{U}_{j+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{U}_{j+1/2}^n}{\tau_n/2} + \frac{\mathbf{F}(\mathbf{u}_{j+1}^n) - \mathbf{F}(\mathbf{u}_j^n)}{h_{j+1/2}} = \mathbf{Q}_{j+1/2}^n.$$

После вычисления консервативных переменных на промежуточном слое находятся собственные значения $(\lambda_k)_{j+1/2}^{n+1/2}$, которые будут определять направление переноса инвариантов Римана в характеристической фазе алгоритма.

Фаза 2 (характеристическая). Явное вычисление потоковых значений инвариантов Римана на новом временном слое \mathbf{I}_j^{n+1} с помощью переноса по соответствующим характеристикам (см. обозначения на фиг. 5):

$$(\tilde{I}_k)_j^{n+1} = \begin{cases} \varphi[(I_k)_j^n, (I_k)_{cL}^n, (I_k)_L^n, r_L] + \tau_n(\hat{Q}_k)_{cL}^n, & \text{если } (\lambda_k)_{cL}^{n+1/2} > 0 \text{ и } (\lambda_k)_{cR}^{n+1/2} > 0, \\ \varphi[(I_k)_j^n, (I_k)_{cR}^n, (I_k)_R^n, r_R] + \tau_n(\hat{Q}_k)_{cR}^n, & \text{если } (\lambda_k)_{cL}^{n+1/2} < 0 \text{ и } (\lambda_k)_{cR}^{n+1/2} < 0, \\ 0.5[(I_k)_{cL}^{n+1/2} + (I_k)_{cR}^{n+1/2}] + 0.5\tau_n[(\hat{Q}_k)_{cL}^n + (\hat{Q}_k)_{cR}^n] & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$r_L = (\lambda_k)_{cL}^{n+1/2} \frac{\tau_n}{h_{j-1/2}}, \quad r_R = \left| (\lambda_k)_{cR}^{n+1/2} \right| \frac{\tau_n}{h_{j+1/2}}, \tag{15}$$

$$\varphi[\alpha, \beta, \gamma, r] = (1 - 4r + 3r^2)\alpha + 6r(1 - r)\beta + r(3r - 2)\gamma,$$

$$(\hat{Q}_k)_{j+1/2}^n = \frac{(I_k)_{j+1/2}^{n+1/2} - (I_k)_{j+1/2}^n}{\tau_n/2} + (\lambda_k)_{j+1/2}^{n+1/2} \frac{(I_k)_{j+1}^n - (I_k)_j^n}{h_{j+1/2}}.$$

Требуемые значения инвариантов Римана на слоях n и $n + 1/2$ при этом вычисляются по известным аналитическим формулам $\mathbf{I} = \mathbf{I}(\mathbf{u})$. После переноса (15) инварианты Римана корректируются с помощью процедуры монотонизации на основе принципа максимума:

$$(I_k)_j^{n+1} = \begin{cases} \text{Max Min}[(\tilde{I}_k)_j^{n+1}]_{j-1/2}, & \text{если } (\lambda_k)_{j-1/2}^{n+1/2} > 0 \text{ и } (\lambda_k)_{j+1/2}^{n+1/2} > 0, \\ \text{Max Min}[(\tilde{I}_k)_j^{n+1}]_{j+1/2}, & \text{если } (\lambda_k)_{j-1/2}^{n+1/2} < 0 \text{ и } (\lambda_k)_{j+1/2}^{n+1/2} < 0, \\ (\tilde{I}_k)_j^{n+1} & \text{иначе,} \end{cases}$$

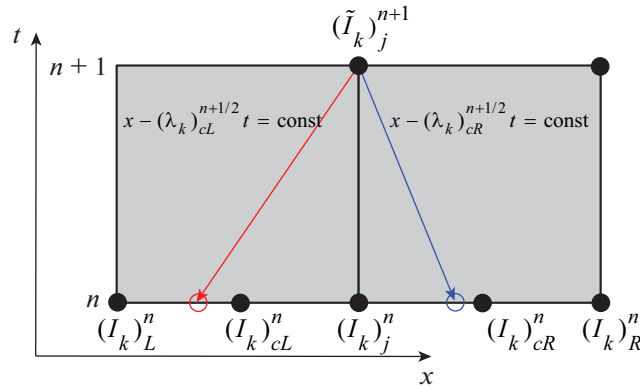
$$\text{Max Min}[(\tilde{I}_k)_j^{n+1}]_{j+1/2} = \begin{cases} (\tilde{I}_k)_j^{n+1}, & \text{если } \min(I_k)_{j+1/2}^n \leq (\tilde{I}_k)_j^{n+1} \leq \max(I_k)_{j+1/2}^n, \\ \max(I_k)_{j+1/2}^n, & \text{если } (\tilde{I}_k)_j^{n+1} > \max(I_k)_{j+1/2}^n, \\ \min(I_k)_{j+1/2}^n, & \text{если } (\tilde{I}_k)_j^{n+1} < \min(I_k)_{j+1/2}^n, \end{cases} \tag{16}$$

$$\min(I_k)_{j+1/2}^n = \min\{(I_k)_j^n, (I_k)_{j+1/2}^n, (I_k)_{j+1}^n\} + \tau_n(\hat{Q}_k)_{j+1/2}^n,$$

$$\max(I_k)_{j+1/2}^n = \max\{(I_k)_j^n, (I_k)_{j+1/2}^n, (I_k)_{j+1}^n\} + \tau_n(\hat{Q}_k)_{j+1/2}^n.$$

После нахождения полного набора инвариантов Римана на следующем слое по времени $n + 1$ по известным аналитическим формулам вычисляются потоковые значения исходных неизвестных $\mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}(\mathbf{I}_j^{n+1})$.

Отметим, что в процессе проведения расчетов могут возникать так называемые звуковые точки, когда в один пространственно-временной узел приходят либо 0 ($(\lambda_k)_{j-1/2}^{n+1/2} < 0$ и $(\lambda_k)_{j+1/2}^{n+1/2} > 0$), либо 2 инварианта Римана ($(\lambda_k)_{j-1/2}^{n+1/2} > 0$ и $(\lambda_k)_{j+1/2}^{n+1/2} < 0$). В таких случаях требуется отдельный алгоритм обработки звуковых точек. В алгоритме (15) представлен самый простой способ такой об-



Фиг. 5. Шаблон переноса (15) инварианта Римана $(I_k)^{n+1}_j$ слева (красный) и справа (синий).

работки, когда на звуковых точках инвариант осредняется по значениям из центров левой и правой пространственно-временных ячеек. Более сложные алгоритмы обработки звуковых точек представлены в [14], [15].

Фаза 3 (консервативная). Вычисление консервативных переменных на следующем слое $U_{j+1/2}^{n+1}$ с помощью аппроксимации консервативных уравнений (13):

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1} - U_{j+1/2}^{n+1/2}}{\tau_n/2} + \frac{F(u_{j+1}^{n+1}) - F(u_j^{n+1})}{h_{j+1/2}} = Q_{j+1/2}^{n+1}. \tag{17}$$

Схема (17) является, вообще говоря, неявной в силу наличия в правой части члена $Q_{j+1/2}^{n+1}$, зависящего от еще не известной консервативной переменной $U_{j+1/2}^{n+1}$. Тем не менее данное уравнение удастся разрешить явно при линейной зависимости $Q(x, t, u)$ от u .

В конце третьей фазы с помощью собственных значений на новом слое $(\lambda_k)^{n+1}_{j+1/2}$ по заданному числу Куранта $CFL \in (0, 1]$ вычисляется величина следующего шага по времени:

$$\tau_{n+1} = CFL \cdot \min_k \min_j \left[\frac{h_{j+1/2}}{|(\lambda_k)^{n+1}_{j+1/2}|} \right].$$

4. ТЕСТОВЫЕ РАСЧЕТЫ

В данном разделе представлены результаты применения предложенного метода *ICCh-2* к решению некоторых уравнений и систем уравнений в частных производных гиперболического типа. Рассматривались начально-краевые задачи для линейного уравнения переноса, уравнения Хопфа, а также для системы уравнений мелкой воды над плоским дном. Для сравнения приводятся результаты расчетов по схеме *КАБАРЕ* и методу *ICCh-1*.

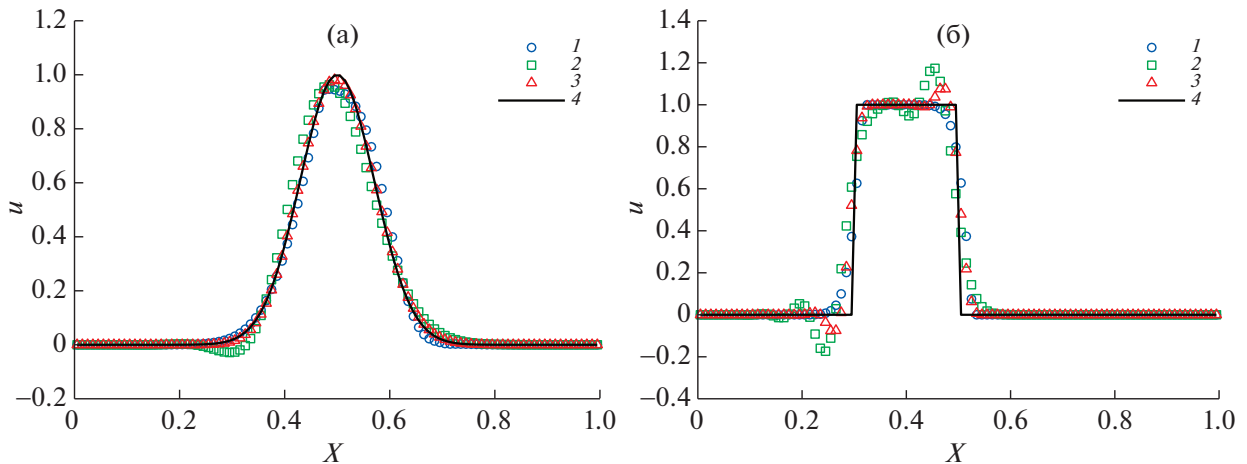
4.1. Линейное уравнение переноса

Предложенный метод *ICCh-2* был протестирован на задаче (1), (2) с периодическими граничными условиями на отрезке $x \in [0, 1]$ при двух видах начальных условий – достаточно гладком и разрывном. В качестве гладкого начального условия был взят “одиночный гауссиан”

$$f(x) = \exp[-(x - x_0)^2/\Delta^2]; \quad x_0 = 0.5, \quad \Delta = 0.1, \tag{18}$$

в качестве разрывного – прямоугольник:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0.3 \leq x \leq 0.5, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{19}$$



Фиг. 6. Перенос начальных профилей (18), (19) для уравнения переноса (1) на 100 ячейках, $CFL = 0.3$. (а) – результат переноса начального профиля (18) на момент времени $t = 7.0$; (б) – результат переноса начального профиля (19) на момент времени $t = 1.0$. 1 – решение, полученное по схеме КАБАРЕ, 2 – решение, полученное методом *ICCh-1*, 3 – решение, полученное методом *ICCh-2*, 4 – аналитическое решение.

Скорость переноса c принималась равной единице.

Начальная инициализация потоковых и консервативных переменных проводилась следующим образом. В качестве начальных значений потоковых переменных использовались значения начального профиля в соответствующих узлах сетки ω_h , значения консервативных переменных принимались равными полусуммам значений соседних потоковых переменных:

$$u_j^0 = f(x_j), \quad j = \overline{0, N}, \quad (20)$$

$$U_{j+1/2}^0 = 0.5(u_j^0 + u_{j+1}^0), \quad j = \overline{0, N-1}. \quad (21)$$

Сравнивались результаты, полученные по методам *ICCh-2* и *ICCh-1*, а также по схеме КАБАРЕ [4]. На фиг. 6 представлены результаты расчетов переноса начальных профилей (18), (19) на равномерной сетке из $N = 100$ ячеек при числе Куранта $CFL = 0.3$. Картинка (а) соответствует результату переноса начального профиля (18) и приводится на момент времени $t = 7.0$, что соответствует 7 прохождениям профиля по отрезку $[0, 1]$. Картинка (б) соответствует результату переноса начального профиля (19) и приводится на момент времени $t = 1.0$, что соответствует 1 прохождению профиля по отрезку $[0, 1]$. Результаты на фиг. 6 показывают, что в случае переноса гладкого профиля при включенных процедурах монотонизации (8) метод *ICCh-2* обладает меньшей численной дисперсией и диссипацией, чем методы КАБАРЕ и *ICCh-1*. При переносе разрывного профиля как у метода *ICCh-1*, так и у метода *ICCh-2* возникают немонотонности, которые не удастся сгладить процедурой монотонизации. Тем не менее, так как метод *ICCh-2* при $CFL = 0.3$ обладает частичной аномальной дисперсией, возникающие при его использовании немонотонности минимальны.

В табл. 1 также приведены результаты численных исследований сходимости метода *ICCh-2* на переносе гладкого профиля (18) при отключенной процедуре монотонизации (8). В табл. 1 указаны ошибки по C -норме $\|u\|_c = \max_j |u_{j+1/2}|$ и порядки сходимости (*OOC* – order of convergence) на момент времени $t = 1.0$ на разных сетках. Результаты в табл. 1 позволяют заключить, что метод *ICCh-2* обладает вторым порядком сходимости.

4.2. Уравнение Хопфа

Уравнение Хопфа имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0. \quad (22)$$

Таблица 1. Ошибки по C -норме и порядки сходимости (OOC) для переноса гладкого профиля (18) по методу $ICCh-2$

Ячейки	C -ошибка $CFL = 0.3$	OOC $CFL = 0.3$	C -ошибка $CFL = 0.6$	OOC $CFL = 0.6$	C -ошибка $CFL = 0.9$	OOC $CFL = 0.9$
100	4.57×10^{-3}	—	1.25×10^{-2}	—	2.5×10^{-2}	—
200	1.11×10^{-3}	2.04	3.17×10^{-3}	1.98	6.69×10^{-3}	1.90
400	2.71×10^{-4}	2.03	7.94×10^{-4}	2.00	1.7×10^{-3}	1.98
800	6.7×10^{-5}	2.02	1.99×10^{-4}	2.00	4.26×10^{-4}	2.00
1600	1.7×10^{-5}	1.98	5×10^{-5}	1.99	1.07×10^{-4}	1.99

Единственный инвариант Римана уравнения (22) и скорость его переноса совпадают с неизвестной функцией u .

Рассмотрим уравнение (22) в области $\Omega = [0, 1] \times [0, T]$ с периодическими граничными условиями и начальным условием в виде прямоугольника:

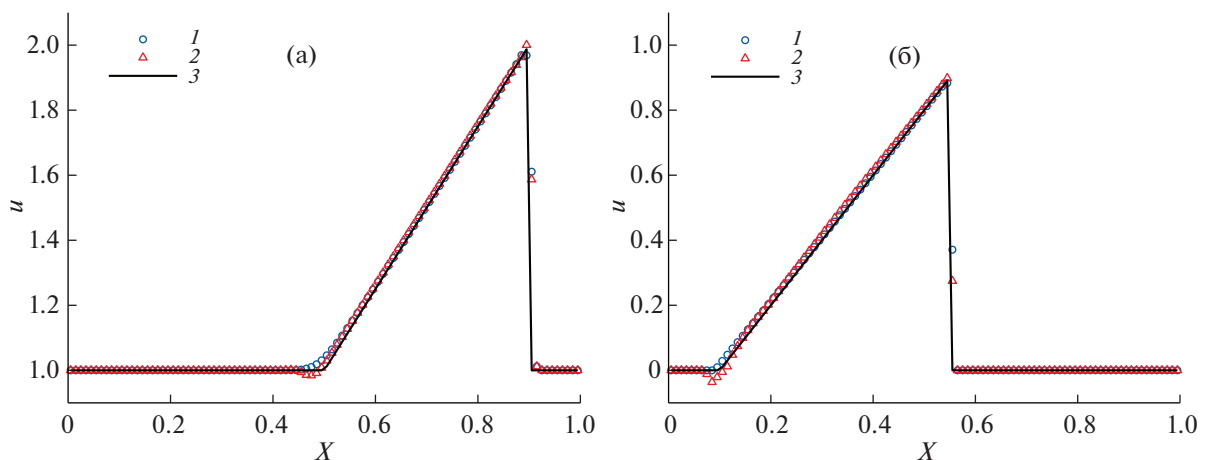
$$u_0(x) = \begin{cases} u_2, & 0.1 \leq x \leq 0.3, \\ u_1 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (23)$$

На фиг. 7 представлены результаты расчетов переноса начального профиля (23) при $u_1 = 1, u_2 = 2$ на момент времени $t = 0.4$ (а) и при $u_1 = 0, u_2 = 1$ на момент времени $t = 0.5$ (б) на равномерной сетке из $N = 100$ ячеек при числе Куранта $CFL = 0.3$. Начальные значения потоковых и консервативных переменных задавались аналогично (20), (21). В обоих расчетах у метода $ICCh-2$ возникают некоторые немонотонности слева от негладких участков решения. При этом для расчета задачи (б) это приводит к тому, что решение опускается ниже 0 и возникает звуковая точка, алгоритм обработки которой (15) не приводит к аварийному останову. Отметим, что схема КАБАРЕ не обладает данным недостатком, так как процедура монотонизации (16) не дает решению уйти ниже 0.

4.3. Уравнения мелкой воды

Рассмотрим систему одномерных уравнений мелкой воды над ровным дном:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Hu}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Hu}{\partial t} + \frac{\partial Hu^2}{\partial x} + \frac{g}{2} \frac{\partial H^2}{\partial x} = 0. \quad (24)$$



Фиг. 7. Перенос начального профиля (23) для уравнения Хопфа (22) на 100 ячейках при $CFL = 0.3$: (а) — $u_1 = 1, u_2 = 2$, профиль при $t = 0.4$; (б) — $u_1 = 0, u_2 = 1$, профиль при $t = 0.5$. 1 — решение, полученное по схеме КАБАРЕ, 2 — решение, полученное методом $ICCh-2$, 3 — аналитическое решение.

Здесь $H(x, t)$ – глубина жидкости, $u(x, t)$ – горизонтальная скорость столба жидкости, g – ускорение свободного падения. Система (24) обладает следующими инвариантами Римана I_k и соответствующими им собственными значениями λ_k :

$$\begin{aligned} I_1 &= u + 2\sqrt{gH}, & \lambda_1 &= u + \sqrt{gH}, \\ I_2 &= u - 2\sqrt{gH}, & \lambda_2 &= u - \sqrt{gH}. \end{aligned}$$

Тестирование метода *ICCh-2* проводилось для различных задач Римана для дозвуковых, трансзвуковых и сверхзвуковых течений:

$$H_0(x) = \begin{cases} H_L, & a \leq x \leq x^*, \\ H_R, & x^* < x \leq b, \end{cases} \quad u_0(x) = \begin{cases} u_L, & a \leq x \leq x^*, \\ u_R, & x^* < x \leq b. \end{cases} \quad (25)$$

Граничные условия мы не приводим, так как все расчеты для следующих тестовых задач останавливаются до того, как какие-либо волны разрежения или ударные волны достигнут границ рассматриваемой области.

4.3.1. Дозвуковые течения. Ниже представлены результаты по методу *ICCh-2* и схеме КАБАРЕ для строго дозвуковых течений ($|u| < \sqrt{gH}$). Были рассмотрены следующие задачи Римана (25) на сегменте $x \in [0, 1]$:

1) волна разрежения слева, ударная волна справа

$$H_L = 2, \quad H_R = 1, \quad u_L = u_R = 0, \quad x^* = 0.5; \quad (26)$$

2) две волны разрежения

$$H_L = H_R = 1, \quad u_L = -1, \quad u_R = 1, \quad x^* = 0.5; \quad (27)$$

3) сталкивающиеся ударные волны

$$H_L = H_R = 1, \quad u_L = 1, \quad u_R = -1, \quad x^* = 0.5. \quad (28)$$

На фиг. 8–10 приведены результаты расчетов задач Римана (26), (27) и (28), соответственно, по методу *ICCh-2* и схеме КАБАРЕ для $CFL = 0.3$. Отметим основные свойства решений, полученных по методу *ICCh-2*: разрывы, как и в схеме КАБАРЕ, занимают 2–4 расчетные ячейки; в областях негладкости решений в силу частично аномальной дисперсии схемы возникают некритичные немонотонности; волны разрежения передаются достаточно точно и без артефактов. Отметим, что схема КАБАРЕ позволяет сохранить “острые” участки решения в верхних частях волн разрежения [15]. Метод *ICCh-2* таким свойством не обладает и сглаживает все области негладкости решения.

4.3.2. Сверхзвуковое течение. Здесь представлен пример расчета по методу *ICCh-2* и схеме КАБАРЕ для случая строго сверхзвукового течения ($|u| > \sqrt{gH}$). Рассматривалась следующая задача Римана (25) на сегменте $x \in [0, 50]$:

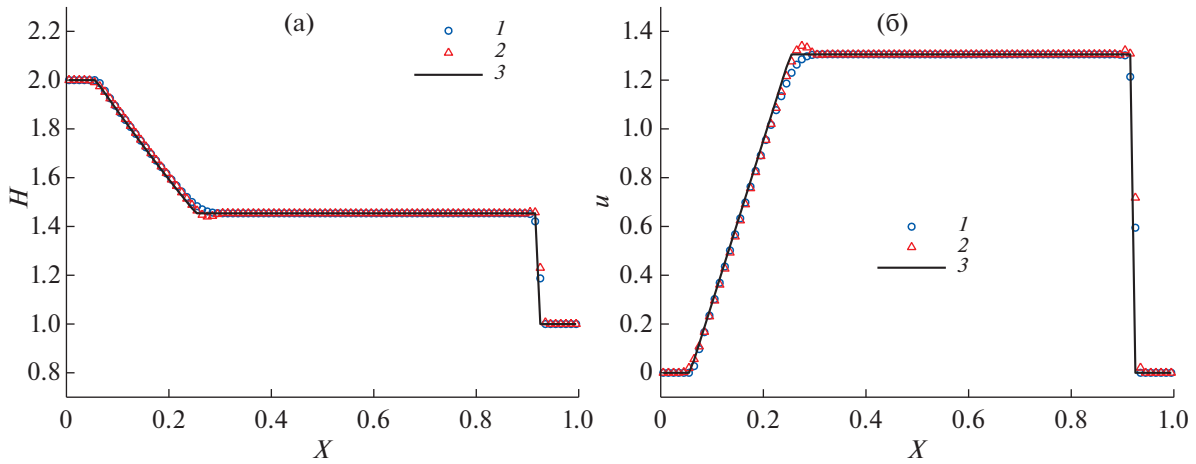
$$H_L = 1, \quad H_R = 0.1, \quad u_L = 5, \quad u_R = 2.5, \quad x^* = 10.0. \quad (29)$$

На фиг. 11 представлен результат расчета задачи (29) на равномерной сетке из $N = 101$ ячеек на момент времени $t = 5.0$. В случае строго сверхзвукового течения метод *ICCh-2* дает такой же удовлетворительный результат, как и для строго дозвуковых течений, и для него справедливы те же замечания.

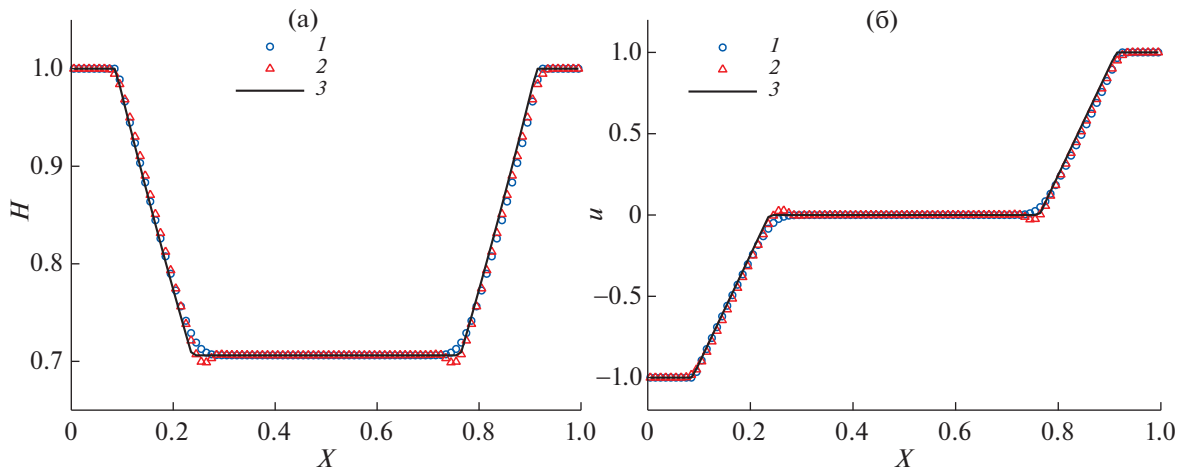
4.3.3 Трансзвуковые течения. Ниже представлены результаты расчетов нескольких задач Римана о трансзвуковом течении, для которых требуется применение алгоритма обработки звуковых точек. Все балансно-характеристические методы нуждаются в подобных алгоритмах при расчете трансзвуковых задач, и для каждой системы уравнений нужен, вообще говоря, отдельный алгоритм. В случае схемы КАБАРЕ для уравнений мелкой воды наилучший алгоритм обработки звуковых точек был представлен в [15]. В случае метода *ICCh-2* наиболее удовлетворительные результаты показал простейший алгоритм, представленный в (15), результаты расчетов для которого и приводятся в данном разделе.

Рассмотрим следующую трансзвуковую задачу Римана (25) на сегменте $x \in [0, 50]$ (так называемый первый тест Торо):

$$H_L = 1.0, \quad H_R = 0.1, \quad u_L = 2.5, \quad u_R = 0.0, \quad x^* = 10.0. \quad (30)$$



Фиг. 8. Профили глубины (а) и скорости (б) для задачи Римана (26) на сегменте $[0, 1]$ на момент времени $t = 0.1$. 1 – решение, полученное по схеме КАБАРЕ, 2 – решение, полученное методом ICCh-2, 3 – аналитическое решение.



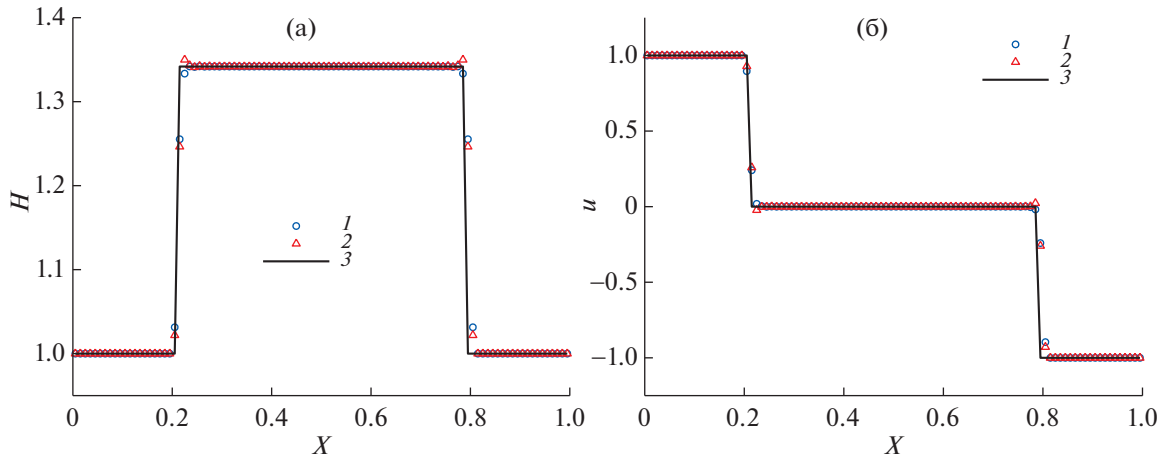
Фиг. 9. Профили глубины (а) и скорости (б) для задачи Римана (27) на сегменте $[0, 1]$ на момент времени $t = 0.1$. 1 – решение, полученное по схеме КАБАРЕ, 2 – решение, полученное методом ICCh-2, 3 – аналитическое решение.

На фиг. 12 представлен результат расчета задачи (30) на равномерной сетке из $N = 101$ ячеек на момент времени $t = 7.0$, число Куранта $CFL = 0.3$. В областях дозвукового и сверхзвукового течения метод ICCh-2, как и прежде, показывает хорошие результаты. Но в окрестности звуковой точки у решения возникает артефакт в виде немонотонностей. Ширина такого артефакта фиксирована (4–6 ячеек), а амплитуда зависит от величины разрывов в задаче Римана.

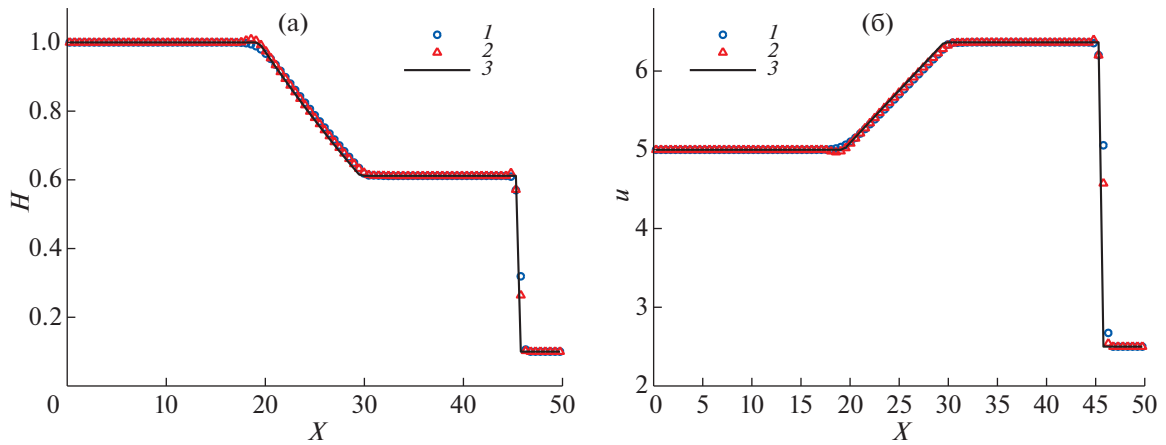
Для более подробной демонстрации вышеупомянутого артефакта рассмотрим другую трансзвуковую задачу Римана на сегменте $x \in [0, 1]$:

$$H_L = 100, \quad H_R = 1, \quad u_L = u_R = 0, \quad x^* = 0.5. \tag{31}$$

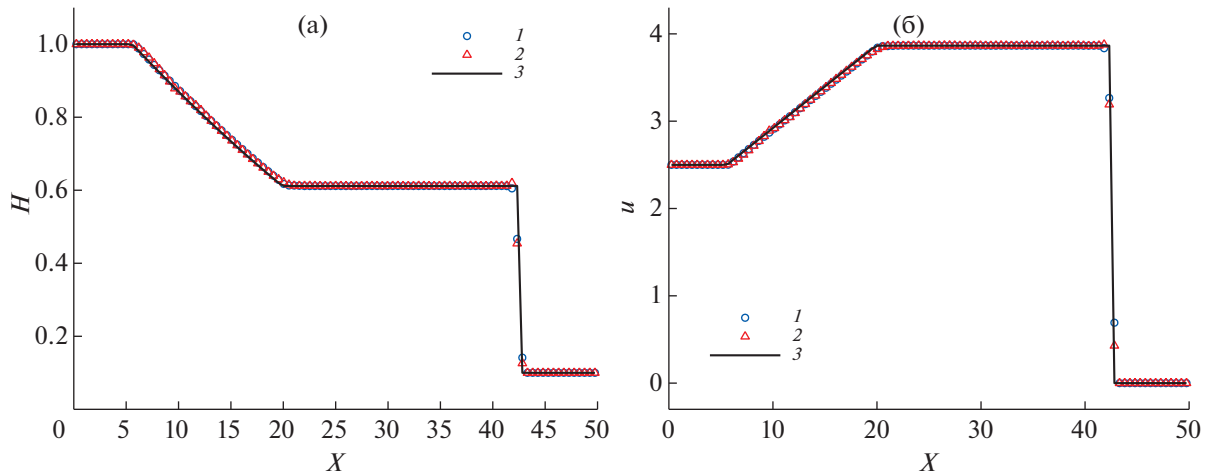
На фиг. 13 представлен результат расчета задачи (31) на равномерной сетке из $N = 101$ ячеек в момент времени $t = 0.012$, число Куранта $CFL = 0.3$. Артефакт метода ICCh-2 находится в окрестности звуковой точки $x^* = 0.5$ и занимает около 6 расчетных ячеек. По-видимому, наличие немонотонностей вызвано лишь частично аномальной дисперсией метода и неполностью



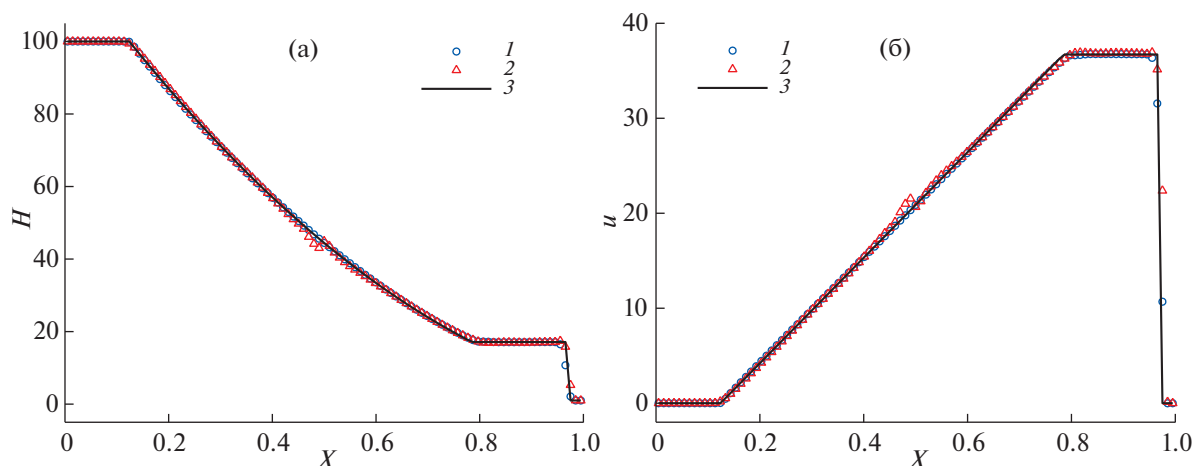
Фиг. 10. Профили глубины (а) и скорости (б) для задачи Римана (28) на сегменте $[0, 1]$ на момент времени $t = 0.1$. 1 – решение, полученное по схеме КАБАРЕ, 2 – решение, полученное методом ICCh-2, 3 – аналитическое решение.



Фиг. 11. Профили глубины (а) и скорости (б) для задачи Римана (29) на момент времени $t = 5.0$ на $N = 101$ ячейке. 1 – решение, полученное по схеме КАБАРЕ, 2 – решение, полученное методом ICCh-2, 3 – аналитическое решение.



Фиг. 12. Профили глубины (а) и скорости (б) для задачи Римана (30) на сегменте $[0, 50]$ на $N = 101$ ячейках в момент времени $t = 7.0$. 1 – решение, полученное по схеме КАБАРЕ, 2 – решение, полученное методом ICCh-2, 3 – аналитическое решение.



Фиг. 13. Профили глубины (а) и скорости (б) для задачи Римана (31) на сегменте $[0, 1]$ на $N = 101$ ячейках на момент времени $t = 0.012$. 1 – решение, полученное по схеме КАБАРЕ, 2 – решение, полученное методом *ICCh-2*, 3 – аналитическое решение.

работающей процедурой монотонизации (16), что говорит о том, что способ монотонизации схемы требует доработки.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен новый явный балансно-характеристический метод решения систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа второго порядка аппроксимации. Характеристическая фаза метода основана на параболической реконструкции инвариантов Римана, учитывающей интегральную природу консервативных переменных, заданных в центрах ячеек. Построенная схема обладает частично аномальной дисперсией при малых числах Куранта, что позволяет избавиться от высокочастотных немонотонностей в решении. Метод был протестирован на некоторых задачах для уравнений переноса, Хопфа и мелкой воды. В случае гладких профилей решение, полученное по методу *ICCh-2*, обладает меньшей численной диссипацией и дисперсией по сравнению с методом *ICCh-1* и схемой КАБАРЕ при включенной процедуре монотонизации. В случае разрывных решений метод также позволяет получить качественное решение, обладающее лишь незначительными немонотонностями в областях негладкостей и звуковых точек.

В качестве дальнейшей работы предложенный метод следует обобщить на случай двумерных и трехмерных систем гиперболического типа на треугольных и тетраэдральных расчетных сетках. Основные идеи такого обобщения уже были заложены в работе [2]. Особый интерес может представлять сравнение метода с существующими обобщениями схемы КАБАРЕ на треугольные сетки [9], [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 607 с.
2. Головизнин В.М., Четверушкин Б.Н. Алгоритмы нового поколения в вычислительной гидродинамике // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 8. С. 20–29.
3. Guerrero Fernandez E., Castro-Diaz M.J., Morales de Luna T. A second-order well-balanced finite volume scheme for the multilayer shallow water model with variable density // Mathematics. 2020. V. 8. № 5. P. 848.
4. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Изд-во МГУ, 2013. 467 с.
5. Karabasov S.A., Goloviznin V.M. Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics // J. Comput. Phys. 2009. V. 228. № 19. P. 7426–7451.

6. Головизнин В.М., Самарский А.А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Матем. моделирование. 1998. Т. 10. № 1. С. 86–100.
7. Goloviznin V.M., Mayorov P.A., Mayorov P.A. Hyperbolic decomposition for hydrostatic approximation of free surface flow problems // J. of Physics: Conference Series. 2019. V. 1392. № 012035.
8. Головизнин В.М., Майоров П.А., Соловьев А.В. Новый численный алгоритм для уравнений многослойной мелкой воды на основе гиперболической декомпозиции и схемы КАБАРЕ // Морской гидрофизический ж. 2019. Т. 35. № 6. С. 600–620.
9. Яковлев П.Г., Карабасов С.А., Головизнин В.М. Прямое моделирование взаимодействия вихревых пар. // Матем. моделирование. 2011. Т. 23. № 11. С. 21–32.
10. Gorbachev D.Y., Goloviznin V.M. The Balance-Characteristic Numerical Method on Triangle Grids // J. of Physics: Conference Series. 2019. V. 1392. № 012036.
11. Головизнин В.М., Карабасов С.А. Нелинейная коррекция схемы Кабаре // Матем. моделирование. 1998. Т. 10. № 12. С. 107–123.
12. Van Leer B. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. IV. A New Approach to Numerical Convection // J. Comput. Phys. 1977. V. 23. № 3. P. 276–299.
13. Eymann T.A., Roe P.L. Active Flux Schemes // 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition. 2011. <https://doi.org/10.2514/6.2011-382>
14. Головизнин В.М., Исаков В.А. Применение балансно-характеристической схемы для решения уравнений мелкой воды над неровным дном // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 7. С. 1142–1160.
15. Afanasiev N.A., Goloviznin V.M. A locally implicit time-reversible sonic point processing algorithm for one-dimensional shallow-water equations // J. Comput. Phys. 2021. V. 434. № 110220.