ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 11, с. 1861–1866

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОШИ–РИМАНА С СВЕРХСИНГУЛЯРНЫМИ ТОЧКАМИ НА ПОЛУПЛОСКОСТИ

© 2022 г. И. Н. Дорофеева[1,*], А. Б. Расулов[1,]**

[1] *111250 Москва, ул. Красноказарменная, 14, ФГБУ ВО МЭИ, Россия*

**e-mail: idoro224@gmail.com*

***e-mail: rasulzoda55@gmail.com*

Поступила в редакцию 20.05.2021 г.
Переработанный вариант 20.05.2021 г.
Принята к публикации 07.07.2022 г.

Для уравнения с оператором Коши–Римана с сильными изолированными точечными особенностями в младшем коэффициенте найдено интегральное представление решения в классе ограниченных функций на бесконечности и исследована задача линейного сопряжения на полуплоскости. Библ. 15.

Ключевые слова: оператор Коши–Римана, сильные особенности в точках, оператор Помпейю–Векуа, полуплоскость, задача типа линейного сопряжения.

DOI: 10.31857/S0044466922110084

Рассмотрим на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ вне множества заданных конечных точек $l = \{z_1, \dots, z_m, \operatorname{Re} z_j \neq 0,\ j = \overline{1,m}\}$ уравнение

$$\partial_{\bar{z}} u - Au = f, \quad A(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{(z - z_j) a_j(z)}{|z - z_j|^{n_j+1}}, \quad n_j > 1. \tag{1}$$

Предполагается, что функции $a_1, \dots, a_m$ и f непрерывны и удовлетворяют условиям

$$a_j(z) = a_j(z_j) + O(|z|^{n_j - 2/p}) \quad \text{при} \quad z \to z_j, \quad j = \overline{1,m}; \quad f(z) = o(|z|^{-1-\alpha}) \quad \text{при} \quad z \to \infty, \tag{2}$$

где $a_j(z_j) \neq 0$, $n_j > 1$, $j = \overline{1,m}$, $p > 2$ и $\alpha = \min(n_1, \dots, n_m)$.

Обобщенная система Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + au + b\bar{u} = f \tag{3}$$

ранее рассматривалась, в основном, в конечной области $D \subseteq \mathbb{C}$, с комплекснозначными функциями $a(z)$, $b(z)$, $f(z)$ – заданными в ограниченной области D, $u(z)$ – неизвестная функция.

Хорошо известно, сколь важную роль в приложениях играет теория обобщенных аналитических функций уравнения (3), созданная И.Н. Векуа [1], в случае, когда $a, b, f \in L_p(D)$, $p > 2$. Она имеет глубокие связи со многими разделами анализа, геометрии и механики, включая квазиконформные отображения, теорию поверхностей, теорию оболочек, газовую динамику. В частности, она широко используется при моделировании трансзвуковых течений газа, состояний безмоментного напряженного равновесия выпуклых оболочек и многих других процессов.

В этой теории ключевую роль играет интеграл Помпейю

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_G \frac{f(\zeta) d_2\zeta}{\zeta - z}, \tag{4}$$

с плотностью $f \in L^p(D)$, $p > 2$, где здесь и ниже $d_2\zeta$ означает элемент площади. Хорошо известно, что этот оператор ограничен из $L^p(D)$ в соболевское пространство $W^{1,p}(D)$ и имеет место вложение $W^{1,p}(D) \subseteq C^{\mu}(\overline{D})$ с показателем Гёльдера $\mu = (p-2)/p$ и $\partial_{\overline{z}}Tf = f$. Следовательно, если $A, f \in L^p(D)$, $p > 2$, и $\Omega = TA$, то общее решение уравнения (1) дается формулой [1]:

$$u = e^{\Omega}[\phi + T(e^{-\Omega}f)],$$

где ϕ – произвольная аналитическая функция.

Уравнение (3) с коэффициентами $a = O(\overline{z}^{-1})$, $b = O(\overline{z}^{-1})$, при $z \to 0 \in D$ в связи с его многочисленными приложениями рассматривалось многими авторами. В монографии Л.Г. Михайлова [2] разрешимость интегрального уравнения, к которому сводится уравнение (3), доказывается при определенных условиях малости этих коэффициентов и на основе полученного решения исследована граничная задача Гильберта.

З.Д. Усмановым [3] построена теория уравнения (3) при $a = 0$, $b(z) = \overline{z}^{-1}\beta e^{ik\varphi}$, $k \in Z$. Однако случай, когда $b(z) = \overline{z}^{-1}(\beta_1 e^{ik\varphi} + \beta_2 e^{im\varphi})$, где $\beta_1 \neq \beta_2$, приводит к бесконечным системам обыкновенных дифференциальных уравнений, которые не поддаются исследованию. Поэтому в дальнейшем основной целью исследований З.Д. Усманова [4] является нахождение связи решений уравнений (3) с коэффициентами $a(z) = 0$, $b(z) = \overline{z}^{-1}\beta$ и с коэффициентами $a(z) = 0$, $b(z) = O(\overline{z}^{-1})$ при $z \to 0 \in D$ посредством линейного интегрального уравнения с вполне непрерывным оператором, чтобы какой-либо вопрос для общего уравнения редуцировать к аналогичному вопросу для уравнения частного вида с постоянными коэффициентами. Доказано, что существуют решения уравнения, допускающие особенности порядка $\nu > 0$ в точке $z = 0$ в виде рядов Фурье, коэффициенты которого определяются через функции Бесселя (функции Макдональда).

H. Begehr и Dao-Qing Dai [5] изучили уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = \frac{Q(z)}{P(z)} + au + b\overline{u}, \tag{5}$$

с коэффициентами $a = O(\overline{z}^{-1})$, при $z \to 0 \in D$, $b(z) \in L^p(D)$, $p > 2$, где $Q(z)$ и $P(z)$ – многочлены комплексной переменной z; и полином P имеет только простые корни в замкнутом единичном диске D. Было установлено, что число решений задачи Римана–Гильберта для уравнения (5) зависит не только от ее индекса, но и от местоположения и типа особенностей.

Класс непрерывных решений уравнения (3) при $a(z) = O(\overline{z}^{-1})$, $b = O(\overline{z}^{-1})$ изучен в работах А.Б. Тунгатарова [6]. Решение уравнения (3) с сингулярными коэффициентами в виде рядов также изучается в работе А. Мезиани [7].

По мнению многих исследователей класс уравнений (3) (при $a = O(\overline{z}^{-1})$, $b = O(\overline{z}^{-1})$ при $z \to 0 \in D$), исследованный Л.Г. Михайловым, является простейшим и, пожалуй, единственным представителем класса обобщенных систем Коши–Римана с квазисуммируемыми коэффициентами, относительно которого ряд результатов удается получить путем использования основного оператора (4) теории регулярных обобщенных систем Коши–Римана [8].

Поэтому пришли к другим методам исследования уравнения (3), минуя оператор Помпейю-Векуа (4). Например, А. Тунгатаровым и др. [6] уравнения (3), имеющие особенности первого порядка в точке или на линии, рассмотрены в бесконечной угловой области произвольного раствора. Кратко изложим схему построения решения. Используя сочетания метода Фукса и метода Фурье разделения переменных, уравнения (1) приводятся к сингулярным интегральным уравнениям. Далее с помощью модифицированного метода последовательных приближений из этих сингулярных интегральных уравнений получены представления решений, где в правой части имеется n кратный интеграл, содержащий неизвестную функцию. При $n \to \infty$ этот член стремится к нулю, и поэтому интегральные представления превращаются в многообразия непрерывных решений.

Нам удалось применить оператор Помпейю (4) к исследованию уравнения (3) в случае , когда коэффициенты a, b имеют сильные особенности в точках и линиях области D (см., например, [11], [12]).

В работах А.П. Солдатова [9], [10] даны оценки классического интеграла Помпейю (4), рассматриваемого на всей комплексной плоскости с особыми точками $z = 0$ и $z = \infty$ в семействах различных весовых пространств, некоторые из которых мы используем в данной работе.

Для более подробного ознакомления с обзором проделанных работ можно обратиться к работам [2], [3], [6] и другим источникам.

Следовательно, если в ранее изложенных работах исследование обобщенной системы уравнений Коши–Римана велось, в основном, в конечной области, в нашем случае рассматривается расширенная комплексная плоскость, дополненная по сравнению с обычной бесконечно удаленной точкой: $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}}$. Геометрически точка $z = \infty$ изображается точкой сферы Римана (ее “северный полюс”). Следовательно, к m-конечным точкам $z_j, j = \overline{1, m}$, плоскости, в которых коэффициент A имеет сильные особенности, добавится еще одна особая точка $z = \infty$.

Пусть $\mathbb{C} = \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R} \cup \mathbb{C}^-$, где $\mathbb{C}^+$ и $\mathbb{C}^-$ – соответственно, верхная и нижная плоскость, $\mathbb{R}$ – вещественная ось.

В рассматриваемом случае интегральный оператор T понимается по отношению к неограниченной области, в том числе и по отношению к областям $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{C}^-$ или $\mathbb{C}$. Хорошо известно [1], что если функция f непрерывно дифференцируема и $f(z) = O(|z|^\delta)$ при $z \to \infty$ с некоторым $\delta < -1$, то функция

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta) d_2\zeta}{\zeta - z}, \qquad \zeta, z \in \mathbb{C}, \tag{6}$$

непрерывно дифференцируема и является решением уравнения (1) при $A = 0$. В монографии [1] И.Н. Векуа описал условие на функцию f, обеспечивающее принадлежность Tf классу $C^\mu(\mathbb{C})$ в терминах введенного им пространства $L^{p,\nu}(\mathbb{C})$, $p > 2$. Под $C^\mu(\mathbb{C})$ здесь понимается класс непрерывных функций $f(z)$, которые вместе с $f(1/z)$ принадлежат $C^\mu(D)$ в единичном круге D. По определению пространство $L^{p,\nu}(\mathbb{C})$ состоит из всех функций f, для которых $f(z)$ и $f_\nu(z) = |z|^{-\nu} f(1/z)$ принадлежат $L^p(D)$. В этих обозначениях если $f \in L^{p,2}(\mathbb{C})$, $p > 2$, то функция $Tf \in C^\mu(\mathbb{C})$, $\mu = 1 - 2/p$, и обращается в нуль на бесконечности (см. теоремы 1.24, 1.25 в монографии [1]). В частности, $(Tf)(z) = o(|z|^{\mu-1})$ при $z \to \infty$.

Обычно под обобщенным решением уравнения (1) понимается функция u, которая в области $\mathbb{C}^+ \backslash \{l\}$ допускает обобщенную производную по $\overline{z}$, причем

$$u_{\overline{z}} \in L^{p,2}(\mathbb{C}^+_\varepsilon), \quad \mathbb{C}^+_\varepsilon = \{z, |z - z_j| > \varepsilon,\ j = 1, \ldots, m\},$$

для любого $\varepsilon > 0$, ограниченная на бесконечности и удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду.

В дальнейшем для компактного изложения при $n_j > 1$, $j = \overline{1, m}$, введем следующие обозначения:

$$\omega_j = \frac{2}{(n_j - 1)|z - z_j|^{n_j - 1}}, \quad A_0(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{(z - z_j)[a_j(z) - a_j(z_j)]}{|z - z_j|^{n_j + 1}},$$

где ω_j – решение уравнения $u_{\overline{z}}(z) = -(z - z_j)|z - z_j|^{-1-n}$, $a_j \in C(\mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R})$, $j = \overline{1, m}$.

Введем сингулярный интеграл

$$\Omega(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} (T_\varepsilon A)(z) \equiv -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}^+_\varepsilon} \frac{A(\zeta) d_2\zeta}{\zeta - z},$$

где интегральный оператор T_ε определяется аналогично (2) по отношению к области $\mathbb{C}^+_\varepsilon$.

Теорема 1. *Пусть* $n_j > 1,\ j = \overline{1,m}$, *и* $A_0 \in L^{p,2}(\mathbb{C}^+)$. *Тогда функция* $\Omega(z),\ z \neq z_j,\ j = \overline{1,m}$; *существует и представима в виде*

$$\Omega(z) = -\sum_{j=1}^{m} a_j(z_j)\omega_j + h(z), \tag{7}$$

где $h(z) \in C^{\mu}$, *определяется равенством*

$$h(z) = (TA_0)(z) + \frac{1}{\pi i}\sum_{j=1}^{m}\frac{a_j(z_j)}{(n_j-1)}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{|z-z_j|^{n_j-1}}\frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

и удовлетворяет уравнению $\Omega_{\bar{z}} = A$.

Соответственно в предположении $e^{-\Omega}f \in L^{p,2}(\mathbb{C}^+)$, *обобщенное решение уравнения* (1) *дается формулой*

$$u = e^{\Omega}[\phi + T(e^{-\Omega}f)], \tag{8}$$

где $\phi \in C^{\mu}(\overline{\mathbb{C}^+}\backslash\{l\})$ — *произвольная аналитическая в области* $\mathbb{C}^+\backslash\{l\}$ *функция и* $\phi(z) = o(|z|^{-2/p})$ *при* $|z| \to \infty$.

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы об интегральном представлении системы Коши–Римана с одной сверхсингулярной точкой, которое приведено в [15] и базируется на тождестве $\partial_{\bar{z}}\Omega = A$ и формуле Грина

$$\int_B \frac{\partial U}{\partial \bar{\zeta}} d_2\zeta = \frac{1}{2i}\int_{\partial B} U d\zeta,$$

в круге $B = \{|z| < R\}$ достаточно большого радиуса R. Тогда при $R \to \infty$ убеждаемся в справедливости теоремы.

Замечание 1. Заметим, что при $0 < \delta < 1$ условие

$$u(z) = O(|z - z_j|^{-\delta})\exp\left[-\frac{\operatorname{Re} 2a(z_j)}{(n-1)|z-z_j|^{n-1}}\right],$$

при $z \to z_j,\ \ j = \overline{1,m}$, равносильно тому, что в этом представлении функция ϕ имеет $z = z_j$, $j = \overline{1,m}$, устранимую особую точку и, следовательно, аналитична во всей области $\mathbb{C}^+$ и по условию $\phi(z) = o(|z|^{-2/p})$ при $|z| \to \infty$.

Поэтому фактически функция u относится к классу функций, для которых $e^{-\Omega}u \in H(\overline{\mathbb{C}^+})$. Этот класс функций, удовлетворяющий условию Гёльдера с некоторым показателем, удобно обозначить через $H(\overline{\mathbb{C}^+}, e^{\Omega})$, где $\overline{\mathbb{C}}^+ = \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$.

Замечание 2. Заметим, что $A_{0j}(z) \in L^p(G),\ p > 2$, если

$$a_j(z) - a_j(z_j) = O(|z-z_j|^{\gamma_j}), \quad \gamma_j > n_j - 2p^{-1}, \quad n_j > 1, \quad j = \overline{1,m}.$$

Заметим, что теорема 1 сохраняет свою силу, если условие $A_0(z) \in L^{p,2}(\mathbb{C})$ заменено на (2), или, более точно, на условие $a_j(z) - a_j(z_j) = o(|z|^{-\alpha})$ при $z \to \infty$.

2. ЗАДАЧА ТИПА ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ

Требуется найти решение уравнения (1) *в полуплоскостях* $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{C}^-$, соответственно принадлежащее классам $L^{p,2}(\mathbb{C}^{\pm}) \cap H(\overline{\mathbb{C}^+}, e^{\Omega})$ и такое, что для функций $(e^{-\Omega}u)^{\pm}$, ограниченных в $\mathbb{C}^+$, и $\mathbb{C}^-$, предельные значения на контуре $\mathbb{R}$ удовлетворяют следующему граничному условию:

$$(e^{-\Omega}u)^+(t) = G(t)(e^{-\Omega}u)^-(t) + g(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

где $G(t)$, $g(t)$ – заданные на $\mathbb{R}$ функции, удовлетворяющие условию Гёльдера, как в конечных точках, так и в окрестности бесконечно удаленной точки контура, причем $G(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$ и $g(t) = o(|t|^{-\delta})$, $\delta > 0$, $t \to \infty$.

Используя интегральное представление (4) и условие задачи (9), мы приходим к следующей задаче линейного сопряжения теории аналитических функций для полуплоскости:

$$\phi^+(t) = G(t)\phi^-(t) + \tilde{g}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

где

$$\tilde{g} = T^+(e^{-\Omega}f) + g - GT^-(e^{-\Omega}f), \quad T^{\pm}(e^{-\Omega}f) = \left\{\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}^+}\frac{e^{-\Omega}(\zeta)f(\zeta)}{\zeta - z}d_2\zeta\right\}^{\pm}.$$

Из (9) и (10) следует, что индекс $æ = \operatorname{Ind} G(t)$ этих задач совпадает.

Таким образом, задача (9) приводится к задаче линейного сопряжения для полуплоскости теории аналитических функций, решение которой явным образом находится (см. [13, с. 120]). Следовательно, если $æ = \operatorname{Ind} G(t) \geq 0$, то задача (1), (9) разрешима, ее общее решение дается формулой (4), в которой функция $\phi(z)$ имеет вид

$$\phi(z) = \begin{cases} \dfrac{X(z)}{2\pi i}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{\widetilde{g(\tau)}}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z} + X(z)\frac{P_æ(z)}{(z+i)^æ} & \text{при} \quad æ \geq 0; \\ X(z)\left[\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{\widetilde{g(\tau)}}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z} + C\right] & \text{при} \quad æ < 0, \end{cases} \tag{11}$$

где

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \quad X^-(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-æ} e^{\Gamma^-(z)},$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{\ln\left[\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-æ}G(\tau)\right]}{\tau - z}d\tau,$$

$P_æ(z)$ – полином степени не выше æ с произвольными комплексными коэффициентами. При $æ < 0$ функция $X(z)$ в точке $z = -i$ имеет полюс порядка $-æ$, поэтому для разрешимости задач нужно положить $C = -\psi(-i)$. При $æ < -1$, кроме того, должно выполняться еще следующее условие:

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{\widetilde{g(\tau)}}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{(\tau + i)^k} = 0, \quad k = 2,\ldots - æ. \tag{12}$$

Формула (11) выражает решение задачи Римана в полуплоскости для аналитических функций, которое является ограниченным на бесконечности [13], [14].

Как следует из интегрального представления (4), решение изчезает в бесконечно-удаленной точке. Подставляя в краевое условие (10) $\phi^{\pm}(\infty) = 0$, получим $g(\infty) = 0$. Следовательно, чтобы задача линейного сопряжения для полуплоскости имела решение, исчезающее на бесконечности, свободный член краевого условия должен на бесконечности обращаться в нуль. Поэтому предположим, что $g(t) = o(|t|^{-\delta})$, $\delta > 0$, $t \to \infty$. Для получения решения в данном случае нужно в (11) вместо $P_æ$ взять $P_{æ-1}$, а постоянную C приравнять к нулю. Таким образом,

$$\phi(z) = \begin{cases} \dfrac{X(z)}{2\pi i}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{\widetilde{g(\tau)}}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z} + X(z)\frac{P_{æ-1}(z)}{(z+i)^æ} & \text{при} \quad æ > 0; \\ \dfrac{X(z)}{2\pi i}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{\widetilde{g(\tau)}}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z} & \text{при} \quad æ \leq 0. \end{cases} \tag{13}$$

При $æ \leq 0$ в этой формуле нужно положить $P_{æ} \equiv 0$. К условиям разрешимости нужно добавить еще условие

$$\Psi(i) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\widetilde{g(\tau)}}{X^{+}(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - i} = 0.$$

Таким образом, эти условия примут вид

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\widetilde{g(\tau)}}{X^{+}(\tau)} \frac{d\tau}{(\tau + i)^{k}} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots -æ. \tag{14}$$

Терема 2. *Пусть* $æ = \operatorname{Ind} G(t) > 0$. *Тогда задача* (1), (9) *для полуплоскости безусловно разрешима и ее общее решение дается формулой* (4), *в которой функция* $\phi(z)$ *определяется формулой* (13), *причем это решение зависит линейно от* $æ$ *произвольных постоянных. Если* $æ \leq 0$, *то задача имеет единственное решение. При* $æ < 0$ *разрешима однозначно лишь при выполнении* $-æ$ *условий разрешимости* (14).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959. 628 с.

2. *Михайлов Л.Г.* Новые классы особых интегральных уравнений и их применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе: Таджик НИИНТИ, 1963. 183 с.

3. *Усманов З.Д.* Обобщенные системы Коши–Римана с сингулярной точкой. Душанбе: Изд-во АН ТаджССР, 1993. 244 с.

4. *Усманов З.Д.* Связь многообразия решений общей и модельной обобщенных систем Коши - Римана с сингулярной точкой // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 2. С. 302–307.

5. *Begehr, Dai D.Q.* On continuous solutions of a generalized Cauchy–Riemann system with more than one singularity // J. Differen. Eq. 2004. V. 196. P. 67–90.

6. *Abdymanapov S.A.,Tungatarov A.B.* Some classes of elliptic systems in the plane with singular coefficients. Almaty: Nauka, 2005. 169 p.

7. *Meziani A.* Representation of solutions of a singular CR equation in the plane // Complex Var. and Elliptic Eq. 2008. V. 53. P. 1111–1130.

8. *Abdymanapov S.A., Begehr H., Harutugian G., Tungatarov A.* Four boundary value problems for the Cauchy–Riemann equation in a quarter plane // More Progresses in analysis. Pro. of the 5th Interna. ISAAC Congress. Catania, Italy, 2005. P. 1137–1147.

9. *Солдатов А.П.* Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи, I //Современ. матем. Фундамент. напр. Функц. анализ. 2017. Т. 63. № 1. С. 1–189.

10. Об интеграле Помпею и некоторых его обобщениях // Вестник ЮУрГУ ММП. 2021. Т. 14. № 1. С. 53–67.

11. *Расулов А.Б., Солдатов А.П.* Краевая задача для обобщенного уравнения Коши–Римана с сингулярными коэффициентами// Дифференц. ур-ния 2016. Т. 52. № 5. С. 637–650.

12. *Раджабов Н.Р., Расулов А.Б.* О корректной постановке задач для системы Бицадзе со сверхсингулярной точкой и окружностью // Научные Ведомости БелГУ серия математика, физика. 2011. № 23(118). Вып. 25. С. 93–101.

13. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М: Наука, 1977. 640 с.

14. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.

15. *Расулов А.Б., Дорофеева И.Н.* Задача Дирихле для обобщенного уравнения Коши–Римана с сверхсингулярной точкой на полуплоскости // Ж. вычисл. матем и матем. физ. 2020. Т. 60. № 10. С. 82–88.