

ОБЩИЕ
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63

КОНТРОЛЬ ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО
КЛАССА СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

© 2022 г. С. И. Репин^{1, 2, *}

¹ 191023 С.-Петербург, Фонтанка, 27, С.-Петербургское отделение
Матем. ин-та им. В.А. Стеклова РАН, Россия

² 195251, С.-Петербург, ул. Политехническая, 29,
С.-Петербургский политехн. ун-т Петра Великого, Россия

*e-mail: repin@pdmi.ras.ru

Поступила в редакцию 22.06.2022 г.
Переработанный вариант 22.06.2022 г.
Принята к публикации 07.07.2022 г.

Рассматриваются уравнения реакции–конвекции–диффузии с малым параметром при старшей производной, и изучается вопрос о том, как эффективно контролировать точность приближенных решений таких задач с помощью апостериорных оценок. Полученные оценки не зависят от способа построения приближенного решения и работоспособны в широком диапазоне значений параметра. Основой для получения оценок являются специальные (апостериорные) тождества, левая часть которых представляет собой меру отклонения приближенного решения от точного, а правая содержит данные задачи и известное приближенное решение. В серии примеров показано, что тождества и вытекающие из них оценки позволяют эффективно вычислять погрешность как грубых, так и весьма точных аппроксимаций задач при различных значениях малого параметра. Библиограф. 38. Фиг. 6. Табл. 3.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные уравнения, краевые задачи, тождества для мер отклонения от точного решения, апостериорные оценки функционального типа.

DOI: 10.31857/S0044466922110096

1. ВВЕДЕНИЕ

Класс краевых задач, которые принято называть сингулярно возмущенными, связан с физическими моделями, содержащими пограничные слои. Как правило, они связаны с наличием малого параметра при старшей производной и возникают в задачах диффузии (см. [1]), гидроаэродинамики (см. [2]) и электромагнетизма (см. [3]). Вероятно, первые исследования этих математических моделей были предприняты Л. Прандтлем (см. [4]), который ввел понятие пограничного слоя как их типичную особенность. Соответствующие решения имеют совершенно разный характер в области пограничного слоя и вне его. Например, в задачах гидродинамики с малой вязкостью пограничный слой может образоваться вблизи неподвижной границы, где скорости малы и решение зависит от величины вязкости. В остальной области решение практически не зависит от вязкости и несущественно отличается от течения идеальной жидкости. Аналогичную структуру имеют решения сингулярно возмущенных задач конвекции–реакции–диффузии (4.1), которое рассматривается в данной статье.

Попытки решения сингулярно возмущенных задач с помощью стандартных численных методов могут сталкиваться с серьезными трудностями (например, возникновением неустойчивости). Поэтому значительные усилия были направлены на разработку специальных методов, которые учитывают специфические особенности данного класса задач (см. [5]–[14] и цитированную литературу). Эти методы часто используют специальные (layer-resolving) неравномерные сетки (так называемые сетки Шишкина и Бахвалова). Обзоры результатов, относящихся к сингулярно возмущенным задачам, можно найти в [15]–[17].

В настоящей статье мы не обсуждаем методы построения численного решения, а изучаем вопрос о том, как эффективно контролировать приближенные решения сингулярно возмущенных задач. Ясно, что наличие малого параметра и специфика точного решения порождают серьезные трудности и в решении этой проблемы. Конечно, вопросы контроля точности приближенных

решений ранее изучались, и есть ряд работ, посвященных этой теме. Одними из первых изучались сеточные аппроксимации, и в [5] были получены оценки погрешности в сеточных нормах для системы обыкновенных дифференциальных уравнений и для уравнения эллиптического типа с малым параметром при одной из частных производных. Эти вопросы исследовались и в контексте других задач и различных методов аппроксимаций (см. [13], [18], [19] и многие другие работы). Например, в [12] получены асимптотические оценки вида $\|u - u_h\| \leq Ch^q$ для энергетической нормы разности между точным решением (4.1) и его приближением на сетке размера h . Такие оценки гарантируют глобальную сходимость, равномерную относительно ε , если C и q не зависят от ε . Для уравнения $-\varepsilon \Delta u + a(x, \varepsilon)u = f(x, \varepsilon)$ оценки ошибок в норме $\|u - u_h\|_{\infty, \Omega}$ получены в статье [20]. Подобные (асимптотические) оценки погрешности аппроксимаций изучались разными авторами для многих сингулярно возмущенных задач. Они служат обоснованием численного метода и его устойчивости по отношению к малому параметру ε .

Другая группа исследований связана с получением апостериорных оценок и индикаторов погрешности для адаптивных вычислительных методов (см., например, [15], [21]). В [22], [23] были получены апостериорные оценки для обыкновенного дифференциального уравнения и эллиптической краевой задачи с малым параметром при старшей производной. В этих работах изучались конечно-разностные схемы на неравномерных сетках, а оценки построены в терминах максимальной разности между точным решением и линейным (или полилинейным) восполнением точного решения конечно-разностного уравнения. В [24] аналогичные оценки получены для аппроксимаций, построенных с помощью сплайнов и метода коллокаций.

Нас интересуют оценки другого рода, а именно те, что давали бы погрешность любого приближенного решения независимо от метода его получения. Такие оценки должны быть явно вычисляемыми и гарантированными мажорантами (минорантами) соответствующих мер погрешности и не должны содержать констант, зависящих от сетки и других специфических свойств аппроксимаций. Ранее подобные оценки были построены для широкого круга задач математической физики (см. [25]–[27]) путем анализа соответствующей краевой задачи чисто функциональными методами без использования специальных свойств аппроксимаций. Поэтому их часто называют апостериорными оценками функционального типа. Они отражают наиболее общие зависимости между мерой отклонения от точного решения и невязками функциональных соотношений, которые определяют конкретную задачу. В данной статье этот подход применяется к сингулярно возмущенной краевой задаче. Основой анализа являются тождества особого рода, в которых левая часть представляет собой некоторую меру отклонения приближенного решения от точного, а правая зависит от приближенного решения, данных задачи и некоторых других величин. Их можно назвать *апостериорными тождествами*. Может показаться, что такие тождества можно получать с помощью несложных формальных преобразований соответствующего уравнения. Например, для задачи $\Delta u = f$ в выпуклой области Ω , с $f \in L^2(\Omega)$ с условием $u = 0$ на границе Γ легко получить тождество

$$\|\Delta e\| = \|\Delta v - f\|, \tag{1.1}$$

где $\|\cdot\|$ обозначает норму $L^2(\Omega)$, а $e := v - u$ — функция, которая показывает отклонение приближенного решения v от точного u . Однако (1.1) мало пригодно для практических целей. Прежде всего оно выполняется только для аппроксимаций, обладающих повышенной регулярностью ($\Delta v \in L^2(\Omega)$). Кроме того, последовательности аппроксимаций, построенные с помощью стандартных численных методов (например, МКЭ), как правило, не обладают тем свойством, что невязка уравнения, записанного в классической форме, стремится к нулю при увеличении размерности конечномерного пространства. Обычно имеет место более слабая сходимость относительно нормы функционального пространства, содержащего это решение. При этом для последовательности сходящихся аппроксимаций правая часть (1.1) может не убывать, даже если сами аппроксимации (или их регуляризации) удовлетворяют требованиям повышенной регулярности. Естественно, что в этом случае тождество не имеет практического значения.

Тождества для отклонений от точного решения, которые соответствуют требованиям, естественным для большинства численных методов, были получены на основе теории двойственности вариационного исчисления в [26]. Подробное изложение соответствующей теории и приложения к широкому кругу задач для уравнений эллиптического типа содержится в [28, гл. 2] и в [29]. Недавно апостериорные тождества были получены для некоторых линейных и нелинейных параболических задач (см. [30]).

В настоящей статье апостериорные тождества отклонений от точного решения получены для стационарной задачи реакции–конвекции–диффузии

$$-\operatorname{div} p^* + a \cdot \nabla u + \rho^2 u = f \quad \text{в } \Omega, \quad (1.2)$$

$$p^* = A \nabla u \quad \text{в } \Omega, \quad (1.3)$$

$$u = u_0 \quad \text{на } \Gamma \quad (1.4)$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) с липшицевой границей Γ . Здесь и далее \cdot обозначает скалярное произведение векторов, а функция u_0 задает краевое условие (в смысле следов). Мы считаем, что $u_0 \in V := H^1(\Omega)$, $V_0 := \overset{\circ}{H}^1(\Omega)$ является подпространством V , содержащим функции, обращающиеся в нуль на границе. Предполагается, что A – это симметричная матрица с вещественными коэффициентами, и что выполнены следующие условия:

$$f \in L^2(\Omega), \quad a \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d), \quad \operatorname{div} a \in L^\infty(\Omega), \quad (1.5)$$

$$c_1^2 |\xi|^2 \leq A \xi \cdot \xi \leq c_2^2 |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad (1.6)$$

$$\rho \in L^\infty(\Omega), \quad 0 \leq \rho \leq \rho_\oplus, \quad (1.7)$$

$$\rho^2 - \frac{1}{2} \operatorname{div} a := \sigma_a^2 \geq 0. \quad (1.8)$$

Обобщенное решение u определяется как функция из множества

$$V_0 + u_0 := \{w = w_0 + u_0 \mid w_0 \in V_0\},$$

удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} (A \nabla u \cdot \nabla w + (a \cdot \nabla u)w + \rho^2 uw) dx = \int_{\Omega} f w dx \quad \forall w \in V_0. \quad (1.9)$$

Вопросы существования и единственности функции u , удовлетворяющей (1.9), а также регулярность и другие качественные свойства решения хорошо изучены (см., например, [31], [32]). Также имеется большое количество литературы, посвященной построению численных аппроксимаций этой задачи (см. обзор методов в [33]). Далее мы будем считать, что функция $v \in V_0 + u_0$ является такой аппроксимацией, полученной каким-либо способом. Также в рассмотрении участвует аппроксимация u^* точного потока p^* . Эти аппроксимации могут быть очень хорошими приближениями u и p^* , а могут быть и весьма грубыми. Целью работы является получение универсальных оценок, которые контролируют отклонение таких приближенных решений от точных. При этом никаких специальных свойств типа галеркинской ортогональности для v или различных вариантов полного или частичного уравнивания потока u^* не используется. Также не используются свойства сетки и сеточные константы.

Основой анализа являются два тождества для мер отклонения приближенных решений от точного решения задачи (1.2)–(1.4). Первое тождество (2.1) получено при минимальных предположениях относительно коэффициентов уравнения (1.2). Второе тождество (2.12) требует выполнения дополнительного условия (2.10). Это сужает область его применимости, однако важной особенностью (2.12) является то, что его правая часть зависит только от приближенных решений и может быть вычислена непосредственно. В разд. 3 тождества (2.1) и (2.12) используются для получения полностью вычисляемых и гарантированных апостериорных оценок. Задачам с малым параметром при старшей производной посвящен разд. 4. Здесь тождества (2.1) и (2.12) и соответствующие оценки преобразуются с учетом специфики задачи. В разд. 5 теоретические результаты проверяются на серии модельных задач для различных аппроксимаций и различных значениях малого параметра.

В статье используются следующие обозначения. Средние значения функций обозначаются символом $\{\cdot\}$, например, $\{g\}_\Omega := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} g dx$. Нормы скалярных и векторных функций в $L^2(\Omega)$ обозначаются $\|\cdot\|$, а $\|\cdot\|_\rho$ соответствует норме с весом, т.е. $\|w\|_\rho^2 := \int_{\Omega} \rho^2 w^2 dx$. Векторнозначные функ-

ции, компоненты которых интегрируемы с квадратом, образуют пространство $Q^* := L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$, в котором можно задать две нормы:

$$\|q\|_A^2 := \int_{\Omega} Aq \cdot q dx \text{ и } \|q\|_{A^{-1}}^2 := \int_{\Omega} A^{-1}q \cdot q dx, \|q\|.$$

Пространство Q_{div}^* является подпространством Q^* . Оно содержит такие векторные функции, которые имеют интегрируемую с квадратом дивергенцию. Это пространство является гильбертовым относительно скалярного произведения

$$(p, q)_{\text{div}} := \int_{\Omega} (p \cdot q + \text{div } p \text{ div } q) dx.$$

2. ТОЖДЕСТВА ДЛЯ МЕР ОТКЛОНЕНИЙ ОТ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1.2)–(1.4)

Пусть $v \in V_0 + u_0$ и $y^* \in Q_{\text{div}}^*$ являются аппроксимациями u и p^* соответственно. Функции $e := v - u$ и $e^* := y^* - p^*$ можно назвать *функциями отклонений* от точных решений (или функциями ошибок), а функция

$$\mathcal{R}_f(v, y^*) := \text{div } y^* - a \cdot \nabla v + f - \rho^2 v$$

является невязкой уравнения (1.2). Она зависит только от известных коэффициентов, v и y^* , и поэтому может быть вычислена непосредственно.

Теорема. Для $v \in V_0 + u_0$ и $y^* \in Q_{\text{div}}^*$ выполняется тождество

$$\mu_1^2(e, e^*) = \|A\nabla v - y^*\|_{A^{-1}}^2 - 2 \int_{\Omega} \mathcal{R}_f(v, y^*) e dx, \tag{2.1}$$

где мера отклонения задается соотношением

$$\mu_1^2(e, e^*) := \|e\|^2 + \|e^*\|_{A^{-1}}^2,$$

а

$$\|e\|^2 := \|\nabla e\|_A^2 + 2 \int_{\Omega} \sigma_a e^2 dx.$$

Доказательство. Вследствие (1.3) мы имеем тождество

$$\|A\nabla v - y^*\|_{A^{-1}}^2 = \|A\nabla e - e^*\|_{A^{-1}}^2.$$

Поэтому

$$\|A\nabla v - y^*\|_{A^{-1}}^2 + 2 \int_{\Omega} e^* \cdot \nabla e dx = \|\nabla e\|_A^2 + \|e^*\|_{A^{-1}}^2. \tag{2.2}$$

Преобразуем интеграл в (2.2) следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (y^* - p^*) \cdot \nabla e dx &= \int_{\Omega} (a \cdot \nabla u - f + \rho^2 u - \text{div } y^*) e dx = \int_{\Omega} (a \cdot \nabla v - f + \rho^2 v - \text{div } y^*) e dx + \\ &+ \int_{\Omega} (a \cdot \nabla(u - v) + \rho^2(u - v)) e dx = \int_{\Omega} (a \cdot \nabla(u - v) + \rho^2(u - v)) e dx - \int_{\Omega} \mathcal{R}_f(y^*, v) e dx. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Так как

$$2 \int_{\Omega} (a \cdot \nabla e) e dx = \int_{\Omega} a \cdot \nabla(e^2) dx = - \int_{\Omega} \text{div } a e^2 dx, \tag{2.4}$$

мы имеем равенство

$$2 \int_{\Omega} (a \cdot \nabla(u - v) + \rho^2(u - v)) e dx = -2 \int_{\Omega} (a \cdot \nabla e + \rho^2 e) e dx = \int_{\Omega} (\text{div } a - 2\rho^2) e^2 dx. \tag{2.5}$$

Из (2.2), (2.3) и (2.5) следует тождество

$$\|\nabla e\|_A^2 + \|e^*\|_{A^{-1}}^2 + \int_{\Omega} (2\rho^2 - \operatorname{div} a)e^2 dx = \|A\nabla v - y^*\|_{A^{-1}}^2 - 2 \int_{\Omega} \mathcal{R}_f(v, y^*) dx, \tag{2.6}$$

которое с учетом (1.8) совпадает с (2.1). Теорема доказана.

Тождество (2.1) содержит в левой части меру $\mu_1(e, e^*)$, которая является естественной характеристикой того, насколько хорошо v и y^* приближают точное решение u и точный поток p^* соответственно. Первый член в правой части вычисляется непосредственно, а второй содержит известную функцию невязки $\mathcal{R}_f(v, y^*)$ и неизвестную функцию e . Далее мы обсудим, как получить полностью вычисляемые оценки этого интеграла.

Замечание 1. Возьмем инфимум от обеих частей (2.1) по $y^* \in Q_{\operatorname{div}}^*$. Нетрудно видеть, что левая часть (2.1) достигает минимума, если $y^* = p^*$. В этом случае правая часть (2.1) также достигает минимума. Действительно,

$$\|A\nabla v - p^*\|_{A^{-1}}^2 = \|A\nabla(v - u)\|_{A^{-1}}^2 = \|\nabla e\|_A^2$$

и поскольку $\operatorname{div} p^* + f = a \cdot \nabla u + \rho^2 u$, то $\mathcal{R}_f(v, p^*) = -a \cdot \nabla e - \rho^2 e$. Поэтому

$$2 \int_{\Omega} \mathcal{R}_f(v, p^*) dx = -2 \int_{\Omega} ((a \cdot \nabla e)e + \rho^2 e^2) dx = 2 \int_{\Omega} (\operatorname{div} a - 2\rho^2)e^2 dx = -2 \int_{\Omega} \sigma_a^2 e^2 dx.$$

Таким образом, мы получаем тождество для одной части $\mu_1(e, e^*)$:

$$\|e\|^2 = \inf_{y^* \in Q_{\operatorname{div}}^*} \left\{ \|A\nabla v - y^*\|_{A^{-1}}^2 - 2 \int_{\Omega} \mathcal{R}_f(v, y^*) dx \right\}. \tag{2.7}$$

Замечание 2. Априори известно, что обобщенное решение задачи содержится в $V_0 + u_0$, а соответствующий поток принадлежит пространству Q_{div}^* . Тождество (2.1) выполняется для любых функций $(v, y^*) \in \mathcal{H} := (V_0 + u_0) \times Q_{\operatorname{div}}^*$, т.е. позволяет оценивать отклонения от точных решений в пределах естественных энергетических множеств задачи. Множество \mathcal{H} можно сузить таким образом, чтобы интеграл в правой части (2.1) исчез. Для этого надо потребовать, чтобы v и y^* принадлежали множеству

$$\mathcal{H}_0 := \left\{ (v, y^*) \in \mathcal{H} \mid \int_{\Omega} (y^* \cdot \nabla w + (a \cdot \nabla v)w + \rho^2 v w - f w) dx = 0 \quad \forall w \in V_0 \right\}.$$

В этом случае последний интеграл в (2.3) равен нулю, и мы получаем упрощенное тождество:

$$\|\nabla e\|_A^2 + 2 \int_{\Omega} \sigma_a e^2 dx + \|e^*\|_{A^{-1}}^2 = \|A\nabla v - y^*\|_{A^{-1}}^2, \tag{2.8}$$

которое, однако, выполняется только для $(v, y^*) \in \mathcal{H}_0$.

В случае $a = 0$ и $\rho = 0$ тождество (2.8) совпадает с хорошо известным “равенством гиперциклов” (см. [34])

$$\|\nabla e\|_A^2 + \|e^*\|_{A^{-1}}^2 = \|A\nabla v - y^*\|_{A^{-1}}^2, \tag{2.9}$$

где множество \mathcal{H}_0 задается уравнением $\operatorname{div} y^* + f = 0$ и накладывает ограничения только на переменную y^* . В литературе, посвященной методам апостериорного контроля точности, имеется целое направление, основанное на (2.9) и его аналогов в других задачах (например, для уравнений линейной упругости). В рамках этого подхода авторы стараются использовать так называемые уравновешенные (equilibrated) аппроксимации, которые содержатся в \mathcal{H}_0 . Тождество (2.8) показывает, что в задачах более сложных, чем простое уравнение диффузии, множество \mathcal{H}_0 накладывает совместные ограничения на обе переменные. Их точное выполнение может приводить к серьезным техническим трудностям в практических вычислениях. Надлежащее использование полного тождества (2.1) позволяет избежать эти трудности и использовать простые аппроксимации для v и y^* (например, стандартные конечноэлементные аппроксимации Куранта и Равьяра–Тома соответственно).

Если

$$\rho(x) > 0 \quad \text{и} \quad \rho_a^2(x) := \rho^2(x) - \operatorname{div} a > 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad (2.10)$$

то (2.1) можно преобразовать так, чтобы правая часть тождества оказалась полностью вычисляемой. Нетрудно видеть, что $\operatorname{div} e^* - a \cdot \nabla e = \mathcal{R}_f(v, y^*) + \rho^2 e$. Поэтому

$$(\operatorname{div} e^* - a \cdot \nabla e)^2 = \mathcal{R}_f^2(v, y^*) + \rho^4 e^2 + 2\rho^2 \mathcal{R}_f(v, y^*)e$$

и, следовательно,

$$\|(\operatorname{div} e^* - a \cdot \nabla e)\|_{\rho^{-1}}^2 - \|\mathcal{R}_f(v, y^*)\|_{\rho^{-1}}^2 - \int_{\Omega} \rho^2 e^2 dx = 2 \int_{\Omega} \mathcal{R}_f(v, y^*)e dx. \quad (2.11)$$

Из (2.1) и (2.11) вытекает тождество

$$\mu_2^2(e, e^*) = \|A\nabla v - y^*\|_{A^{-1}}^2 + \|\mathcal{R}_f(v, y^*)\|_{\rho^{-1}}^2, \quad (2.12)$$

где мера отклонения μ_2 задается равенством

$$\mu_2^2(e, e^*) := \|\nabla e\|_A^2 + \|e^*\|_{A^{-1}}^2 + \int_{\Omega} \rho_a^2 e^2 dx + \|a \cdot \nabla e - \operatorname{div} e^*\|_{\rho^{-1}}^2.$$

Ясно, что мера $\mu_2(e, e^*)$ обращается в нуль, только если e и e^* тождественно равны нулю. Правая часть (2.12) легко вычисляется, так что тождество позволяет просто контролировать точность приближенных решений. Особенностью тождества (2.12) является наличие весовой функции $1/\rho^2$ в обеих частях. С вычислительной точки зрения это является недостатком, если ρ мало. При очень малых ρ нормы, содержащие эти весовые функции в левой и правой частях тождества, становятся доминирующими и почти равными друг другу, что делает тождество малоинтересным.

Замечание 3. Если $\operatorname{div} a = 0$, то $a \cdot \nabla u - \operatorname{div} p^* = \operatorname{div}(au - A\nabla u)$. Таким образом, векторнозначная функция $au - A\nabla u$ представляет собой полный поток p_{tot}^* , который состоит из диффузионного потока $-A\nabla u$ и потока, связанного с адвекцией $p_{\text{adv}}^* := au$. Соответственно $-y^*$ и av являются приближениями этих потоков. Поэтому

$$a \cdot \nabla e - \operatorname{div} e^* = \operatorname{div}(av - y^*) - \operatorname{div} p_{\text{tot}}^*,$$

и величина $\|a \cdot \nabla e - \operatorname{div} e^*\|_{\rho^{-1}}^2$ представляет собой взвешенную норму ошибки аппроксимации дивергенции полного потока. Если эту ошибку исключить, то из тождества (2.12) следует оценка

$$\|\nabla e\|_A^2 + \|e\|_{\rho_a}^2 + \|e^*\|_{A^{-1}}^2 \leq \|A\nabla v - y^*\|_{A^{-1}}^2 + \|\mathcal{R}_f(v, y^*)\|_{\rho^{-1}}^2, \quad (2.13)$$

в которой мера отклонения почти такая же, как в (2.1).

Если $\operatorname{div} a = 0$, то тождество (2.12) приобретает вид

$$\|\nabla e\|_A^2 + \|e^*\|_{A^{-1}}^2 + \|e\|_{\rho}^2 + \|\operatorname{div} e^* - a \cdot \nabla e\|_{\rho^{-1}}^2 = \|A\nabla v - y^*\|_{A^{-1}}^2 + \|\mathcal{R}_f(v, y^*)\|_{\rho^{-1}}^2. \quad (2.14)$$

Если $a = 0$, то (2.14) еще более упрощается:

$$\|\nabla e\|_A^2 + \|e^*\|_{A^{-1}}^2 + \|e\|_{\rho}^2 + \|\operatorname{div} e^*\|_{\rho^{-1}}^2 = \|A\nabla v - y^*\|_{A^{-1}}^2 + \|\mathcal{R}_f(v, y^*)\|_{\rho^{-1}}^2.$$

Это апостериорное тождество было получено ранее для задачи реакции–диффузии в [25], [26] (см. также [28, гл. 2]).

3. ОЦЕНКА $\int_{\Omega} \mathcal{R}_f(v, y^*)e dx$

Для получения полностью вычисляемых оценок мы преобразуем интеграл $\int_{\Omega} \mathcal{R}_f(v, y^*)e dx$, входящий в (2.1), двумя разными способами. Первый основывается на простой оценке

$$\int_{\Omega} \mathcal{R}_f(v, y^*)e dx \leq C_{\Omega} \|\mathcal{R}_f(v, y^*)\| \|\nabla e\| \leq \frac{\alpha}{2} C_{\Omega}^2 \|\mathcal{R}_f(v, y^*)\|^2 + \frac{1}{2\alpha} \|\nabla e\|^2,$$

где $\alpha > 0$. Она приводит к следующему заключению: для любых $y^* \in Q_{\text{div}}^*$, $v \in V_0 + u_0$ и $\alpha \geq 1/c_1^2$ выполняется неравенство

$$\mu_3^2(e, e^*, \alpha) \leq M_3^2(v, y^*, \alpha) := \|A\nabla v - y^*\|_{A^{-1}}^2 + \alpha C_\Omega^2 \|\mathcal{R}_f(v, y^*)\|^2, \tag{3.1}$$

где

$$\mu_3^2(e, e^*, \alpha) := \left(1 - \frac{1}{c_1^2 \alpha}\right) \|\nabla e\|_A^2 + 2 \int_\Omega \sigma_a e^2 dx + \|e^*\|_{A^{-1}}^2.$$

Перейдя к инфимуму по y^* в обеих частях (3.1), мы получаем оценку для той части меры отклонения, которая связана с e :

$$\left(1 - \frac{1}{c_1^2 \alpha}\right) \|\nabla e\|_A^2 + 2 \int_\Omega \sigma_a e^2 dx \leq \inf_{y^* \in Q_{\text{div}}^*} \left\{ \|A\nabla v - y^*\|_{A^{-1}}^2 + \alpha C_\Omega^2 \|\mathcal{R}_f(v, y^*)\|^2 \right\}. \tag{3.2}$$

Как будет видно из примеров, простые оценки (3.1) и (3.2) иногда работают достаточно хорошо, но в ряде случаев могут сильно переоценивать меру отклонения. Поэтому далее мы рассмотрим другой метод.

Более точные оценки можно получить, если интеграл $\int_\Omega \mathcal{R}_f(v, y^*) e dx$ преобразуется с помощью специально построенной вспомогательной задачи. Пусть $u_{\mathcal{R}}$ и $p_{\mathcal{R}}^*$ являются решениями задачи

$$\begin{aligned} \operatorname{div} p_{\mathcal{R}}^* + \mathcal{R}_f(v, y^*) &= 0, \\ p_{\mathcal{R}}^* &= \nabla u_{\mathcal{R}}, \\ u_{\mathcal{R}} &= 0 \quad \text{на } \Gamma. \end{aligned}$$

Тогда

$$\int_\Omega \mathcal{R}_f(v, y^*) e dx = - \int_\Omega \nabla u_{\mathcal{R}} \cdot \nabla e dx.$$

Эта задача намного проще, чем (1.2)–(1.4), и не содержит малого параметра. Она обладает и другим важным свойством. Поскольку

$$\int_\Omega \nabla u_{\mathcal{R}} \cdot \nabla w dx = \int_\Omega \mathcal{R}_f(v, y^*) w dx \quad \forall w \in V_0,$$

мы заключаем, что

$$\begin{aligned} \|p_{\mathcal{R}}^*\|^2 &= \|\nabla u_{\mathcal{R}}\|^2 = \int_\Omega \mathcal{R}_f(v, y^*) u_{\mathcal{R}} dx = \int_\Omega ((p^* - y^*) \cdot \nabla u_{\mathcal{R}} - a \cdot \nabla(v - u) u_{\mathcal{R}} - \rho^2(v - u) u_{\mathcal{R}}) dx \leq \\ &\leq (\|p^* - y^*\| + C_\Omega (\|a\|_\infty \|\nabla(v - u)\| + \|v - u\|_\rho)) \|\nabla u_{\mathcal{R}}\|. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\|\nabla u_{\mathcal{R}}\|$ и $\|p_{\mathcal{R}}^*\|$ стремятся к нулю, если $y^* \rightarrow p^*$ в $L^2(\Omega)$ и $v \rightarrow u$ в V , что является совершенно естественным требованием относительно сходимости последовательности приближенных решений.

Конечно, точное решение $u_{\mathcal{R}}$ неизвестно. Однако можно использовать конечномерный аналог вспомогательной задачи и получить соответствующее приближение $u_{\mathcal{R},h}$. Эта идея была реализована в [29], где применялись классические конечноэлементные аппроксимации, а для оценки нормы разности между $u_{\mathcal{R}}$ и ее конечноэлементной аппроксимацией $u_{\mathcal{R},h}$ использовались стандартные интерполяционные оценки. Последние основаны на повышенной регулярности точного решения $u_{\mathcal{R}}$, что ограничивает область применимости данного метода. Здесь мы рассматриваем другую реализацию этой идеи, которая основана на аппроксимации $p_{\mathcal{R}}^*$ и не связана с требованиями повышенной регулярности.

Рассмотрим разбиение Ω на подобласти (элементы) T_i , так что $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^N \bar{T}_i$, $T_i \cap T_j = \emptyset$, если $i \neq j$. Элементы имеют характерный размер H . Это разбиение не зависит от способа дискретизации, использованного при построении приближенного решения v и соответствующего по-

тока y^* . В частности, v может быть конечноэлементной аппроксимацией u_h , построенной на сетке \mathcal{T}_h с характерным размером элементов h , а сетка \mathcal{T}_H во вспомогательной задаче может совпадать с \mathcal{T}_h , а может и быть другой (крупнее или мельче в зависимости от конкретных обстоятельств).

На элементе T определим простейший интерполяционный оператор $\pi_H : L^2(T) \rightarrow P^0(T)$ с помощью соотношения $\pi_H w|_T = \{w\}_T$. Тогда $\pi_H w$ – это кусочно-постоянная функция, принимающая на каждом T_i среднее значение функции w . Разобьем интеграл на два слагаемых:

$$\int_{\Omega} \mathcal{R}_f(v, y^*) e dx = \int_{\Omega} \mathcal{R}_f(v, y^*) \pi_H e dx + \int_{\Omega} \mathcal{R}_f(v, y^*) (e - \pi_H e) dx. \tag{3.3}$$

Для преобразования первого интеграла в правой части (3.3) используем вспомогательную задачу: найти $p_H^* \in \hat{Q}_H^*$ и $u_H \in \hat{V}_H$ такие, что

$$\int_{\Omega} (u_H \operatorname{div} y_H^* + y_H^* p_H^*) dx = 0 \quad \forall y_H^* \in \hat{Q}_H^*, \tag{3.4}$$

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} p_H^* + \mathcal{R}_f(v, y^*) w_H) dx = 0 \quad \forall w_H \in \hat{V}_H, \tag{3.5}$$

где $\hat{Q}_H^* \subset Q_{\operatorname{div}}^*$, а \hat{V}_H^* состоит из кусочно-постоянных функций, принимающих постоянные значения на каждом T_i . Система уравнений (3.4), (3.5) определяет двойственные смешанные аппроксимации краевой задачи $\Delta u_{\mathcal{R}} + \mathcal{R}_f(v, y^*) = 0$ с однородными краевыми условиями Дирихле. Эти аппроксимации хорошо изучены (см. монографии [35], [36]). Для симплицальных сеток пространство \hat{Q}_H^* часто формируют с помощью элементов Равьяра–Тома (Raviart–Thomas elements RT_0). Для сеток, использующих полигональные ячейки, можно использовать соответствующие макроэлементы (например, такие как в [37]).

Из (3.4) и (3.5) следует, что

$$\|p_H^*\|_{\Omega}^2 = -\int_{\Omega} u_H \operatorname{div} p_H^* dx = \int_{\Omega} \mathcal{R}_f(v, y^*) u_H dx.$$

Отсюда видно, что $\|p_H^*\|_{\Omega}$ стремится к нулю, если $\mathcal{R}_f(v, y^*)$ стремится к нулю слабо в $L^2(\Omega)$.

Соотношение (3.5) позволяет переписать (3.3) в виде

$$\int_{\Omega} \mathcal{R}_f(v, y^*) e dx = -\int_{\Omega} \operatorname{div} p_H^* \pi_H e dx + \int_{\Omega} \mathcal{R}_f(v, y^*) (e - \pi_H e) dx. \tag{3.6}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (3.6). Поскольку $\int_{T_i} \pi_H w dx = \{w\}_{T_i} |T_i| = \int_{T_i} w dx$ и $\operatorname{div} p_H^* \in P^0(T_i)$ для любого T_i , мы получаем оценку

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} p_H^* \pi_H e dx &= \sum_i \int_{T_i} \operatorname{div} p_H^* \pi_H e dx = \sum_i (\operatorname{div} p_H^*)_{T_i} \int_{T_i} \pi_H e dx = \int_{\Omega} \operatorname{div} p_H^* e dx \leq \\ &\leq \|p_H^*\|_{\Omega} \|\nabla e\|_{\Omega} \leq \frac{1}{2\alpha c_1^2} \|\nabla e\|_A^2 + \frac{\alpha}{2} \|p_H^*\|_{\Omega}^2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Второе слагаемое оценивается с помощью неравенства Пуанкаре

$$\left| \int_{\Omega} \mathcal{R}(v, y^*) (e - \pi_H e) dx \right| \leq \sum_{i=1}^N C_P(T_i) \|\mathcal{R}(v, y^*) - \xi_i\|_{T_i} \|\nabla e\|_{T_i} \leq S(v, y^*) \|\nabla e\| \leq \frac{1}{2\beta c_1^2} \|\nabla e\|_A^2 + \frac{\beta}{2} S(v, y^*)^2, \tag{3.8}$$

где

$$S^2(v, y^*) = \sum_{i=1}^N C_P^2(T_i) \|\mathcal{R}_f(v, y^*) - \xi_i\|_{T_i}^2, \quad \xi_i = \{\mathcal{R}(v, y^*)\}_{T_i}.$$

Для выпуклого T_i мы имеем оценку $C_p(T_i) \leq \text{diam } T_i/\pi$ (см. [38]). Таким образом,

$$S^2(v, y^*) \leq \bar{S}^2(v, y^*) := \sum_{i=1}^N \frac{(\text{diam } T_i)^2}{\pi^2} \|\mathcal{R}(v, y^*) - \xi_i\|_{T_i}^2. \tag{3.9}$$

Поскольку предполагается, что $\text{diam } T_i \leq dH$, где d – некоторая положительная постоянная, то множители в сумме не превосходят d^2H^2/π^2 .

Равенство (3.3) с учетом (3.9) и (3.8) приводит к оценке

$$2 \left| \int_{\Omega} \mathcal{R}(v, y^*) e dx \right| \leq K_{\alpha\beta} \|\nabla e\|_A^2 + \beta \bar{S}^2(v, y^*) + \alpha \|p_H^*\|_{\Omega}^2, \tag{3.10}$$

где $K_{\alpha\beta} = (\alpha + \beta)/(\beta\alpha c_1^2)$. Здесь α и β – это положительные постоянные такие, что $1/\alpha + 1/\beta \leq c_1^2$. С учетом (3.10) тождество (2.1) дает оценку

$$\mu_4^2(e, e^*, \alpha, \beta) \leq M_4^2(v, y^*, \alpha, \beta) := \|A\nabla v - y^*\|_{A^{-1}}^2 + \beta \bar{S}^2(v, y^*) + \alpha \|p_H^*\|_{\Omega}^2, \tag{3.11}$$

где

$$\mu_4^2(e, e^*, \alpha, \beta) := (1 - K_{\alpha\beta}) \|\nabla e\|_A^2 + 2 \int_{\Omega} \sigma_a e^2 dx + \|e^*\|_{A^{-1}}^2,$$

так что эта мера зависит от выбора параметров α и β . Выбирая параметры, можно увеличивать или уменьшать множитель при $\|\nabla e\|_A^2$. Если взять $\alpha = \beta = 2/c_1^2$, то $K_{\alpha\beta} = 1$, и первое слагаемое меры исчезает.

Замечание 4. Рассуждая аналогичным образом, можно получить оценку меры отклонения снизу

$$(1 + K_{\alpha\beta}) \|\nabla e\|_A^2 + 2 \int_{\Omega} \sigma_a e^2 dx + \|e^*\|_{A^{-1}}^2 \geq \|A\nabla v - y^*\|_{A^{-1}}^2 - \beta \bar{S}^2(v, y^*) - \alpha \|p_H^*\|_{\Omega}^2. \tag{3.12}$$

4. ОЦЕНКИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ

Соотношения, полученные в предыдущем разделе, носят общий характер и применимы для любых задач, удовлетворяющих условиям (1.5), (1.6), (1.7) и (1.8). Применим их к задачам с $A = \varepsilon A_0$, где A_0 – это положительно-определенная симметричная матрица с наименьшим собственным значением порядка единицы, а $\varepsilon > 0$ – малый параметр. В этом случае (1.2) и (1.3) приобретают вид

$$-\varepsilon \text{div } A_0 \nabla u + a \cdot \nabla u + \rho^2 u = f, \tag{4.1}$$

$$p^* = \varepsilon A_0 \nabla u. \tag{4.2}$$

Нетрудно видеть, что

$$\|e^*\|_{A^{-1}}^2 = \varepsilon^{-1} \|e^*\|_{A_0^{-1}}^2, \quad \|\nabla e\|_A^2 = \varepsilon \|\nabla e\|_{A_0}^2, \quad \|A\nabla v - y^*\|_{A^{-1}}^2 = \varepsilon^{-1} \|\varepsilon A_0 \nabla v - y^*\|_{A_0^{-1}}^2.$$

Поэтому (2.1) заменяется тождеством

$$\mu_1^2(e, e^*, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \|\varepsilon A_0 \nabla v - y^*\|_{A_0^{-1}}^2 - 2 \int_{\Omega} \mathcal{R}_f(v, y^*) e dx, \tag{4.3}$$

где

$$\mu_1^2(e, e^*, \varepsilon) := \varepsilon \|\nabla e\|_{A_0}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|e^*\|_{A_0^{-1}}^2 + \int_{\Omega} (2\rho^2 - \text{div } a) e^2 dx.$$

Тождество (2.12) приобретает вид

$$\mu_2^2(e, e^*) = \frac{1}{\varepsilon} \|\varepsilon A_0 \nabla v - y^*\|_{A_0^{-1}}^2 + \|\rho^{-1} \mathcal{R}_f(v, y^*)\|_{\Omega}^2, \tag{4.4}$$

где

$$\mu_2^2(e, e^*) := \varepsilon \|\nabla e\|_{A_0}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|e^*\|_{A_0^{-1}}^2 + \int_{\Omega} (\rho_a^2 e^2 + \rho^{-2} (\operatorname{div} e^* - a \cdot \nabla e)^2) dx,$$

и предполагается, что условие (2.10) выполнено. Подчеркнем, что апостериорные тождества (4.3) и (4.4) выполняются при любых $\varepsilon > 0$. Этот факт создает основу для контроля точности приближенных решений сингулярно возмущенных уравнений. В первую очередь это относится к задачам, в которых условие (2.10) выполнено и ρ не принимает очень малых значений. В этом случае явно вычисляемая правая часть тождества (4.4) дает верхнюю границу отклонения для комбинированной меры ошибки $\mu_2(e, e^*, \varepsilon)$. Также следует отметить, что весовые множители правильно балансируют компоненты меры в соответствии с поведением точного решения, которое равномерно ограничено по ε в L^2 норме и не может расти быстрее $\varepsilon^{-1/2}$ по норме градиента.

Для случая $\operatorname{div} a = 0$ из (4.4) следует оценка

$$\varepsilon \|\nabla e\|_{A_0}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|e^*\|_{A_0^{-1}}^2 + \|e\|_{\rho}^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \|\varepsilon A_0 \nabla v - y^*\|_{A_0^{-1}}^2 + \|\mathcal{R}_f(v, y^*)\|_{\rho^{-1}}^2. \tag{4.5}$$

Чтобы получить полностью вычисляемые оценки с помощью (4.3), используем те же рассуждения, что и в разд. 3. Так как

$$2 \int_{\Omega} \mathcal{R}_f(v, y^*) e dx \leq \frac{\alpha}{\varepsilon} C_{\Omega}^2 \|\mathcal{R}_f(v, y^*)\|^2 + \frac{\varepsilon}{\alpha} \|\nabla e\|^2 \leq \frac{\alpha}{\varepsilon} C_{\Omega}^2 \|\mathcal{R}_f(v, y^*)\|^2 + \frac{\varepsilon}{c_1^2(A_0)\alpha} \|\nabla e\|_{A_0}^2,$$

где $c_1(A_0)$ – это наименьшее собственное значение матрицы A_0 , мы получаем соответствующий вариант оценки (3.1)

$$\mu_3^2(e, e^*, \alpha, \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \|\varepsilon A_0 \nabla v - y^*\|_{A_0^{-1}}^2 + \frac{\alpha}{\varepsilon} C_{\Omega}^2 \|\mathcal{R}_f(v, y^*)\|^2, \tag{4.6}$$

где

$$\mu_3^2(e, e^*, \alpha, \varepsilon) := \varepsilon \left(1 - \frac{1}{c_1^2(A_0)\alpha} \right) \|\nabla e\|_{A_0}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|e^*\|_{A_0^{-1}}^2 + 2 \int_{\Omega} \sigma_a^2 e^2 dx.$$

Из (4.6) следует аналог оценки (3.2)

$$\varepsilon \left(1 - \frac{1}{c_1^2(A_0)\alpha} \right) \|\nabla e\|_{A_0}^2 + 2 \int_{\Omega} \sigma_a^2 e^2 dx \leq \inf_{y^* \in Q_{\operatorname{div}}} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \|\varepsilon A_0 \nabla v - y^*\|_{A_0^{-1}}^2 + \frac{\alpha}{\varepsilon} C_{\Omega}^2 \|\mathcal{R}_f(v, y^*)\|^2 \right\}. \tag{4.7}$$

Преобразуем оценку (3.11), где $K_{\alpha\beta} = (\alpha + \beta)/(\varepsilon\beta\alpha c_1^2(A_0))$. Путем замены $\alpha = \bar{\alpha}/\varepsilon$, $\beta = \bar{\beta}/\varepsilon$ определим новую константу $K_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = (\bar{\alpha} + \bar{\beta})/(\bar{\beta}\bar{\alpha}c_1^2(A_0))$. Тогда оценка трансформируется следующим образом:

$$\mu_4^2(e, e^*, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \|\varepsilon A_0 \nabla v - y^*\|_{A_0^{-1}}^2 + \mathcal{E}(v, y^*, p_H^*, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) \right\}, \tag{4.8}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(v, y^*, p_H^*, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) &:= \bar{\beta} \bar{S}^2(v, y^*) + \bar{\alpha} \|p_H^*\|_{\Omega}^2, \\ \mu_4^2(e, e^*, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \varepsilon) &:= (1 - K_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}) \varepsilon \|\nabla e\|_{A_0}^2 + 2 \int_{\Omega} \sigma_a^2 e^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \|e^*\|_{A_0^{-1}}^2. \end{aligned}$$

Далее мы покажем как апостериорные тождества (4.3), (4.4) и оценки (3.11), (3.12) позволяют контролировать приближенные решения сингулярно возмущенных задач.

5. ПРИМЕРЫ

В этом разделе апостериорные тождества и вытекающие из них оценки проверяются на примере сингулярно возмущенной двухточечной задачи

$$-\varepsilon u'' + au' + \rho^2 u = f, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = b \tag{5.1}$$

с постоянными ρ и a . В этом случае Ω является интервалом $I := (0, 1)$,

$$\|e\|_{A_0}^2 = \int_0^1 |e'|^2 dx, \quad c_1(A_0) = 1, \quad C_\Omega = \frac{1}{\pi}, \quad \mathcal{R}_f(v, y^*) = (y^*)' + f - av' - \rho^2 v,$$

$$\mu_1^2(e, e^*, \varepsilon) = \varepsilon \|e'\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|e^*\|^2 + 2 \int_0^1 \rho^2 e^2 dx,$$

$$\mu_2^2(e, e^*, \varepsilon) = \varepsilon \|e'\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|e^*\|^2 + \int_0^1 (\rho^2 |e|^2 + \rho^{-2} [(e^*)' - ae']^2) dx.$$

Тождества (4.3) и (4.4) приобретают вид

$$\mu_1^2(e, e^*, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \|\varepsilon v' - y^*\|^2 - 2 \int_0^1 \mathcal{R}_f(v, y^*) e dx \tag{5.2}$$

и

$$\mu_2^2(e, e^*, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \|\varepsilon v' - y^*\|^2 + \|\mathcal{R}_f(v, y^*)\|_{p^{-1}}^2 =: M^2(v, y^*, \varepsilon) \tag{5.3}$$

соответственно. Приведем также оценку (4.5):

$$\varepsilon \|e'\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|e^*\|^2 + \|e\|_p^2 \leq M^2(v, y^*, \varepsilon). \tag{5.4}$$

Тождество (5.2) проверялось и во всех примерах выполнялось с точностью до ошибок численного интегрирования (которые всегда можно уменьшить). Однако это тождество содержит неизвестную функцию e в правой части. Поэтому с практической точки зрения интересно не столько оно само, сколько оценки, которые из него следуют. Напротив, величина $M(v, y^*, \varepsilon)$ в тождестве (5.3) вычисляется явно. Для того чтобы проверить это тождество и оценить эффективность оценки (5.4), введем коэффициенты

$$I_1 := \frac{M(v, y^*, \varepsilon)}{\mu_2(e, e^*, \varepsilon)} \quad \text{и} \quad I_2 := \frac{M(v, y^*, \varepsilon)}{\left(\varepsilon \|e'\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|e^*\|^2 + \|e\|_p^2\right)^{1/2}}.$$

Представленная в таблицах и графиках величина I_1 является отношением правой части (5.3) к левой (см. табл. 1–3). Во всех случаях она была равна 1 с точностью до малых погрешностей, обу-

Таблица 1. Сравнение оценок (5.3), (5.4), (5.5) и (5.6) для интерполянтов точного решения в примере 1

ε	1.0000	0.5000	0.2500	0.1250	0.0625	0.0312	0.0156	0.0078
I_1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
I_2	1.0453	1.0860	1.1560	1.2600	1.3801	1.4763	1.5366	1.5874
I_3	1.4286	1.4286	1.4287	1.4291	1.4303	1.4337	1.4424	1.4648
I_4	1.7320	1.7320	1.7320	1.7321	1.7322	1.7326	1.7335	1.7361
I_5	1.4274	1.4647	1.5953	1.9762	2.8047	4.1593	6.1088	8.9940

Таблица 2. Сравнение оценок (5.3), (5.4), (5.5) и (5.6) в примере 2 на сетке с 500 интервалами

ε	1.0000	0.5000	0.2500	0.1250	0.0625	0.0312	0.0156	0.0078
I_1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
I_2	2.9227	5.0951	9.5666	17.9884	32.4251	52.7068	70.5289	74.3708
I_3	1.4284	1.4277	1.4251	1.4158	1.3889	1.3426	1.3444	1.4623
I_4	1.7318	1.7309	1.7274	1.7152	1.6821	1.6375	1.6791	1.8602
I_5	2.2485	4.7141	12.1877	32.2792	81.5810	181.9772	323.3232	453.9166

Таблица 3. Сравнение оценок (5.3), (5.4), (5.5) и (5.6) в примере 3 на сетке с 500 интервалами

ε	1.0000	0.5000	0.2500	0.1250	0.0625	0.0312	0.0156	0.0078
I_1	1.0001	1.0001	1.0002	1.0002	1.0002	1.0001	1.0000	1.0000
I_2	1.4737	1.4576	1.5201	1.7132	2.1667	3.1023	4.8093	7.4144
I_3	1.4286	1.4284	1.4280	1.4269	1.4240	1.4158	1.3941	1.3523
I_4	1.7322	1.7318	1.7312	1.7296	1.7256	1.7149	1.6879	1.6438
I_5	2.5047	3.1943	4.5965	7.6472	14.7498	31.7016	71.2819	153.8980

словленных использованием численных квадратур. Величина I_2 больше единицы и может оказаться достаточно большой, если вклад слагаемого $\rho^{-2}[(e^*)' - ae']^2$ значителен. Как следует из примеров, при малых ε это вполне возможно.

Обратимся к оценке (3.11), которая была построена с помощью вспомогательной конечно-мерной задачи (3.4), (3.5). Разобьем интервал I на подынтервалы $T_i := (x_i, x_{i+1})$ так, что $|x_{i+1} - x_i| = H_i$, и обозначим

$$\zeta_i = \frac{1}{H} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathcal{R}_f(v, y^*) dx = \{\{\mathcal{R}\}\}(q_h^*)_{I_i}.$$

В (3.4), (3.5) функция p_H^* является непрерывной кусочно-аффинной, а функция w_H является разрывной функцией, принимающей постоянные значения на каждом T_i . Равенство (3.5) означает, что

$$\int_0^1 ((p_H^*)' + \mathcal{R}_f(v, y^*)) w_H dx = 0$$

для кусочно-постоянной тест-функции w_H , значения которой на T_i равны некоторым константам. Поскольку эти константы могут быть любыми, мы заключаем, что на каждом подынтервале должно выполняться равенство

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} ((p_H^*)' + H\zeta_i) dx = 0,$$

откуда следует, что $(p_H^*)' = -\zeta_i$ на T_i . Определим функцию $\alpha(x) = -\zeta_i$ для $x \in I_i$. Таким образом, искомым решением является кусочно-аффинная непрерывная функция p_H^* такая, что $p_H^* = \int_0^x \alpha(t) dt + c$. В силу свойств двойственной вариационной формулировки (которая порождает систему (3.4), (3.5)) интеграл $\int_0^1 |p_H^*|^2 dx$ должен быть минимален. Это дает условие на постоянную c :

$$c = \hat{c} := - \int_0^1 \alpha(t) dt dx.$$

При этом

$$(v, y^*, p_H^*, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) := \bar{\beta} \sum_{i=1}^N \frac{H_i^2}{\pi^2} \|\mathcal{R}_f(v, y^*) - \zeta_i\|_{T_i}^2 + \bar{\alpha} \|p_H^*\|_{\Omega}^2,$$

и мы получаем оценку

$$\mu_4^2(e, e^*, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 |\varepsilon v' - y^*|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} (v, y^*, p_H^*, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) =: M_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}(v, y^*, \varepsilon), \tag{5.5}$$

где

$$\mu_4^2(e, e^*, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \varepsilon) := \int_0^1 ((1 - K_{\bar{\alpha}\bar{\beta}})\varepsilon |e'|^2 + 2\sigma_a e^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} |e^*|^2) dx.$$

В примерах качество этой оценки характеризуется величинами

$$I_3 := \frac{M_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}(v, y^*, \varepsilon)}{\mu_4(e, e^*, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \varepsilon)}, \quad \bar{\alpha} = \bar{\beta} = 3, \quad \text{и} \quad I_4 := \frac{M_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}(v, y^*, \varepsilon)}{\mu_4(e, e^*, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \varepsilon)}, \quad \bar{\alpha} = 2, \quad \bar{\beta} = 100.$$

Эти оценки оказались наиболее работоспособными при малых ε , что ясно видно из приведенных далее таблиц и графиков.

В заключение приведем оценку (4.6), которая для задачи (5.1) записывается в виде:

$$\mu_3^2(e, e^*, \alpha, \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \|\varepsilon v' - y^*\|^2 + \frac{\alpha}{\varepsilon \pi^2} \|\mathcal{R}_f(v, y^*)\|^2 =: M_\alpha^2(v, y^*, \varepsilon), \quad (5.6)$$

где

$$\mu_3^2(e, e^*, \alpha, \varepsilon) := \varepsilon \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \|e'\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|e^*\|^2 + 2 \int_{\Omega} \rho^2 e^2 dx.$$

Эффективность этой оценки характеризует число

$$I_5 := \frac{M_\alpha(v, y^*, \varepsilon)}{\mu_3(e, e^*, \alpha, \varepsilon)}.$$

При $\varepsilon \sim 1$ эта оценка вполне применима, но при малых значениях ε она может приводить к большой переоценке.

Пример 1. Проверку эффективности оценок начнем с наиболее простой задачи, в которой конвективный член отсутствует. Рассмотрим двухточечную задачу

$$-\varepsilon u'' + \rho^2 u = f, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \quad (5.7)$$

с $f = \text{const}$. Точное решение

$$u = -\frac{1}{\rho^2 K} (\mu_1 e^{-\delta x} + \mu_2 e^{\delta x}) + \frac{1}{\rho^2}, \quad u' = -\frac{\delta}{\rho^2 K} (-\mu_1 e^{-\delta x} + \mu_2 e^{\delta x}),$$

$$u'' = -\frac{\delta^2}{\rho^2 K} (\mu_1 e^{-\delta x} + \mu_2 e^{\delta x}),$$

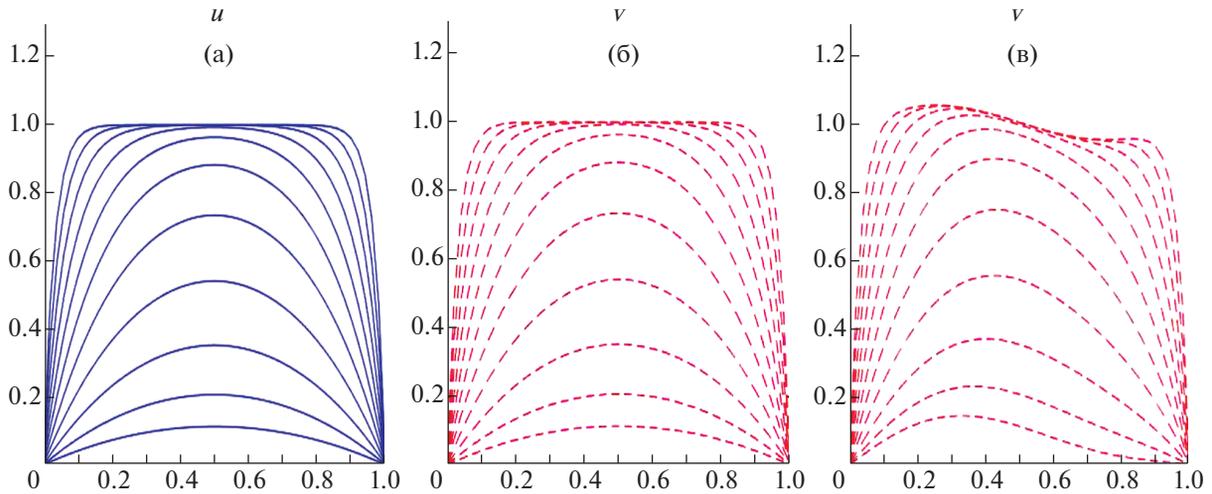
$$\rho^* = \varepsilon u', \quad (\rho^*)' = -\frac{1}{K} (\mu_1 e^{-\delta x} + \mu_2 e^{\delta x}).$$

Здесь

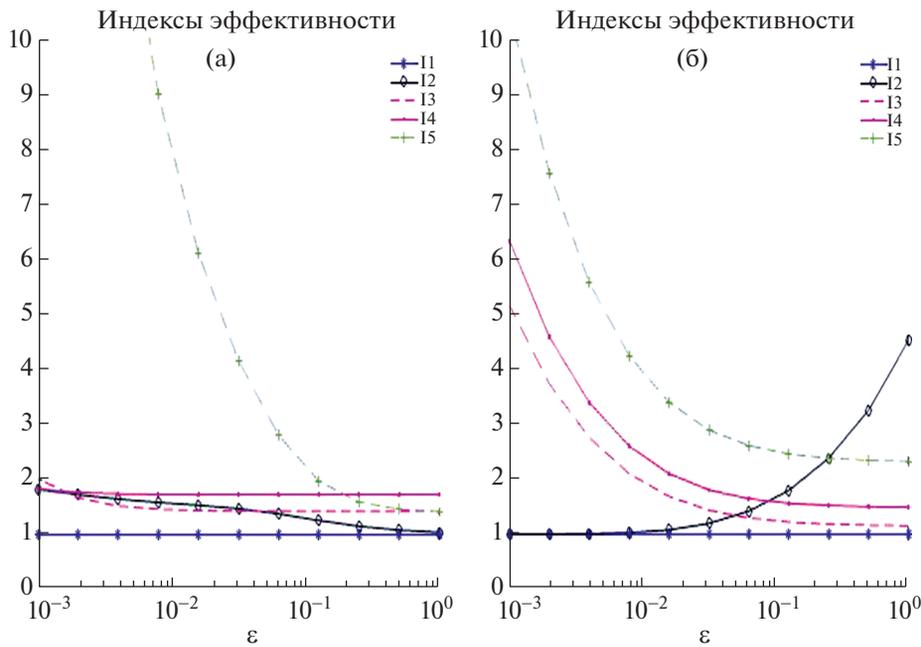
$$\delta = \frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \mu_1 = e^\delta - 1, \quad \mu_2 = 1 - e^{-\delta}, \quad K = \mu_1 + \mu_2 = e^\delta - e^{-\delta}.$$

В расчетах было взято $\rho = 1$, $f = 1$. Изменение точного решения при уменьшении ε показано на фиг. 1а. В качестве v был взят интерполант точного решения на равномерной сетке с 500 интервалами. Соответствующие функции изображены на фиг. 1б. Визуально они практически не отличаются от точного решения и их можно считать очень хорошими аппроксимациями точного решения (фактически они совпадают с галеркинскими аппроксимациями u_h на данной сетке). В качестве y^* была взята простейшая регуляризация $\varepsilon u_h'$, которая строится путем усреднения значений в узлах сетки. В табл. 1 приведены результаты, которые показывают, как работают различные оценки. Соответствующие графики изображены на фиг. 2а.

Из табл. 1 и рисунков следует, что тождество (5.3) (которое является частным случаем (2.12)) выполняется точно при любом ε (первая строка табл. 1). Для хороших аппроксимаций оценки (5.4) и (5.5) также работают прекрасно, однако при уменьшении ε эффективность простой оценки (5.6) ухудшается. Для грубых аппроксимаций тождество (5.3) также выполняется для любых ε . При уменьшении ε хорошо работает оценка (5.4), но эффективность остальных оценок снижается. Тем не менее обе оценки (5.5) позволяют правильно оценить порядок ошибки и установить, что соответствующие аппроксимации являются весьма грубыми. Это обстоятельство мо-



Фиг. 1. Точные решения в задаче (5.2) при различных ϵ (а), их интерполянты (б) и грубые аппроксимации (в).

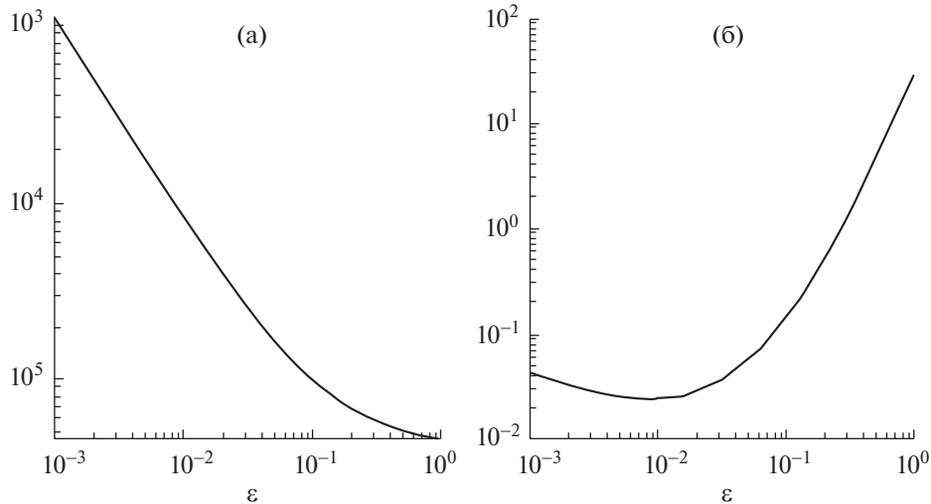


Фиг. 2. Индексы эффективности оценок при различных ϵ для интерполянта точного решения (а) и грубой аппроксимации (б).

жет оказаться полезным, если для решения используются численные схемы, в которых нельзя исключить возникновение неустойчивости.

Решения сингулярно возмущенных задач сильно зависят от ϵ . Меры μ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, также зависят от ϵ . Поэтому в примерах полезно рассматривать не только их абсолютные значения, но и значения, нормализованные относительно норм градиента точного решения ∇u и соответствующего потока p^* . В частности, определим нормализованный вариант меры μ_2 следующим образом:

$$\hat{\mu}_2^2(e, e^*, \epsilon) = \frac{\mu_2^2(e, e^*, \epsilon)}{\epsilon \|\nabla u\|_{\mathcal{A}_0}^2 + \frac{1}{\epsilon} \|p^*\|_{\mathcal{A}_0^{-1}}^2} = \frac{1}{2\epsilon} \frac{\mu_1^2(e, e^*, \epsilon)}{\|\nabla u\|_{\mathcal{A}_0}^2}.$$



Фиг. 3. Относительная погрешность аппроксимаций при различных ε для интерполянта точного решения (а) и грубой аппроксимации (б).

На фиг. 3 приведены величины этой меры в зависимости от ε для точных (фиг. 3а) и грубых (фиг. 3б) аппроксимаций. Видно, что относительная погрешность аппроксимаций изменяется в широких пределах. Таким образом, работоспособность предлагаемых методов апостериорного контроля точности не зависит ни от абсолютной, ни от относительной погрешностей приближенных решений.

Пример 2. Если $f = at - \varepsilon s + (as + \rho^2 t)x + \frac{1}{2}\rho^2 sx^2$, то точное решение (5.1) задается соотношениями

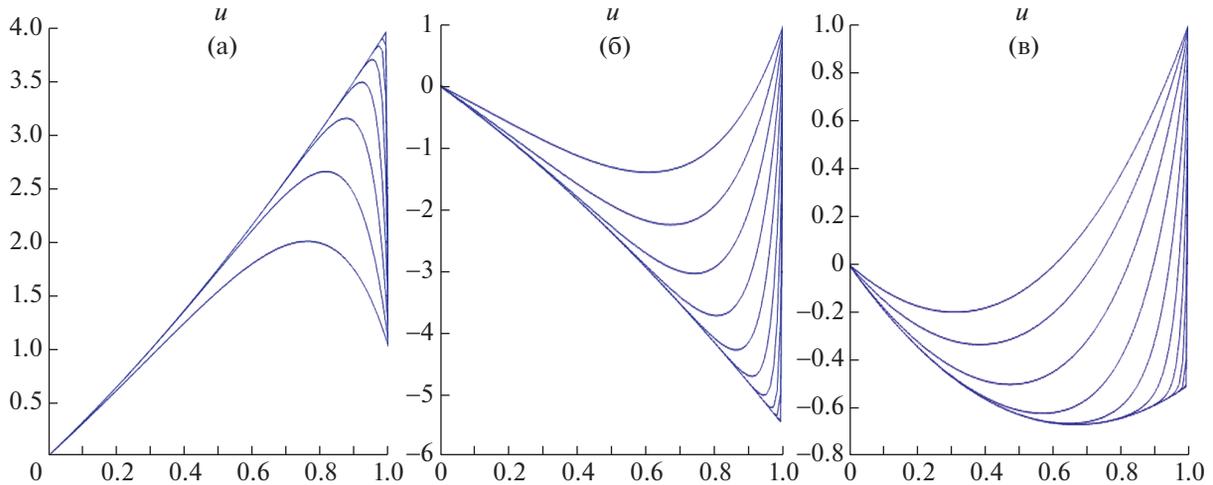
$$u = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + tx + \frac{1}{2}sx^2, \quad p^* = \varepsilon(\lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 x} + t + sx),$$

где

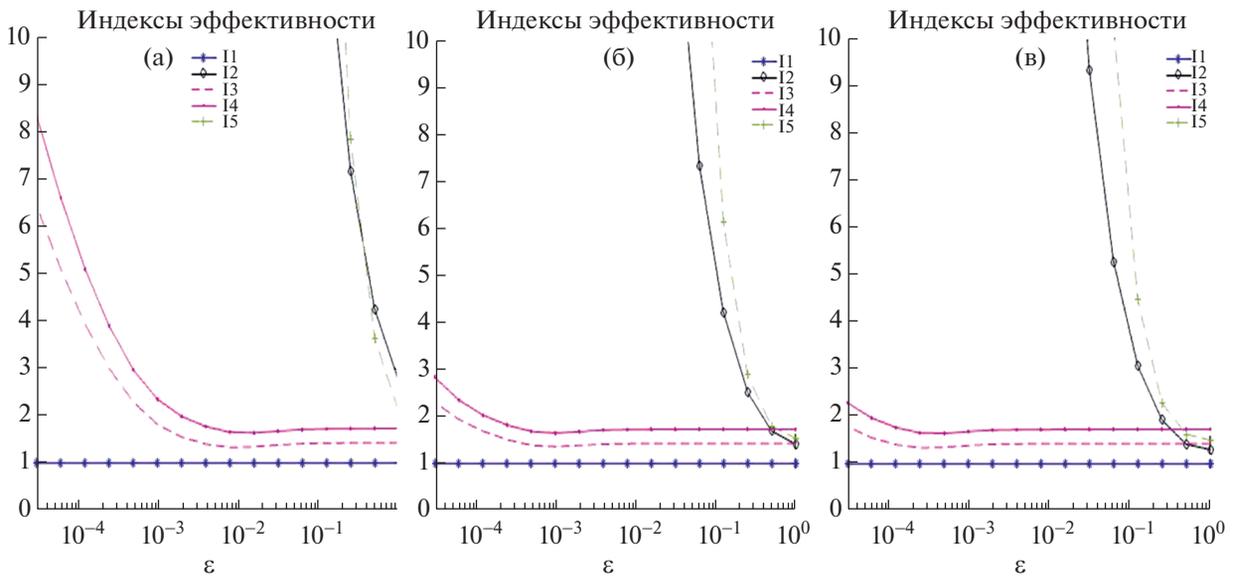
$$\lambda_{1,2} = \frac{a}{2\varepsilon} \mp \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\rho^2 + \frac{a^2}{4\varepsilon}}, \quad C_1 = \left(1 - t - \frac{s}{2}\right) \frac{e^{-\lambda_1}}{(1 - e^{\lambda_2 - \lambda_1})}, \quad C_2 = -C_1.$$

В этом примере исследовалась задача с параметрами $a = 5$, $\rho = 1$, $t = 3$ и $s = 2$, которые моделируют ситуацию с доминирующей конвекцией. Точные решения при различных ε изображены на фиг. 4а. Хорошо видно формирование пограничного слоя при уменьшении ε . В качестве приближенного решения v рассматривался интерполянт точного решения на равномерной сетке с $n = 50$, 500, 5000 и 10000 интервалами. Функция y^* строится как кусочно-аффинная непрерывная функция, являющаяся усреднением $\varepsilon v'$ на той же самой сетке. Соответствующие результаты представлены в табл. 2 и на фиг. 5.

Результаты показывают, что апостериорное тождество (5.3) (которое является частным случаем (2.12)) точно выполняется при любых ε . Простые оценки (5.4) и (5.6) (с $\alpha = 2$) хорошо работают только при значениях ε порядка 1. При уменьшении ε качество этих оценок быстро ухудшается, и они приводят к существенной переоценке меры ошибки. Однако оценка (5.5) работает устойчиво вплоть до весьма малых ε . Так же, как и в примере 1, оценка (5.5) дает лучшие результаты для более точных аппроксимаций. Для точных аппроксимаций оценки дают лучшие результаты, чем для грубых, что вполне ожидаемо, поскольку более точные аппроксимации дают меньшее $\mathcal{R}_f(v, y^*)$ и уменьшают общую переоценку, которая возникает в слагаемом $\mathcal{E}(v, y^*, p_H^*, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$. Для $n = 10000$ оценка не превышает истинное значение меры отклонения более чем в 2 раза вплоть до значений $\varepsilon = 10^{-5}$. Эти результаты получены на равномерных сетках, но позволяют предположить, что на сгущающихся сетках апостериорная оценка (5.5) будет весьма точной. Действительно, при увеличении n в медленно меняющейся части решения практически ничего



Фиг. 4. Точные решения в примерах 2 (а), 3 (б) и 4 (в) при различных ϵ .

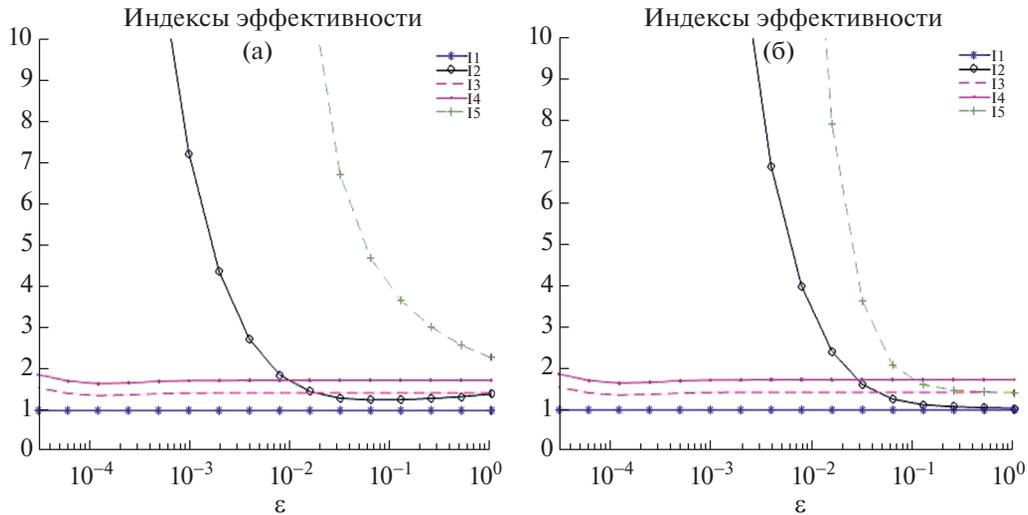


Фиг. 5. Эффективность оценок в примере 2 при различных ϵ для $n = 500$ (а) и $n = 5000$ (б) и $n = 10000$ (в).

не меняется, так что изменение точности оценок на фиг. 5 объясняется тем, что при более точной аппроксимации пограничного слоя вблизи $x = 1$ оценка также дает более точный результат.

Пример 3. В этом примере $a = 1$, $\rho = 3$, $t = -4$ и $s = -3$, что соответствует случаю, когда реакция превалирует над конвекцией. Точные решения для различных ϵ представлены на фиг. 4б в центре. Как и в примере 2, видно образование пограничного слоя с большими значениями производной вблизи точки $x = 1$. Как и в предыдущем примере, приближенное решение построено как кусочно-аффинный интерполянт точного решения на сетке из 5000 интервалов. В этом примере (5.4) работает лучше и обеспечивает хорошую оценку вплоть до $\epsilon = 0.03$. Однако при меньших значениях ϵ возникает существенная переоценка меры отклонения. Как видно из табл. 3, оценка (5.5) дает очень хорошие результаты (строки I_3 и I_4) вплоть до значений $\epsilon = 10^{-3}$.

Пример 4. В этом примере рассматривается случай, когда $a = \rho = 1$, $t = -2$ и $s = 3$. Точные решения, соответствующие различным значениям ϵ , изображены на фиг. 4а. В качестве v был взят интерполянт точного решения на сетке с 5000 интервалами. На фиг. 6 показано поведение ин-



Фиг. 6. Эффективность оценок при различных ε в примерах 3 (а) и 4 (б).

дексов эффективности I_1 – I_5 . Картина очень похожа на то, что мы наблюдали ранее. Индекс I_1 показывает точное выполнение апостериорного тождества (5.3) при всех значениях ε , простые оценки (5.4) и (5.6) можно использовать, но лишь для $\varepsilon > 10^{-1}$, а оценка (5.5) устойчива и отлично работает, по крайней мере, до значений $\varepsilon = 10^{-5}$. В заключение отметим, что приведенные выше примеры относятся к области обыкновенных дифференциальных уравнений, которые являются достаточно простыми, но типичными представителями сингулярно возмущенных краевых задач и адекватно отражают возникающие трудности (неслучайно исследование математических свойств и разностных аппроксимаций этого класса задач начиналось с подобных одномерных моделей). Поэтому можно предполагать, что при переходе к уравнениям в частных производных поведение полученных в статье апостериорных оценок принципиально не изменится, хотя несомненно этот вопрос требует дальнейшего изучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Farrell P.A., Hegarty A.F., Miller J.J.H., Ó Riordan E., Shishkin G.I.* Robust computational techniques for boundary layers. CRC Press, Taylor&Francis, Boca Raton, 2018.
2. *Oleinik O.A., Samokhin V.N.* Mathematical models in boundary layer theory. CRC Press, Taylor&Francis, Boca Raton, 1999.
3. *Schilders W.H.A., Polak S.J., van Welij J.S.* Singular perturbation theory and its application to the computation of electromagnetic fields // IEEE Trans. on Magn. MAG–21. 1985. V. 6. P. 2211–2216.
4. *Prandtl L.* Über Flüssigkeits – bewegung bei kleiner Reibung, in: Verhandlungen, III, Int. Math. Kongresses, Tuebner, Leipzig, 1905. P. 484–491.
5. *Бахвалов Н.С.* К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9. № 4. P. 841–859.
6. *Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У.* Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М.: Мир, 1983.
7. *Шишкин Г.И.* Первая краевая задача для уравнения второго порядка с малыми параметрами при производных // Дифференц. ур-ния. 1977. Т. 13. № 2. P. 376–378.
8. *Шишкин Г.И.* Решение краевой задачи для эллиптического уравнения с малым параметром при старших производных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1986. Т. 26. № 7. P. 1019–1031.
9. *Шишкин Г.И.* Аппроксимация решений и производных сингулярно возмущенного эллиптического уравнения конвекции–диффузии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 5. P. 672–689.
10. *Шишкин Г.И., Шишкина Л.П.* Улучшенные аппроксимации решения и производных сингулярно возмущенного уравнения реакции-диффузии на основе метода декомпозиции решения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 6. P. 1091–1120.
11. *Ó Riordan E.* Singular perturbation finite element methods // Numer. Math. 1984. V. 44. P. 425–434.

12. Ó Riordan E., Stynes M. A uniformly accurate finite-element method for a singularly perturbed one-dimensional reaction-diffusion problem // *Math. Comput.* 1986. V. 47. № 176. P. 555–570.
13. Kellogg R.B., Tsan A. Analysis of Some Difference Approximations for a Singular Perturbation Problem Without Turning Points // *Math. Comput.* 1978. V. 32. № 144. P. 1025–1039.
14. Miller J.J.H., Ó Riordan E., Shishkin G.I. Solution of Singularly Perturbed Problems with ε -uniform Numerical Methods. Introduction to the Theory of Linear Problems in One and Two Dimensions, World Scientific, Singapore, 1996.
15. Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L. Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations: convection-diffusion-reaction and flow problems. Springer Series in Computational Mathematics, 2008.
16. Kadalbajoo M.K., Patidar K.C. Singularly perturbed problems in partial differential equations: a survey // *Appl. Math. Comput.* 2003. V. 134. P. 371–429.
17. Linß T. Layer-adapted meshes for reaction-convection-diffusion problems. In: *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1985. Berlin: Springer, 2010.
18. Ильин А.М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // *Матем. заметки.* 1969. Т. 6. № 2. P. 237–248.
19. Андреев В.Б. Равномерная сеточная аппроксимация негладких решений смешанной краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения реакции-диффузии в прямоугольнике // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2008. Т. 48. № 1. P. 90–114.
20. Schatz A.H., Wahlbin L.B. On the finite element method for singularly perturbed reaction-diffusion problems in two and one dimensions // *Math. Comp.* 1983. V. 40. P. 47–89.
21. Verfürth R. A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques, Stuttgart: Wiley-Teubner, 1996.
22. Kopteva N. Maximum norm a posteriori error estimates for a one-dimensional convection-diffusion problem // *SIAM J. Numer. Anal.* 2002. V. 39. № 2. P. 423–441.
23. Kopteva N. Maximum norm a posteriori error estimate for a 2D singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem // *SIAM J. Numer. Anal.* 2008. V. 46. № 3. P. 1602–1618.
24. Linß T., Radojević G., Zarin H. Approximation of singularly perturbed reaction-diffusion problems by quadratic C^1 -splines // *Numer. Algor.* 2012. V. 61. P. 35–55.
25. Repin S. A posteriori error estimation for variational problems with uniformly convex functionals // *Math. Comp.* 2000. V. 69. P. 481–500.
26. Repin S. Two-sided estimates of deviation from exact solutions of uniformly elliptic equations // *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2.* 2003. V. 209. P. 143–171.
27. Repin S. A posteriori estimates for partial differential equations, Berlin: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2008.
28. Repin S., Sauter S. Accuracy of mathematical models. Dimension reduction, simplification, and homogenization // *EMS Tracts in Math.* 2020. V. 33.
29. Пенун С.И. Тождество для отклонений от точного решения задачи $A^* \Delta u + \ell = 0$ и его следствия // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2021. Т. 61. № 12. С. 22–45.
30. Repin S. Error identities for parabolic initial boundary value problems // *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI).* 2021. V. 508. P. 147–172.
31. Gilbarg D., Trudinger N.S. Elliptic partial differential equations of second order. Berlin: Springer-Verlag, 1977.
32. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. Linear and Quasilinear Elliptic equations. New York: Acad. Press, 1968.
33. Morton K.W. Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems. New York: Taylor&Francis, 1996.
34. Prager W., Synge J.L. Approximation in elasticity based on the concept of function space // *Quart. Appl. Math.* 1947. V. 5. P. 241–269.
35. Brezzi F., Fortin M. Mixed and Hybrid Finite Element Methods. 15. New York: Springer Series in Computational Mathematics, 1991.
36. Roberts J.E., Thomas J.-M. Mixed and hybrid methods. In: *Handbook of Numerical Analysis. Vol. II.* Amsterdam: North-Holland, 1991. P. 523–639.
37. Kuznetsov Yu., Repin S. New mixed finite element method on polygonal and polyhedral meshes // *Russian J. Numer. Anal. Math. Model.* 2003. V. 18. № 3. P. 261–278.
38. Payne L.E., Weinberger H.F. An optimal Poincaré inequality for convex domains // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1960. V. 5. P. 286–292.