ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 11, с. 1851–1860

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 519.956.4

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА БЮРГЕРСА С МОДУЛЬНОЙ АДВЕКЦИЕЙ И ЛИНЕЙНЫМ УСИЛЕНИЕМ[1)]

В. Т. Волков[1,*], Н. Н. Нефедов[1,]**

[1] *119991 Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, Россия*

**e-mail: volkovvt@mail.ru*

***e-mail: nefedov@phys.msu.ru*

Поступила в редакцию 15.10.2021 г.
Переработанный вариант 04.04.2022 г.
Принята к публикации 08.06.2022 г.

Рассмотрена сингулярно возмущенная периодическая задача для параболического уравнения реакция–диффузия–адвекция типа Бюргерса с модульной адвекцией и линейным усилением. Получены условия существования, единственности и асимптотической устойчивости по Ляпунову периодического решения с внутренним переходным слоем и построено его асимптотическое приближение. Асимптотический анализ применен при решении задачи граничного управления для достижения требуемого закона движения фронта. Сформулировано понятие асимптотического решения этой задачи, получены достаточные условия существования и единственности решения, построено асимптотическое приближение ее решения. Библ. 22.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные параболические уравнения, периодические задачи, уравнения реакция–диффузия, контрастные структуры, внутренние слои, фронты, асимптотические методы, дифференциальные неравенства, асимптотическая устойчивость по Ляпунову, уравнения Бюргерса с модульной адвекцией, коэффициентная обратная задача, асимптотическое решение обратной задачи.

DOI: 10.31857/S0044466922110138

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе асимптотический анализ применен при решении задачи граничного управления для сингулярно возмущенного уравнения типа Бюргерса (уравнения реакция–диффузия–адвекция) с модульной адвекцией и линейным источником (линейным усилением). Рассмотрен случай решения с внутренним переходным слоем и построено асимптотическое приближение такого решения. Доказано существование решения с построенной асимптотикой и его асимптотическая устойчивость по Ляпунову. Под задачей граничного управления понимается задача определения граничных условий, при которых достигается заданный режим движения фронта. Отметим, что сформулированная задача, несмотря на определенную аналогичность, отличается от обратной задачи определения параметров модели по наблюдению за движущимся слоем, так как в этом случае наблюдаемый режим входит в число реализуемых (достижимых) в рамках условий прямой задачи, определяющих модель. В рассматриваемой задаче это требует исследования, что определяет новизну развиваемого подхода.

Подобные задачи возникают в газовой динамике, в нелинейной теории волн, биофизике, химической кинетике и многих других практических приложениях и описываются нелинейными параболическими уравнениями с малыми параметрами при производных (см., например, [1] и ссылки в этой работе). К этому классу задач относятся уравнения Бюргерса (см. [2], [3]) и уравнения типа Бюргерса (см. [4]–[8]), которые интенсивно изучаются в связи с тем, что они выступают в качестве математических моделей, выявляющих основные механизмы, определяющие поведение и более сложных моделей нелинейной теории волн. Особенностью задач указанного типа является то, что их решения могут содержать узкие пограничные и/или внутренние слои –

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 18-11-00042).

стационарные и/или движущиеся фронты. Поэтому как прямые, так и соответствующие обратные задачи чрезвычайно сложны для численного решения, что требует развития специальных методов исследования (см., например, обзор [9], где изложены базовые идеи, развиваемые в этих классах задач, и более позднюю работу [10]). Асимптотический анализ сингулярно возмущенных периодических краевых задач типа реакция–диффузия–адвекция может быть найден, например, в [11]–[19]. Настоящая работа посвящена исследованию нового класса обратных коэффициентных задач для таких уравнений. Обратные коэффициентные задачи широко исследуются в связи со многими приложениями (см., например, [20]–[22] и ссылки в этих работах). Но заметим, что развиваемые подходы не являются эффективными для сингулярно возмущенных уравнений. Поэтому применение асимптотического анализа, помимо повышения устойчивости стандартных методов решения обратных задач, позволяет получить совершенно новый подход к решению таких задач. Важной особенностью асимптотического подхода к исследованию нелинейных дифференциальных уравнений с малыми параметрами является то, что асимптотический анализ позволяет свести исходную нелинейную сингулярно возмущенную задачу к набору более простых задач, дающих возможность установить более простые связи между входными данными и искомыми параметрами обратной задачи, некорректность которых существенно ниже исходной задачи или вовсе отсутствует. Эти идеи были применены в [13]–]15].

В настоящей работе получила дальнейшее развитие концепция асимптотического решения обратных задач, предложенная авторами в [16], [17], и состоящая в том, что асимптотический анализ позволяет свести исходную коэффициентную задачу к более простой некорректно поставленной, а в ряде случаев – к корректно поставленной задаче. При этом отметим, что в указанных работах решалась обратная задача, а уравнение, описывающее главный член в асимптотике движения слоя, было конечным (алгебраическим).

Структура работы такова. В разд. 2 и 3 приведена постановка прямой задачи, сформулирована теорема существования решения, в рамках условий которой получено асимптотическое приближение решения прямой задачи и решается обратная задача граничного управления. В разд. 4 приводится и обсуждается асимптотическое решение задачи граничного управления.

2. ПОСТАНОВКА ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу для нелинейного сингулярно возмущенного уравнения типа реакция–диффузия–адвекция, называемого в приложениях уравнением типа Бюргерса и применяемого, например, в нелинейной теории волн для описания нелинейных волн в среде без дисперсии с линейным усилением (см. [5]–[8]). А именно,

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial|u|}{\partial x}-K\cdot u=0,\quad (x,t)\in D:=\{x\in(-1,1);\,t\in\mathbb{R}\},\\ u(-1,t;\varepsilon)=u^{(-)}(t),\quad u(1,t;\varepsilon)=u^{(+)}(t),\quad t\in\mathbb{R},\\ u(x,0;\varepsilon)=u(x,t+T;\varepsilon),\quad x\in[-1,1],\quad t\in\mathbb{R},\end{gathered}\tag{1}$$

где ε – малый параметр ($0<\varepsilon\ll 1$), а функции $u^{(-)}(t)$ и $u^{(+)}(t)$ – достаточно гладкие и T-периодические по переменной t, $K>0$ – постоянная.

Для этой задачи (*прямая задача*) будет сформулирована теорема существования решения, в рамках которой будет поставлена обратная задача граничного управления и получено ее асимптотическое решение.

Рассматриваемая нами прямая задача (1) является частным случаем изученной в [10]:

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial|u|}{\partial x}-B(u,x,t)=0,\quad (x,t)\in D:=\{x\in(-1,1);\,t\in\mathbb{R}\},\\ u(-1,t;\varepsilon)=u^{(-)}(t),\quad u(1,t;\varepsilon)=u^{(+)}(t),\quad t\in\mathbb{R},\\ u(x,0;\varepsilon)=u(x,t+T;\varepsilon),\quad x\in[-1,1],\quad t\in\mathbb{R},\end{gathered}\tag{2}$$

где $0<\varepsilon\ll 1$ – малый параметр, а функции $B(u,x,t)$, $u^{(-)}(t)$ и $u^{(+)}(t)$ – достаточно гладкие и T-периодические по переменной t.

Введем определения: $D_T:=(t,x)\in(\mathbb{R}\times(-1;1))$, $D_T^{(-)}:=(t,x)\in(\mathbb{R}\times(-1;x_{\text{tr}}))$, $D_T^{(+)}:=(t,x)\in(\mathbb{R}\times\times(x_{\text{tr}};1))$, где $x_{\text{tr}}=x_{\text{tr}}(t;\varepsilon)$ – T-периодическая функция, причем $-1<x_{\text{tr}}(t;\varepsilon)<1$ при всех $t\in\mathbb{R}$.

Решением задачи (2) назовем T-периодическую функцию $u(x,t;\varepsilon)\in C(\bar{D}_T)\cap C^1(D_T)\cap$ $\cap\, C^{1,2}(D_T^{(-)}\cup D_T^{(+)})$, удовлетворяющую уравнению (2) в каждой из подобластей $D_T^{(-)}$ и $D_T^{(+)}$, а также граничным условиям.

В [10], [19] при определенных условиях на входящие в задачу функции было доказано существование периодического решения, его асимптотическая устойчивость по Ляпунову, а также получено асимптотическое приближение решения по параметру ε. В этих работах получены условия, при которых задача (2) имеет T-периодическое по переменной t решение вида движущегося фронта: на интервале $(-1,1)$ существует точка $x_{\mathrm{tr}}(t;\varepsilon)$, движущаяся по периодическому во времени закону, в окрестности которой наблюдается узкий внутренний переходный слой, т.е. слева от указанной точки (при $-1<x<x_{\mathrm{tr}}(t;\varepsilon)$) решение близко к некоторому уровню $\varphi^{(-)}(x,t)$, а справа (при $x_{\mathrm{tr}}(t;\varepsilon)<x<1$) – к $\varphi^{(+)}(x,t)$. Указанные функции $\varphi^{(-)}(x,t)$ и $\varphi^{(+)}(x,t)$ являются решениями вырожденного уравнения и определены ниже в условии 2.

Положение точки перехода $x_{\mathrm{tr}}(t;\varepsilon)$ заранее неизвестно и определяется (при фиксированном t) условием пересечения решения $u(x,t;\varepsilon)$ и некоторого уровня между $\varphi^{(-)}(x,t)$ и $\varphi^{(+)}(x,t)$ (в рассматриваемой задаче – нулевого уровня). Таким образом, положение точки перехода $x_{\mathrm{tr}}(t;\varepsilon)$ определим условием $u(x_{\mathrm{tr}}(t;\varepsilon),t;\varepsilon)=0$.

Обратная задача для (1) (*задача граничного управления*), рассмотренная в данной работе, заключается в нахождении одного из граничных условий (для определенности – правого $u^{(+)}(t)$), при котором фронт будет двигаться по заданному временному закону. Второе граничное условие $u^{(-)}(t)$ при этом считается известным.

Асимптотическим решением задачи граничного управления мы называем такое решение задачи определения граничного условия, при котором скорость или положение фронта получается как асимптотическое приближение по малому параметру к заданному. Показано, что для рассматриваемого класса уравнений задача граничного управления сводится к решению алгебраических уравнений, связывающих наблюдаемое положение и скорость движущегося фронта с коэффициентами в уравнении и граничными условиями. Аналогично может быть рассмотрена задача определения граничного условия по наблюдению траектории движения фронта при условии, что погрешность в измерении как положения, так и скорости движения фронта мала.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Приведем основной результат работ [10], [19] для задачи (2), который будет применен при формулировке условий теоремы существования решения прямой задачи (1), а также использован для решения задачи граничного управления для (1).

3.1. Условия и теорема существования решения задачи (2)

Если положить $\varepsilon=0$ в уравнении (2), получим вырожденное уравнение

$$\frac{\partial|u|}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial t}=B(u,x,t). \tag{3}$$

Уравнение (3) – обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Оно рассматривается с одним из дополнительных условий из задачи (2):

$$u(-1,t)=u^{(-)}(t),\quad t\in\mathbb{R}, \tag{4}$$

$$u(1,t)=u^{(+)}(t),\quad t\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Относительно этих задач предполагаются следующие условия.

Условие 1. Функции $B(u,x,t)$, $u^{(-)}(t)$ и $u^{(+)}(t)$ – достаточно гладкие и T-периодические по переменной при t, причем

$$u^{(-)}(t)<0,\quad u^{(+)}(t)>0\quad \text{при}\quad t\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Условие 2. Задачи (3), (4) и (3), (5) имеют решения $u = \varphi^{-}(x,t)$ и $u = \varphi^{(+)}(x,t)$, определенные при $x \in [-1,1]$, $t \in \mathbb{R}$, T-периодические по переменной t и удовлетворяющие неравенствам

$$\varphi^{(-)}(x,t) < 0 < \varphi^{(+)}(x,t) \quad \text{для всех} \quad x \in [-1,1], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что $\varphi^{(+)}(x,t) - \varphi^{(-)}(x,t) > 0$ при всех $x \in [-1,1]$, $t \in \mathbb{R}$, и введем функцию

$$G(x,t) := \frac{\varphi^{(+)}(x,t) + \varphi^{(-)}(x,t)}{\varphi^{(+)}(x,t) - \varphi^{(-)}(x,t)}. \tag{7}$$

Условие 3. Пусть задача

$$\frac{dx}{dt} = -G(x,t), \quad x(t) = x(t+T) \tag{8}$$

имеет T-периодическое решение $x = x_0(t)$, причем

$$-1 < x_0(t) < 1 \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Замечание 1. Из теоремы сравнения для периодической задачи (8) (см., например, [18]) следует, что простым достаточным условием выполнения условия 3 является следующее:

$$G(-1,t) < 0 < G(1,t).$$

Замечание 2. В силу условий 2 и 3 для всех $t \in \mathbb{R}$ имеет место важная для дальнейшего оценка

$$\left|\frac{dx_0}{dt}\right| < 1. \tag{9}$$

Условие 4. Функция $x_0(t)$ такова, что

$$\left.\int_0^T G_x(x,t)dt\right|_{x=x_0(t)} > 0 \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Условие 4 обеспечивает локальную единственность и устойчивость решения $x_0(t)$ задачи (8).

Основным результатом работ [10], [19] является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1–4. *Тогда для достаточно малых* ε *существует асимптотически устойчивое по Ляпунову решение* $u(x,t;\varepsilon)$ *задачи* (2) *такое, что для любого сколь угодно малого, но фиксированного* ν *имеют место предельные соотношения*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,t;\varepsilon) = \begin{cases} \varphi^{(-)}(x,t), & x \in [-1, x_0(t) - \nu], \quad t \in \mathbb{R}, \\ \varphi^{(+)}(x,t), & x \in [x_0(t) + \nu, 1], \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Более того, $x_{\mathrm{tr}}(t;\varepsilon) - x_0(t) = O(\varepsilon)$, $t \in \mathbb{R}$, $u(x,t,\varepsilon) - \varphi^{(-)}(x,t) = O(\varepsilon)$ *для* $x \in [-1, x_0(t) - \nu]$, $t \in \mathbb{R}$, *и* $u(x,t,\varepsilon) - \varphi^{(+)}(x,t) = O(\varepsilon)$ *для* $x \in [x_0(t) + \nu, 1]$, $t \in \mathbb{R}$.

Замечание 3. В [10], [19] получено более подробное описание структуры переходного слоя и более точное асимптотическое приближение решения.

3.2. Теорема существования решения задачи (1)

Вырожденное уравнение в задаче (1)

$$\frac{\partial |u|}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = K \cdot u.$$

Функции $\varphi^{(-)}(x,t)$ и $\varphi^{(+)}(x,t)$ определяются как решения задач Коши

$$\begin{aligned} \varphi^{(-)}(x,t)&: \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = -K \cdot u, \quad u(-1,t) = u^{(-)}(t), \\ \varphi^{(+)}(x,t)&: \quad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = K \cdot u, \quad u(1,t) = u^{(+)}(t). \end{aligned} \tag{10}$$

Они находятся в явном виде и являются T-периодическими по t при каждом фиксированном $-1 < x < 1$:

$$\varphi^{(-)}(x,t) = u^{(-)}(t-(1+x))e^{-K(1+x)}, \quad \varphi^{(+)}(x,t) = u^{(+)}(t-(1-x))e^{-K(1-x)}. \tag{11}$$

Заметим, что так как $u^{(-)}(t) < 0$ и $u^{(+)}(t) > 0$ при $t \in \mathbb{R}$ (условие 1), то условие 2 также выполнено и

$$\varphi^{(-)}(x,t) < 0, \quad \varphi^{(+)}(x,t) > 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \bar{D} := \{x \in [-1,1],\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Для выполнения условий теоремы 1 в рассматриваемом случае функция

$$G(x,t) = \frac{u^{(+)}(t-1+x)e^{Kx} + u^{(-)}(t-1-x)e^{-Kx}}{u^{(+)}(t-1+x)e^{Kx} - u^{(-)}(t-1-x)e^{-Kx}},$$

введенная в уравнении (8), должна удовлетворять условиям 3 и 4, которые необходимо проверять в конкретных задачах. В частности, ниже в п. 3.3 показано, что при достаточно больших значениях коэффициента усиления $K > 0$ выполнение условий 3 и 4 гарантировано.

Имеет место теорема существования решения прямой задачи (1), являющаяся следствием теоремы 1 при перечисленных выше условиях.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 3 *и* 4. *Тогда для достаточно малых* ε *существует асимптотически устойчивое по Ляпунову решение* $u(x,t;\varepsilon)$ *задачи* (1) *такое, что для любого сколь угодно малого, но фиксированного* ν *выполнены предельные соотношения*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(x,t;\varepsilon) = \begin{cases} \varphi^{(-)}(x,t), & x \in [-1, x_0(t) - \nu], \quad t \in \mathbb{R}, \\ \varphi^{(+)}(x,t), & x \in [x_0(t) + \nu, 1], \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Более того, при всех $t \in \mathbb{R}$ *имеют место оценки* $x_{\text{tr}}(t;\varepsilon) - x_0(t) = O(\varepsilon)$, *а также* $u(x,t;\varepsilon) - \varphi^{(-)}(x,t) = O(\varepsilon)$ *для* $x \in [-1, x_0(t) - \nu]$ *и* $u(x,t;\varepsilon) - \varphi^{(+)}(x,t) = O(\varepsilon)$ *для* $x \in [x_0(t) + \nu, 1]$.

Сделаем важное для формулировки основного результата обратной задачи замечание.

Замечание 4. Из доказательства теорем 1 и 2 также следует непрерывная зависимость решения задачи (1) от малых возмущений граничных условий, т.е. если в задаче (1) заменить, например, $u^{(+)}(t)$ на функцию $\tilde{u}^{(+)}(t;\varepsilon)$, зависящую гладким образом от малого параметра ε, причем $\tilde{u}^{(+)}(t;\varepsilon) - u^{(+)}(t) = O(\varepsilon)$, то имеет место следующий результат (аналог теоремы 2): $x_{\text{tr}}(t;\varepsilon) - x_0(t) = O(\varepsilon)$, а также $u(x,t;\varepsilon) - \varphi^{(-)}(x,t) = O(\varepsilon)$ для $x \in [0, x_0(t) - \nu]$ и $u(x,t;\varepsilon) - \varphi^{(+)}(x,t) = O(\varepsilon)$ для $x \in [x_0(t) + \nu, 1]$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

3.3. Существование решения задачи (1) при больших K

В случае больших коэффициентов усиления $K > 0$ условие 3 выполнено, так как

$$G(1,t) = \frac{u^{(+)}(t) + u^{(-)}(t-2)e^{-2K}}{u^{(+)}(t) - u^{(-)}(t-2)e^{-2K}}$$

и

$$G(-1,t) = \frac{u^{(+)}(t-2)e^{-2K} + u^{(-)}(t)}{u^{(+)}(t-2)e^{-2K} - u^{(-)}(t)}$$

и, следовательно, при достаточно больших $K > 0$

$$G(1,t) > 0, \quad G(-1,t) < 0.$$

Поэтому в случае достаточно больших значений коэффициента усиления $K > 0$ условия существования решения задачи (8) (см. замечание 1), удовлетворяющего неравенствам $-1 < x_0(t) < 1$, выполняются. В других случаях условие 3 требует проверки, и задачу (8) необходимо решать для конкретных входных данных.

Для проверки условия 4 найдем производную

$$G_x(x,t) = -2\left[\frac{2K\cdot u^{(+)}(t-1+x)u^{(-)}(t-1-x)}{(u^{(+)}(t-1+x)e^{Kx} - u^{(-)}(t-1-x)e^{-Kx})^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{u'^{(+)}(t-1+x)u^{(-)}(t-1-x) + u^{(+)}(t-1+x)u'^{(-)}(t-1-x)}{(u^{(+)}(t-1+x)e^{Kx} - u^{(-)}(t-1-x)e^{-Kx})^2}\right].$$

Видим, что первое слагаемое в числителе дроби в квадратных скобках отрицательно, так как $K > 0$, а функции $u^{(+)}$ и $u^{(-)}$ имеют разные знаки; второе слагаемое ограничено ввиду гладкости функций $u^{(+)}$ и $u^{(-)}$. Следовательно, при достаточно больших $K > 0$ функция $G(x,t)$ монотонна по переменной x, причем $G_x(x,t) > 0$ при всех $(x,t) \in ((-1;1)\times\mathbb{R})$, и условие 4 выполняется. Таким образом, достаточно большое значение коэффициента K обеспечивает выполнение условий 3 и 4 и гарантирует однозначную разрешимость прямой задачи (1).

С учетом формул (11) и (7) задача (8)

$$-\frac{dx}{dt}(\varphi^{(+)}(x,t) - \varphi^{(-)}(x,t)) = \varphi^{(+)}(x,t) + \varphi^{(-)}(x,t), \quad x(t) = x(t+T),$$

определяющая главный член асимптотики положения фронта $x_0(t)$, преобразуется к виду

$$\begin{gathered} -\frac{dx}{dt}(u^{(+)}(t-1+x)e^{Kx} - u^{(-)}(t-1-x)e^{-Kx}) = \\ = u^{(+)}(t-1+x)e^{Kx} + u^{(-)}(t-1-x)e^{-Kx}, \quad x(t) = x(t+T). \end{gathered} \tag{12}$$

Следовательно, функция $x_0(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\begin{gathered} -\frac{dx_0}{dt}(u^{(+)}(t-1+x_0(t))e^{Kx_0(t)} - u^{(-)}(t-1-x_0(t))e^{-Kx_0(t)}) = \\ = u^{(+)}(t-1+x_0(t))e^{Kx_0(t)} + u^{(-)}(t-1-x_0(t))e^{-Kx_0(t)}. \end{gathered} \tag{13}$$

4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Пусть задан желаемый закон движения фронта, т.е. задана функция $f(t) = x_{\mathrm{tr}}(t;\varepsilon)$ на интервале времени, равном периоду T. Задача граничного управления заключается в нахождении одного из граничных условий (для определенности – правого $u^{(+)}(t)$), при котором фронт будет двигаться по заданному временному закону. Второе граничное условие $u^{(-)}(t)$ при этом считается известным, и мы предполагаем, что выполнены условия существования решения задачи (1).

Постановку обратной задачи можно записать в операторном виде

$$A(u^{(+)}) = f. \tag{14}$$

В данной работе точный оператор A задачи (14) мы заменяем на приближенный оператор A_0, определяемый соотношением (13). Из теоремы 2 следует, что $\|A - A_0\|_C = O(\varepsilon)$. В результате решается задача

$$A_0(u^{(+)}) = f, \tag{15}$$

решение которой $u^{(+)}(t) = h_0(t)$ и есть асимптотическое решение задачи граничного управления, так как подстановка его в (14) обеспечивает желаемый закон движения фронта $f(t) = x_{\mathrm{tr}}(t;\varepsilon)$ с заданной точностью $O(\varepsilon)$.

Из (13) получим

$$u^{(+)}(t-1+x_0(t)) = u^{(-)}(t-1-x_0(t))e^{-2Kx_0(t)}\frac{x_0'(t)-1}{x_0'(t)+1}.$$

Обозначим $t-1+x_0(t)=\tau$. Тогда из уравнения $\tau=t-1+x_0(t)\equiv g(t)$ найдем $t=g^{(-1)}(\tau)$. Разрешимость этого уравнения относительно t обеспечивается тем, что $|x_0'(t)|<1$ (см. (9)), следовательно, $g'(t)=1+x_0'(t)\neq 0$ при всех $t\in\mathbb{R}$.

Тогда

$$u^{(+)}(\tau)=\left[u^{(-)}(\tau-2x_0(t))e^{-2Kx_0(t)}\frac{x_0'(t)-1}{x_0'(t)+1}\right]\Bigg|_{t=g^{(-1)}(\tau)}. \tag{16}$$

Видим, что $u^{(+)}(\tau)>0$ при всех $\tau\in\mathbb{R}$, так как $u^{(-)}(t)<0$ и $|x_0'(t)|<1$ при всех $t\in\mathbb{R}$.

Покажем, что функция $u^{(+)}(\tau)$ является T-периодической по τ, если $x_0(t)$ и $u^{(-)}(t)$ – T-периодические по t. Действительно, в силу T-периодичности $x_0(t)$, определений τ и функции $g(t)$ справедливо равенство $\tau+T=g(t+T)$. Таким образом, $g^{-1}(\tau+T)=t+T=g^{-1}(\tau)+T$. Это с учетом T-периодичности функции $u^{(-)}(t)$ обеспечивает T-периодичность $u^{(+)}(t)$.

Заметим, что мы строим *асимптотическое решение* задачи граничного управления, т.е. искомое граничное условие (в нашем случае – на правой границе) должно быть определено так, чтобы требуемый режим движения фронта был бы реализован с заданной точностью.

Одним из результатов асимптотического анализа, проведенного в [10], являются равномерные по $t\in\mathbb{R}$ оценки

$$|x_{\rm tr}(t;\varepsilon)-x_0(t)|=O(\varepsilon),\qquad \left|\frac{dx_{\rm tr}(t;\varepsilon)}{dt}-\frac{dx_0(t)}{dt}\right|=O(\varepsilon). \tag{17}$$

Если желаемый закон движения фронта задан, т.е. определена достаточно гладкая функция $f(t)=x_{\rm tr}(t;\varepsilon)$, удовлетворяющая условию $|f'(t)|<1$, то заменив в (16) главный член асимптотики положения фронта $x_0(t)$ на заданную функцию $f(t)$ и учитывая, что $f(t)=x_{\rm tr}(t;\varepsilon)=x_0(t)+O(\varepsilon)$, получим

$$u^{(+)}(\tau)=\left[u^{(-)}(\tau-2f(t))e^{-2Kf(t)}\frac{f'(t)-1}{f'(t)+1}\right]\Bigg|_{t=g^{(-1)}(\tau)}=h_0(\tau)+O(\varepsilon). \tag{18}$$

Здесь введено обозначение

$$\left[u^{(-)}(\tau-2x_0(t))e^{-2Kx_0(t)}\frac{x_0'(t)-1}{x_0'(t)+1}\right]\Bigg|_{t=g^{(-1)}(\tau)}\equiv h_0(\tau).$$

Формула (18) дает асимптотическое решение задачи граничного управления с точностью $O(\varepsilon)$.

Таким образом, обратная задача граничного управления для уравнения Бюргерса с модульной адвекцией и линейным усилением сводится к линейному алгебраическому уравнению (13), связывающему наблюдаемые параметры движущегося фронта с коэффициентами в уравнении и граничными условиями. Решение (16) этого уравнения относительно функции $u^{(+)}(t)$ в силу замечания 4 является асимптотическим решением задачи граничного управления для (1) с точностью $O(\varepsilon)$, т.е. обеспечивает реализацию заданного режима движения фронта (скорость и положение) с точностью $O(\varepsilon)$. Отметим также, что заданный режим движения, для которого не выполняется условие $|f'(t)|<1$, не является реализуемым, так как не выполнены условия прямой задачи. Это легко иллюстрируется на примере: если $f'(t)>1$, то $u^{(+)}(\tau)<0$, что противоречит условию постановки прямой задачи.

Проведенные выше исследования позволяют сформулировать следующий результат.

Теорема 3. *Пусть задан требуемый закон движения внутреннего слоя* $x_{\rm tr}(t;\varepsilon)=f(t)$, *где* $f(t)$ – *достаточно гладкая* T*-периодическая функция, удовлетворяющая условию* $|f'(t)|<1$. *Тогда при достаточно большом коэффициенте усиления* $K>0$ *и достаточно малых* ε *существует асимптотическое решение задачи граничного управления для уравнения* (1) *, задаваемое формулой* (18).

В данной задаче можно получить более точное асимптотическое приближение по параметру граничного управления. Проиллюстрируем это на примере построения граничной функции, обеспечивающей заданный режим движения фронта (скорость и положение) с точностью $O(\varepsilon^2)$. Для этого будем строить граничное управление в виде

$$u^{(+)}(t) = h_0(t) + \varepsilon h_1(t),$$

и запишем исходную задачу (1)

$$\begin{gathered}
\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial |u|}{\partial x} - K \cdot u = 0, \quad (x,t) \in D := \{x \in (-1,1);\, t \in \mathbb{R}\}, \\
u(-1,t;\varepsilon) = u^{(-)}(t), \quad u(1,t;\varepsilon) = u^{(+)}(t) = h_0(t) + \varepsilon h_1(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\
u(x,0;\varepsilon) = u(x,t+T;\varepsilon), \quad x \in [-1,1], \quad t \in \mathbb{R}.
\end{gathered} \tag{19}$$

Для построения асимптотического приближения граничного управления воспользуемся алгоритмом, предложенным в [10].

Главный член асимптотического приближения граничного управления – функция $h_0(t)$ – определен выше и обеспечивает реализацию требуемого режима движения фронта с точностью $O(\varepsilon)$. Функцию $h_1(t)$ будем подбирать так, чтобы граничное управление $u^{(+)}(t) = h_0(t) + \varepsilon h_1(t)$ обеспечивало реализацию требуемого режима движения фронта с точностью $O(\varepsilon^2)$.

Регулярные члены первого приближения по ε – функции $U_1^{(-)}(x,t)$ и $U_1^{(+)}(x,t)$ – определяются как T-периодические решения задач

$$\begin{aligned}
&U_1^{(-)}(x,t): \quad \frac{\partial U_1^{(-)}}{\partial x} + \frac{\partial U_1^{(-)}}{\partial t} = -K \cdot U_1^{(-)} + F_1^{(-)}(x,t), \quad U_1^{(-)}(-1,t) = 0, \\
&U_1^{(+)}(x,t): \quad \frac{\partial U_1^{(+)}}{\partial x} - \frac{\partial U_1^{(+)}}{\partial t} = K \cdot U_1^{(+)} + F_1^{(+)}(x,t), \quad U_1^{(+)}(1,t) = h_1(t),
\end{aligned} \tag{20}$$

где $F_1^{(\pm)}(x,t) = \partial^2 \varphi^{(\pm)}(x,t)/\partial x^2$ – известные T-периодические функции.

Решения задач (20) находятся в явном виде и являются T-периодическими по t при каждом фиксированном $-1 < x < 1$, а именно,

$$U_1^{(-)}(x,t) = \int_{-1}^{x} e^{-K(x-\xi)} F_1^{(-)}(\xi, \xi - x + t)\, d\xi, \tag{21}$$

$$U_1^{(+)}(x,t) = h_1(t + x - 1) e^{K(x-1)} + \int_{1}^{x} e^{K(x-\xi)} F_1^{(+)}(\xi, x + t - \xi)\, d\xi. \tag{22}$$

Асимптотическое приближение положения фронта (см. [10]) имеет вид

$$x_{\mathrm{tr}}(t;\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + O(\varepsilon^2),$$

где $x_0(t)$ определена в (13), а $x_1(t)$ является решением задачи

$$\frac{dx_1}{dt} + G_x(x_0(t),t) x_1 = \frac{H_1(t)}{\varphi^{(-)}(x_0(t),t) - \varphi^{(+)}(x_0(t),t)}, \quad x_1(t) = x_1(t+T), \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
H_1(t) = {}& \frac{\partial \varphi^{(+)}}{\partial x}(x_0(t),t) - \frac{\partial \varphi^{(-)}}{\partial x}(x_0(t),t) + (1 + x_0'(t)) U_1^{(+)}(x_0(t),t) + \\
& + (1 - x_0'(t)) U_1^{(-)}(x_0(t),t) - \int_0^{+\infty} q_1^{(+)}(\xi,t)\, d\xi - \int_{-\infty}^{0} q_1^{(-)}(\xi,t)\, d\xi.
\end{aligned} \tag{24}$$

Функции $q_1^{(\pm)}(\xi,t)$ известны и выражаются через найденные на предыдущем шаге асимптотической процедуры, а $U_1^{(+)}(x,t)$ определена в (22).

Тогда из (22) получим

$$h_1(t + x_0(t) - 1) = U_1^{(+)}(x_0(t), t)e^{K(1-x_0(t))} - \int_1^{x_0(t)} e^{K(1-\xi)} F_1^{(+)}(\xi, x_0(t) + t - \xi)d\xi, \tag{25}$$

где $U_1^{(+)}(x_0(t), t)$ находится в явном виде из (24) с учетом (23), причем в (23)

$$x_1(t) = \frac{x_{\text{tr}}(t;\varepsilon) - x_0(t)}{\varepsilon}, \quad \frac{dx_1}{dt} = \frac{x'_{\text{tr}}(t;\varepsilon) - x'_0(t)}{\varepsilon}.$$

Введя, как и выше, переменную $\tau = t + x_0(t) - 1 \equiv g(t)$, получим

$$h_1(\tau) = U_1^{(+)}(\tau + 1 - t)e^{K(t-\tau)}\Big|_{t=g^{(-1)}(\tau)} - \int_1^{\tau+1-t} e^{K(1-\xi)} F_1^{(+)}(\xi, \tau + 1 - \xi)d\xi\Big|_{t=g^{(-1)}(\tau)}. \tag{26}$$

Если требуемый закон движения фронта $x_{\text{tr}}(t;\varepsilon) = f(t)$ задан, то, заменяя в (25) главный член асимптотики положения фронта $x_0(t)$ на функцию $f(t)$ и учитывая, что $f(t) = x_{\text{tr}}(t;\varepsilon) = x_0(t) + O(\varepsilon)$, получим приближение граничного управления

$$u^{(+)}(\tau) = h_0(\tau) + \varepsilon h_1(\tau) + O(\varepsilon^2).$$

Аналогичным образом могут быть построены асимптотики граничного управления более высокого порядка.

Очевидно, что изложенные результаты могут быть применены к близкой обратной задаче определения граничного условия на основе наблюдения положения внутреннего переходного слоя в случае, если имеется априорная информация о приближенном значении положения $x_{\text{tr}}(t;\varepsilon)$ и скорости движения внутреннего слоя $x'_{\text{tr}}(t;\varepsilon)$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получил дальнейшее развитие асимптотико-численный подход к решению прямых и обратных задач для уравнений, решения которых содержат пограничные и внутренние слои. Концепция асимптотического решения обратных коэффициентных задач, предложенная авторами, применена к новому классу периодических по времени задач типа реакция–диффузия–адвекция с внутренними переходными слоями. Развиваемый подход продемонстрирован на примере задачи граничного управления для уравнения Бюргерса с модульной адвекцией и линейным усилением. Показано, что для этого класса уравнений асимптотическое решение задачи граничного управления сводится к существенно более простой задаче, связывающей скорость движущегося фронта с коэффициентами в исходном уравнении и граничными условиями. Предлагаемый подход может быть применен к достаточно широкому классу задач с пограничными и внутренними слоями.

Авторы выражают благодарность рецензенту за внимательное прочтение статьи и ряд ценных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nefedov N.* Comparison principle for reaction-diffusion-advection problems with boundary and internal layers // Lect. Not. Comput. Sci. 2013. 8236. P. 62–72.
2. *Burgers J.M.* A mathematical model illustrating the theory of turbulence // Adv. Appl. Mech. 1948. V. 1. P. 171–199.
3. *Cole J.D.* On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics // Quart. Appl. Math. 1951. V. 9. P. 225–236.
4. *Rudenko O.V., Gurbatov S.N., Hedberg C.M.* Nonlinear Acoustics Through Problems and Examples. Victoria, BC, Canada: Trafford, 2011.
5. *Руденко О.В.* Линеаризуемое уравнение для волн в диссипативных средах с модульной, квадратичной и квадратично-кубичной нелинейностями // Докл. АН. 2016. Т. 471. № 1. С. 23–27.
6. *Руденко О.В.* Модульные солитоны // Докл. АН. 2016. Т. 471. 6. С. 451–454.
7. *Нефедов Н.Н., Руденко О.В.* О движении фронта в уравнении типа Бюргерса с квадратичной и модульной нелинейностью при нелинейном усилении // Докл. АН. 2018. Т. 478. № 3. С. 274–279.

8. *Нефедов Н.Н., Руденко О.В.* О движении, усилении и разрушении фронтов в уравнениях типа Бюргерса с квадратичной модульной нелинейностью // Докл. АН. 2020. Т. 493. № 1. С. 26–31.
9. *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Нефедов Н.Н.* Асимптотическая теория контрастных структур (обзор) // Автомат. и телемехан. 1997. № 7. С. 4–32; Autom. Remote Control, 58:7 (1997), P. 1068–1091.
10. *Нефедов Н.Н.* Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакция–диффузия–адвекция: теория и применение // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 12. С. 2074–2094.
11. *Nefedov N., Recke L., Schneider K.* Existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of reaction-advection-diffusion equations // J. Math. Analys. Appl. 2013. V. 405. № 1. P. 90–103.
12. *Nefedov N.* Existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of Burgers type equation with modular advection // Math. Model. Nat. Phenom. 2019. V. 14. № 4. P. 401.
13. *Lukyanenko D.V., Grigorev V.B., Volkov V.T., Shishlenin M.A.* Solving of the coefficient inverse problem for a nonlinear singularly perturbed two-dimensional reaction-diffusion equation with the location of moving front data // Comput. Math. Appl. 2019. V. 77. № 5. P. 1245–1254.
14. *Лукьяненко Д.В., Волков В.Т., Нефедов Н.Н., Ягола А.Г.* Применение асимптотического анализа для решения обратной задачи определения коэффициента линейного усиления в уравнении типа Бюргерса // Вестник МГУ. Сер. 3: Физика. Астрономия. 2019. № 2. С. 38–43.
15. *Lukyanenko D.V., Shishlenin M.A., Volkov V.T.* Asymptotic analysis of solving an inverse boundary value problem for a nonlinear singularly perturbed time-periodic reaction-diffusion-advection equation // J. Inverse Ill-Posed Problem. 2019. V. 27. № 5. P. 745–758.
16. *Волков В.Т., Нефедов Н.Н.* Асимптотическое решение коэффициентных обратных задач для уравнений типа Бюргерса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 6. С. 975–084.
17. *Nefedov N.N., Volkov V.T.* Asymptotic solution of the inverse problem for restoring the modular type source in Burgers' equation with modular advection // J. Inverse and Ill-Posed Problem. 2020. V. 28. № 5. P. 633–639.
18. *Hess P.* Periodic-Parabolic Boundary Value Problems and Positivity. New York: Pitman Res. Not. Math. Ser., 1991. 139 p.
19. *Nefedov N.* The periodic solutions with an interior layer of Burgers type equations with modular advection: Asymptotic approximation and asymptotic solutions of some inverse coefficient problems // Современные проблемы математики и механики. Материалы междунар. конф., посвященной 80-летию академика В.А. Садовничего. V. 2. М.: Макс Пресс, 2019. P. 427–429.
20. *Kabanikhin S.I.* Definitions and examples of inverse and ill-posed problems // J. Inverse and Ill-Posed Problem. 2008. V. 16. № 4. P. 317–357.
21. *Beilina L., Klibanov M.V.* A globally convergent numerical method for a coefficient inverse problem // SIAM J. Sci. Comput. 2008. V. 31. № 1. P. 478–509.
22. *Kabanikhin S.I., Sabelfeld K.K., Novikov N.S., Shishlenin M.A.* Numerical solution of an inverse problem of coefficient recovering for a wave equation by a stochastic projection methods // Monte Carlo Meth. Appl. 2015. V. 21. № 3. P. 189–203.