ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 12, с. 1981–2001

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.634

L^2-ДИССИПАТИВНОСТЬ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЯВНОЙ СХЕМЫ НА РАЗНЕСЕННЫХ СЕТКАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ 1D БАРОТРОПНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ[1)]

© 2022 г. А. А. Злотник[1, 2, *], Т. А. Ломоносов[1, **]

[1] *109028 Москва, Покровский б-р, 11, НИУ Высшая школа экономики, Россия*

[2] *125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Россия*

**e-mail: azlotnik@hse.ru*

***e-mail: tlomonosov@hse.ru*

Поступила в редакцию 23.03.2022 г.
Переработанный вариант 23.03.2022 г.
Принята к публикации 07.07.2022 г.

Изучается явная двухслойная симметричная по пространству схема на разнесенных сетках с квазигидродинамической регуляризацией для 1D баротропных систем уравнений движения газа. Выводятся как необходимые условия, так и близкие к ним достаточные условия L^2-диссипативности решений задачи Коши для ее линеаризации на постоянном решении при произвольном фоновом числе Маха M. Применяется спектральный подход и анализируются матричные неравенства, содержащие символы симметричных матриц конвективных и регуляризующих слагаемых. Рассматриваются случаи с использованием как только искусственной, так и только физической вязкости. Дается сравнение со спектральным условием устойчивости фон Неймана при $M = 0$. Библ. 30. Фиг. 9.

Ключевые слова: диссипативность, линеаризованная разностная схема, разнесенные сетки, регуляризация, 1D баротропные уравнения газовой динамики.

DOI: 10.31857/S0044466922110163

ВВЕДЕНИЕ

Численные методы решения задач газовой динамики относятся к основным в вычислительной математике. Им посвящена обширная литература (см. [1]–[4] и цитированную там литературу). Большой теоретический и прикладной интерес представляют условия устойчивости таких методов, в том числе явных по времени.

Среди этих численных методов существует класс методов, основанных на предварительной регуляризации уравнений газовой динамики. К ним относятся явные методы с симметричной аппроксимацией по пространству, основанные на так называемых квазигазодинамической и квазигидродинамической (КГидД) регуляризациях, которые были успешно использованы для решения широкого круга прикладных задач (см. [5]–[8]). В том числе такие методы применялись для разнообразных задач в баротропной постановке (см., например, [9]–[12]). При этом всегда использовались схемы на неразнесенных сетках, где основные искомые функции определены на одной и той же сетке по пространству. Анализ условий L^2-диссипативности таких схем в линеаризованной баротропной постановке был недавно выполнен в [13]–[16]. Отметим, что в последние годы развито немало других подходов к построению численных методов решения уравнений газовой динамики, основанных на их различных регуляризациях (см. в том числе [17]–[20]).

Схемы на разнесенных сетках также хорошо известны в вычислительной гидродинамике (см. [21]), и спектральный анализ устойчивости, включая условие фон Неймана, для подобных схем был дан в [22]–[24]. Недавно в [25] впервые была построена и успешно апробирована явная схема на разнесенных сетках с КГидД регуляризацией для 3D уравнений Навье–Стокса–Кана–

[1)]Теоретические результаты получены при поддержке Российского научного фонда (проект 19-01-00169). Численные эксперименты выполнены в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2022 г.

Хилларда. Позже в [26] выведен в том числе критерий (необходимое и достаточное условие) L^2-диссипативности такой схемы, линеаризованной на постоянном решении в случае 1D баротропных уравнений Эйлера и Навье–Стокса сжимаемого газа при нулевом фоновом числе Маха $M = 0$. Однако этот результат применим на практике только при малых M.

В настоящей работе изучается L^2-диссипативность линеаризованной на постоянном решении схемы на разнесенных сетках из [25] для указанных 1D систем уравнений, но в существенно более сложном случае любого M. Используется спектральный метод (см., например, [3], [27]), но анализируются не собственные значения несамосопряженной матрицы-символа соответствующего оператора перехода со слоя на слой, а матричные неравенства, содержащие символы симметричных матриц конвективных и регуляризующих слагаемых. Критерий L^2-диссипативности выглядит слишком громоздко, и основное внимание уделяется выводу более простых близких друг к другу необходимых условий и достаточных условий (отличающихся не более чем в 4 и ровно в 2 раза). Возможность получения не только достаточных, но и необходимых условий является важным достоинством спектрального метода. При этом как вывод результатов, так и их формулировки оказываются заметно более сложными, чем в случае схем на неразнесенных сетках (см. [14], [15]). Выполненный анализ дает указание на выбор параметров схемы, позволяющий брать максимальный шаг по времени. Для случая уравнений Навье–Стокса (без использования искусственной вязкости) впервые указаны формулы для выбора шага по времени при $M \neq 0$. Существенно, что разработанная техника анализа достаточно общая и применима и в случае регуляризаций другого типа (в качестве примера см. [28]).

Естественность анализа именно свойства L^2-диссипативности схемы связана с тем, что оно соответствует важному с точки зрения качества КГидД регуляризации свойству, доказанному в линеаризованной дифференциальной постановке [29], и его выполнение обеспечивает не только устойчивость в L^2-норме, но и лучшее качество численного решения. Спектральное условие устойчивости фон Неймана служит для этого свойства лишь необходимым условием и само по себе не гарантирует устойчивости в какой-либо норме. В работе выясняется, что оно заметно грубее критерия L^2-диссипативности уже в случае $M = 0$. К тому же выполненные численные эксперименты в исходной нелинейной постановке показывают, что L^2-диссипативность является более тонким инструментом по сравнению с условием фон Неймана для того, чтобы добиться устранения или существенного уменьшения осцилляций решения.

1. РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ И РАЗНОСТНАЯ СХЕМА НА РАЗНЕСЕННЫХ СЕТКАХ

КГидД 1D баротропная система уравнений движения вязкого сжимаемого газа без учета внешних сил состоит из следующих уравнений баланса массы и импульса:

$$\partial_t\rho + \partial_x j = 0, \qquad \partial_t(\rho u) + \partial_x(ju) + \partial_x p(\rho) = \partial_x\Pi, \tag{1}$$

где $\rho > 0$ и u – искомые плотность и скорость газа, зависящие от (x,t), $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, а $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x = \partial/\partial x$. Также $p(\rho)$ – давление, $p(\rho) \in C^2(0,+\infty)$, $p'(\rho) > 0$.

Регуляризованный поток массы j, регуляризующая скорость $\hat{w}$ и вязкое напряжение Π задаются формулами

$$j = \rho(u - \hat{w}), \quad \hat{w} = \tau\left[u\partial_x u + \frac{1}{\rho}\partial_x p(\rho)\right], \quad \Pi = \mu\partial_x u + \Pi^\tau, \quad \Pi^\tau = \rho u\hat{w}. \tag{2}$$

Здесь $\mu\partial_x u$ и Π^τ – вязкие типа Навье–Стокса и регуляризующее напряжения, $\tau = \tau(\rho,u) > 0$ – параметр регуляризации, $\mu = \mu_{\mathrm{ph}} + \mu_{\mathrm{art}}$, μ_{ph} и $\mu_{\mathrm{art}} = \tau\alpha_s\rho p'(\rho)$ – соответственно коэффициенты полной, физической (суммарной динамической и объемной) и искусственной вязкости, которые могут зависеть от ρ и u. Кроме того, $\alpha_s \geq 0$ – число Шмидта; его можно использовать и как параметр численного метода. Пусть $\nu = \mu/\rho = \nu_{\mathrm{ph}} + \tau\alpha_s p'(\rho)$ и $\nu_{\mathrm{ph}} = \mu_{\mathrm{ph}}/\rho$ – соответствующие коэффициенты кинематической вязкости.

Введем сетку ω_h с узлами $x_k = kh$ и сдвинутую сетку ω_h^* с узлами $x_{k-1/2} = (k-1/2)h$, $k \in \mathbb{Z}$, с шагом $h > 0$, а также сетку $\overline{\omega}^{\Delta t}$ с узлами $t_m = m\Delta t$, $m \ge 0$ и шагом $\Delta t > 0$.

Введем операторы на функциях v, w, y, заданных на сетках ω_h, ω_h^*, $\overline{\omega}^{\Delta t}$ соответственно:

$$sv_{k-1/2} = \frac{v_{k-1}+v_k}{2}, \quad \delta v_{k-1/2} = \frac{v_k - v_{k-1}}{h}, \quad \mathring{\delta} v_k = \frac{v_{k+1}-v_{k-1}}{2h},$$

$$s^*w_k = \frac{w_{k-1/2}+w_{k+1/2}}{2}, \quad \delta^* w_k = \frac{w_{k+1/2}-w_{k-1/2}}{h}, \quad \mathring{\delta}^* w_{k-1/2} = \frac{w_{k+1/2}-w_{k-3/2}}{2h},$$

$$\delta_t y = \frac{y^+ - y}{\Delta t}, \quad y^{+,m} = y^{m+1},$$

где $v_k = v(x_k)$, $w_{k-1/2} = w(x_{k-1/2})$, $y^m = y(t_m)$. Отметим, что $\mathring{\delta} = \delta^* s = s^*\delta$ и $\mathring{\delta}^* = \delta s^* = s\delta^*$.

Введем известную первообразную функцию – энтальпию:

$$P_1(\rho) := \int\limits_{r_0}^{\rho} \frac{p'(r)}{r}\,dr, \quad \rho > 0,$$

где $r_0 > 0$ (см. ее подробное обсуждение в [30]). В [25] была построена явная двухслойная по времени 3D разностная схема с КГидД регуляризацией на разнесенных сетках, принимающая в 1D постановке (1), (2) вид

$$\delta_t\rho + \delta j = 0 \quad \text{на} \quad \omega_h^*, \quad \delta_t[(s^*\rho)u] + \delta^*[(sj)su] + (s^*\rho)\delta^* P_1(\rho) = \delta^*\Pi \quad \text{на} \quad \omega_h, \tag{3}$$

$$j = (s^*\rho)(u - \hat{w}), \quad \hat{w} = \tau[us^*\delta u + \delta^* P_1(\rho)] \quad \text{на} \quad \omega_h, \tag{4}$$

$$\Pi = \mu\delta u + \Pi^\tau, \quad \Pi^\tau = s[u(s^*\rho)\hat{w}] \quad \text{на} \quad \omega_h^*, \tag{5}$$

на $\overline{\omega}^{\Delta t}$. Здесь ρ и u заданы по пространству на разнесенных сетках ω_h^* и ω_h соответственно. Отметим, что нестандартная аппроксимация типа $\partial_x p(\rho) \approx (s^*\rho)\delta^* P_1(\rho)$ была предложена в [30, с. 62] для неразнесенных сеток. В данной схеме пространственная дискретизация неконсервативна по импульсу, зато диссипативна по полной энергии (см. [25]).

2. КРИТЕРИЙ L^2-ДИССИПАТИВНОСТИ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СХЕМЫ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Выписанную схему линеаризуем на постоянном решении $\rho_* = \text{const} > 0$, $u_* = \text{const}$. Для этого запишем ее решение в виде $\rho = \rho_* + \rho_*\tilde{\rho}$, $u = u_* + c_*\tilde{u}$, подставим в уравнения схемы, отбросим слагаемые второго порядка малости по отношению к обезразмеренным возмущениям $\tilde{\rho}$, $\tilde{u}$ и получим линеаризованную схему

$$\delta_t\tilde{\rho} + u_*\mathring{\delta}^*\tilde{\rho} + c_*\delta\tilde{u} - \tau_* c_*^2\delta\delta^*\tilde{\rho} - \tau_* u_* c_*\delta\mathring{\delta}\tilde{u} = 0, \tag{6}$$

$$\delta_t\tilde{u} + c_*\delta^*\tilde{\rho} + u_*\mathring{\delta}\tilde{u} - \tau_* c_*^2 u_*\delta^*\mathring{\delta}^*\tilde{\rho} - \tau_* u_*^2\mathring{\delta}^2\tilde{u} - \nu_*\delta^*\delta\tilde{u} = 0, \tag{7}$$

где $\tau_* = \tau_*(\rho_*, u_*)$, $c_* = \sqrt{p'(\rho_*)}$, $\nu_* = \nu_{\text{ph}*} + \tau_*\alpha_s c_*^2$ и $\nu_{\text{ph}*}$ – фоновые параметр регуляризации, скорость звука и кинематические вязкости. Заметим, что линеаризованная схема не меняется при замене слагаемого $\delta^* P_1(\rho)$ на более стандартное $(s^*\rho)^{-1}\delta^* p(\rho)$ в (3), (4). Ниже тильды над возмущениями $\tilde{\rho}$, $\tilde{u}$ отбросим для упрощения обозначений.

Пусть $H(\omega)$ – гильбертово пространство комплекснозначных функций, определенных и суммируемых в квадрате на сетке ω. Введем также гильбертово пространство пар функций $(\rho, u) \in \mathbf{H} := H(\omega_h^*) \times H(\omega_h)$ с обычными скалярным произведением и нормой

$$((\rho,u),(\tilde{\rho},\tilde{u}))_{\mathbf{H}} = h\sum_{k\in\mathbb{Z}}\rho_k\tilde{\rho}_k^* + h\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_{k-1/2}\tilde{u}_{k-1/2}^*, \quad \|(\rho,u)\|_{\mathbf{H}} = \sqrt{(\rho,\rho)_{h*} + (u,u)_h},$$

где * означает комплексное сопряжение.

Перепишем схему (6), (7) в рекуррентном виде

$$\rho^+ = \rho - \Delta t c_*(M\mathring{\delta}^*\rho + \delta u) + \Delta t\tau_* c_*^2(\delta\delta^*\rho + M\delta\mathring{\delta}u), \tag{8}$$

$$u^+ = u - \Delta t c_*(\delta^*\rho + M\mathring{\delta}u) + \Delta t\tau_* c_*^2(M\delta^*\mathring{\delta}^*\rho + M^2\mathring{\delta}^2 u + \tilde{\nu}_*\delta^*\,\delta u) \tag{9}$$

с безразмерными величинами $M := u_*/c_*$ и $\tilde{\nu}_* := \nu_*/(\tau_* c_*^2) = \nu_{\mathrm{ph}*}/(\tau_* c_*^2) + \alpha_s$; при этом $|M|$ – фоновое число Маха.

Поставим вопрос об условиях выполнения для решения схемы (8), (9) оценки

$$\sup_{m\ge 0}\left\|(\rho^m, u^m)\right\|_{\mathbf{H}} \le \left\|(\rho^0, u^0)\right\|_{\mathbf{H}} \quad \forall(\rho^0, u^0)\in\mathbf{H}. \tag{10}$$

Изучать их достаточно естественно, поскольку соответствующая оценка доказана для решения задачи Коши для линеаризованной системы уравнений (1) (см. [29]). Более того, напомним, что оценка (10) означает, что $\sup_{m\ge 0}\left\|\mathbf{G}^m\right\|_{\mathbf{H}\to\mathbf{H}} \le 1$, где $\mathbf{G} = \mathbf{I} - \Delta t c_*\mathbf{B} + \Delta t\tau_* c_*^2\mathbf{A}$ – оператор перехода со слоя на слой с действующими в $\mathbf{H}$ единичным оператором $\mathbf{I}$ и операторами конвективных и вязких слагаемых $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$ такими, что

$$\mathbf{B}(\rho, u) = (M\mathring{\delta}^*\rho + \delta u,\ \delta^*\rho + M\mathring{\delta}u),\quad \mathbf{A}(\rho, u) = (\delta\delta^*\rho + M\delta\mathring{\delta}u,\ M\delta^*\mathring{\delta}^*\rho + M^2\mathring{\delta}^2 u + \tilde{\nu}_*\delta^*\delta u).$$

Эквивалентно, $\left\|\mathbf{G}\right\|_{\mathbf{H}\to\mathbf{H}} \le 1$. Поэтому, в свою очередь, оценка (10) эквивалентна важному свойству L^2*-диссипативности* схемы

$$\left\|(\rho^m, u^m)\right\|_{\mathbf{H}} \le \left\|(\rho^{m-1}, u^{m-1})\right\|_{\mathbf{H}} \le \ldots \le \left\|(\rho^0, u^0)\right\|_{\mathbf{H}} \quad \forall(\rho^0, u^0)\in\mathbf{H},\quad m\ge 1.$$

Замечание 1. Для более полного анализа устойчивости нетрудно рассмотреть неоднородный вариант схемы (6), (7) с заменой нулей в ее правых частях на заданные функции f_ρ, f_u соответственно. А именно, при $\left\|\mathbf{G}\right\|_{\mathbf{H}\to\mathbf{H}} \le 1$ верна оценка

$$\max_{0\le m\le\bar{m}}\left\|(\rho^m, u^m)\right\|_{\mathbf{H}} \le \left\|(\rho^0, u^0)\right\|_{\mathbf{H}} + \Delta t\sum_{0\le m\le\bar{m}-1}\left\|(f_\rho^m, f_u^m)\right\|_{\mathbf{H}} \quad \forall\bar{m}\ge 1.$$

Пусть Δt и τ_* задаются стандартными формулами (см. [6], [7]):

$$\Delta t = \frac{\beta h}{c_*},\quad \tau_* = \frac{\alpha h}{c_*} \tag{11}$$

с параметрами $\beta > 0$ и $\alpha > 0$. В данном разделе дается необходимое и достаточное условие на β в зависимости от α для выполнения оценки (10) в случае $\mu_{\mathrm{ph}} = 0$.

Для этого в соответствии со спектральным подходом (см., например, [3], [27]) подставим в уравнения (8), (9) частное решение вида

$$\rho_{k-1/2}^m(\xi) = e^{\mathbf{i}(k-1/2)\xi}w_\rho^m(\xi),\quad u_k^m(\xi) = e^{\mathbf{i}k\xi}w_u^m(\xi),\quad k\in\mathbb{Z},\quad m\ge 0,$$

где $\mathbf{i}$ – мнимая единица и $\xi\in[0, 2\pi]$ – параметр. Функция $e^{\mathbf{i}k\xi}$ является собственной для операторов $\mathring{\delta}$ и $-\delta^*\delta$, а $e^{\mathbf{i}(k-1/2)\xi}$ – операторов $\mathring{\delta}^*$ и $-\delta\delta^*$, и они отвечают соответственно одним и тем же собственным значениям $\mathbf{i}h^{-1}\sin\xi = \mathbf{i}2h^{-1}s_\xi c_\xi$ и $4h^{-2}s_\xi^2$, где $s_\xi = \sin(\xi/2)$ и $c_\xi = \cos(\xi/2)$. Кроме того, имеем

$$\delta e^{\mathbf{i}k\xi} = \mathbf{i}\frac{2}{h}s_\xi e^{\mathbf{i}(k-1/2)\xi},\quad \delta^* e^{\mathbf{i}(k-1/2)\xi} = \mathbf{i}\frac{2}{h}s_\xi e^{\mathbf{i}k\xi}.$$

Использовав эти формулы и (11), получим рекуррентные формулы

$$w_\rho^+ = w_\rho - \beta[2\mathbf{i}s_\xi(Mc_\xi w_\rho + w_u) + 4\alpha s_\xi^2(w_\rho + Mc_\xi w_u)],$$

$$w_u^+ = w_u - \beta\{2\mathbf{i}s_\xi(w_\rho + Mc_\xi w_u) + 4\alpha s_\xi^2[Mc_\xi w_\rho + (M^2c_\xi^2 + \tilde{\nu}_*)w_u]\}.$$

Введем вектор-столбец $\mathbf{w} = (w_\rho, w_u)^{\mathrm{T}}$ и перейдем к матричной форме записи

$$\mathbf{w}^+ = \mathbf{w} - \beta\left[2\mathbf{i}s_\xi\begin{pmatrix} Mc_\xi & 1 \\ 1 & Mc_\xi \end{pmatrix} + 4\alpha s_\xi^2\begin{pmatrix} 1 & Mc_\xi \\ Mc_\xi & M^2c_\xi^2 + \alpha_s \end{pmatrix}\right]\mathbf{w}$$

при $\mu_{\mathrm{ph}} = 0$. Ее удобно переписать в компактном виде:

$$\mathbf{w}^+ = G(q)\mathbf{w}$$

с использованием 2×2 матриц

$$G(q) = I - \beta F(q), \quad F(q) = 2\mathbf{i}\sqrt{\sigma}B(q) + 4\alpha\sigma A(q), \tag{12}$$

$$B(q) = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{q} & 1 \\ 1 & \pm\sqrt{q} \end{pmatrix}, \quad A(q) = \begin{pmatrix} 1 & \pm\sqrt{q} \\ \pm\sqrt{q} & q + \alpha_s \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где $G(q)$ – символ оператора $\mathbf{G}$, $B(q)$ и $A(q)$ пропорциональны символам операторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$, I – единичная матрица 2-го порядка, $q = q(\xi) = M^2\cos^2(\xi/2)$, $\sigma = \sin^2(\xi/2)$, причем $\sigma = 1 - q/M^2$ при $M \neq 0$, а $\pm = (\operatorname{sgn} M)\operatorname{sgn}\cos(\xi/2)$.

Теорема 1. *Пусть* $\mu_{\mathrm{ph}} = 0$ *и* $M \neq 0$. *Для* L^2*-диссипативности схемы* (6), (7) *необходимо и достаточно выполнение матричного неравенства*

$$\frac{1}{\beta}A(q) \geq Q(q) := 2\alpha\sigma A^2(q) + \frac{1}{2\alpha}B^2(q) + \mathbf{i}\sqrt{\sigma}[A(q), B(q)] \tag{14}$$

для всех $0 \leq q \leq M^2$, *где* $Q(q)$ *– эрмитова матрица*, $Q(q) \geq 0$ *при* $0 \leq q \leq M^2$, *а* $[A, B] = AB - BA$. *При* $M = 0$ (*т.е.* $u_* = 0$) *результат сохраняет силу с заменой параметра* $0 \leq q \leq M^2$ *на* $0 \leq \sigma \leq 1$.

Доказательство. Согласно [26, лемма 1], свойство диссипативности (10) эквивалентно спектральной оценке

$$\max_{0 \leq q \leq M^2} \lambda_{\max}(G^*(q)G(q)) \leq 1, \tag{15}$$

где $\lambda_{\max}(C)$ – максимальное собственное значение эрмитовой матрицы C.

Подобно [15, теорема 1], эта оценка эквивалентна матричному неравенству $G^*G \leq I$, т.е. неравенству $\beta F^*F \leq F + F^*$, при всех $0 \leq q \leq M^2$. Для $F = F_R + \mathbf{i}F_I$ с эрмитовыми матрицами $F_R = 4\alpha\sigma A(q)$ и $F_I = 2\sqrt{\sigma}B(q)$ оно принимает вид

$$\beta(F_R^2 + F_I^2 + \mathbf{i}[F_R, F_I]) \leq 2F_R \quad \forall 0 \leq q \leq M^2$$

и после сокращения на $8\alpha\sigma$ при $\sigma \neq 0$ (т.е. $q \neq M^2$) переходит в (14) с $Q = (8\alpha\sigma)^{-1}F^*F \geq 0$. По непрерывности (14) выполняется и при $q = M^2$.

В случае $M = 0$ имеем $q = 0$, и за параметр следует взять $0 \leq \sigma \leq 1$.

Укажем для дальнейшего, что верны формулы

$$A^2 = \begin{pmatrix} q + 1 & \pm\sqrt{q}(q + \alpha_s + 1) \\ \pm\sqrt{q}(q + \alpha_s + 1) & q + (q + \alpha_s)^2 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} q + 1 & \pm 2\sqrt{q} \\ \pm 2\sqrt{q} & q + 1 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$\mathbf{i}[A, B] = \mathbf{i}(q + \alpha_s - 1)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

По свойствам спектральной нормы матриц имеем

$$\lambda_{\max}(G^*(q)G(q)) = \max_{\mathbf{w} \in \mathbb{C}^2, \mathbf{w} \neq 0} \frac{\|G(q)\mathbf{w}\|_{\mathbb{C}^2}^2}{\|\mathbf{w}\|_{\mathbb{C}^2}^2} = \|G(q)\|_2^2.$$

Поскольку $|\lambda(G)| \le \|G\|_2$ для собственных значений $\lambda(G)$ любой матрицы G, то *спектральное условие устойчивости фон Неймана*

$$|\lambda(G(q))| \le 1 \quad \forall\lambda(G(q)), \quad 0 \le q \le M^2, \tag{18}$$

следует из спектральной оценки (15) и поэтому служит лишь необходимым условием L^2-диссипативности. При этом оно не гарантирует устойчивость схемы в какой-либо норме. Хотя условия типа (18) широко используются в литературе (см. в том числе для разнесенных сеток [22], [24]), убедимся, что здесь оно оказывается слишком грубым в сравнении с (15) даже в относительно простом частном случае $M = 0$.

Теорема 2. *Пусть* $\mu_{\mathrm{ph}} = 0$ *и* $M = 0$. *Спектральное условие устойчивости фон Неймана* (18) *для схемы* (6), (7) *выполнено, если и только если*

$$\beta \le \beta_{vN} := \begin{cases} \dfrac{(\alpha_s+1)\alpha}{4\alpha_s\alpha^2+1} & \textit{при} \quad |\alpha_s-1|\alpha \le 1, \\ \dfrac{(\alpha_s+1)\alpha - \sqrt{(\alpha_s-1)^2\alpha^2-1}}{4\alpha_s\alpha^2+1} = \dfrac{1}{(\alpha_s+1)\alpha + \sqrt{(\alpha_s-1)^2\alpha^2-1}} & \textit{иначе.} \end{cases} \tag{19}$$

Доказательство. В условиях теоремы $q = 0$ и согласно формулам (12), (13) матрицу G можно записать в виде

$$G = \begin{pmatrix} 1-\omega_1 & \mathbf{i}\omega_2 \\ \mathbf{i}\omega_2 & 1-\alpha_s\omega_1 \end{pmatrix}, \quad \omega_1 := 4\alpha\sigma\beta, \quad \omega_2 := 2\sqrt{\sigma}\beta.$$

Аналогичная матрица изучалась в [14, теорема 1], где показано, что при $\alpha_s\omega_1^2 + \omega_2^2 > 0$ условие (18) для нее сводится к выполнению двух неравенств:

$$\alpha_s\omega_1^2 + \omega_2^2 - (\alpha_s+1)\omega_1 \le 0, \quad \alpha_s\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2(\alpha_s+1)\omega_1 + 4 \ge 0.$$

Если же $\alpha_s\omega_1^2 + \omega_2^2 = 0$, то $\omega_2 = 0$, $\sigma = 0$, $\omega_1 = 0$, и тогда $G = I$, а последние неравенства выполнены. Таким образом, должны выполняться неравенства

$$4\beta\sigma[(4\alpha_s\alpha^2\sigma+1)\beta - (\alpha_s+1)\alpha] \le 0 \quad \forall 0 \le \sigma \le 1, \tag{20}$$

$$r_2(\sigma) := 4\alpha_s\alpha^2\beta^2\sigma^2 - \beta[2(\alpha_s+1)\alpha - \beta]\sigma + 1 \ge 0 \quad \forall 0 \le \sigma \le 1. \tag{21}$$

Неравенство (20) приводит к условию

$$\beta \le \frac{(\alpha_s+1)\alpha}{4\alpha_s\alpha^2+1}. \tag{22}$$

В случае $\alpha_s > 0$ в неравенстве (21) вершина квадратного трехчлена $r_2(\sigma)$ такова:

$$\sigma_v = \frac{2(\alpha_s+1)\alpha - \beta}{8\alpha_s\alpha^2\beta}.$$

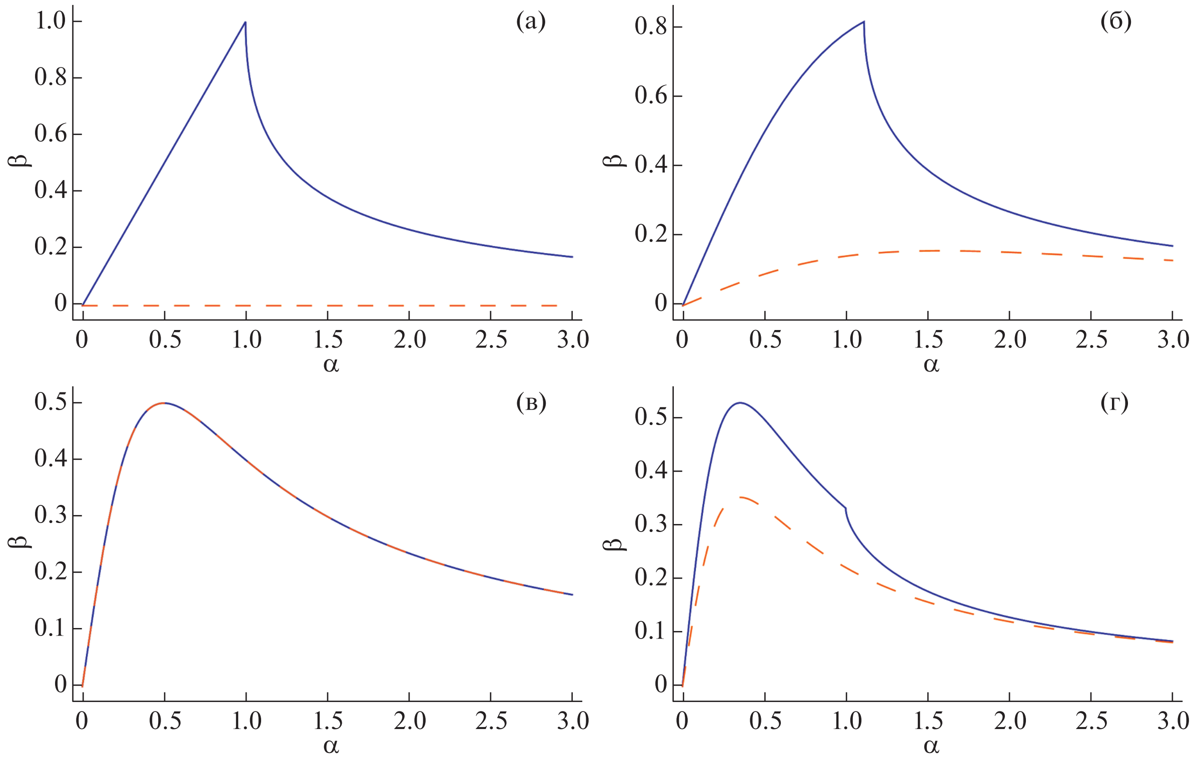
Свойство $\sigma_v > 1$ эквивалентно неравенству $\beta < (\alpha_s+1)\alpha/(4\alpha_s\alpha^2+0.5)$, выполненному в силу (22). Поэтому $r_2(\sigma)$ убывает на $[0,1]$, и неравенство (21) сводится к неравенству

$$r_2(1) = (4\alpha_s\alpha^2+1)\beta^2 - 2(\alpha_s+1)\alpha\beta + 1 \ge 0. \tag{23}$$

В случае $\alpha_s = 0$ неравенство (21) упрощается до $\beta(2\alpha-\beta)\sigma \le 1$ для всех $0 \le \sigma \le 1$, а поскольку здесь $\beta \le \alpha$ в силу (22), то и до неравенства $\beta(2\alpha-\beta) \le 1$, совпадающего с (23) при $\alpha_s = 0$.

Детерминант квадратного трехчлена относительно β в левой части неравенства (23) равен $4[(\alpha_s-1)^2\alpha^2 - 1]$, а его вершина совпадает с правой частью (22). Поэтому с учетом условия (22) неравенство (23) означает, что

$$\beta \le \frac{(\alpha_s+1)\alpha - \sqrt{(\alpha_s-1)^2\alpha^2-1}}{4\alpha_s\alpha^2+1} \quad \text{при} \quad |\alpha_s-1|\alpha > 1.$$



Фиг. 1. Графики $\beta_{\nu N}$ (сплошная) и $\beta_{\rm cr}$ (штриховая) в зависимости от α при: (а) $\alpha_s = 0$, (б) $\alpha_s = 1/10$, (в) $\alpha_s = 1$, (г) $\alpha_s = 2$.

В сочетании с (22) это приводит к условию (19).

Проанализировав максимумы каждой из функций в (19), можно показать, что $\beta_{\nu N} \le 1$.

При $M = 0$ в [26] был дан критерий L^2-диссипативности схемы (6), (7), имеющий вид

$$\beta \le \beta_{\rm cr} := \frac{2\min\{\alpha_s, 1\}\alpha}{4\alpha_s\alpha^2 + 1}. \tag{24}$$

Учитывая, что $(\alpha_s + 1) - |\alpha_s - 1| = 2\min\{\alpha_s, 1\}$, легко видеть, что $\beta_{\rm cr} < \beta_{\nu N}$ при всех $\alpha_s \ge 0$, $\alpha_s \ne 1$ либо $\beta_{\rm cr} = \beta_{\nu N}$ при $\alpha_s = 1$ (для всех $\alpha > 0$) (см. также фиг. 1). В том числе при $\alpha_s = 0$ имеем $\beta_{\rm cr} = 0$ и L^2-диссипативность отсутствует, тогда как $\beta_{\nu N} = \alpha - \sqrt{\max\{\alpha^2 - 1, 0\}} > 0$. Для схем с регуляризациями на неразнесенных сетках различие между условиями, соответствующими (19) и (24), было установлено в (14). Однако здесь для схемы на разнесенных сетках оно более существенно, а поведение $\beta_{\nu N}$ заметно сложнее.

Указанное совпадение при $\alpha_s = 1$ не случайно. В этом частном случае матрица $G = G(q)$ обладает свойством $G^*G = GG^*$, т.е. является нормальной, поэтому она унитарно подобна диагональной матрице, и максимальный из $|\lambda(G)|$ равен $\|G\|_2$. Свойство $G^*G = GG^*$ эквивалентно свойству $F^*F = F^*$ и далее $[A, B] = AB - BA = 0$ (при $\sigma \ne 0$) (см. (17)).

Пусть $|A|$ – детерминант матрицы A, а $z = z_R + \mathbf{i}z_I$ – стандартная запись числа $z \in \mathbb{C}$. Ниже для применения теоремы 1 существен следующий алгебраический критерий.

Лемма 1. *Рассмотрим произвольные вещественную симметричную и комплексную эрмитову матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a \\ a & a_2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_1 & q \\ q^* & q_2 \end{pmatrix}$$

с любым $q \in \mathbb{C}$. Пусть также $A > 0$, $Q \geq 0$. Неравенство $\zeta A \geq Q$ с параметром $\zeta \geq 0$ выполнено, если и только если

$$\zeta \geq \frac{b + \sqrt{b^2 - 4|A||Q|}}{2|A|}, \tag{25}$$

где $b := a_1 q_2 + a_2 q_1 - 2aq_R$. В этом неравенстве $b^2 \geq 4|A||Q|$, а $b > 0$ при $Q \neq 0$.

Доказательство. По критериям Сильвестра положительной определенности и неотрицательной определенности матриц имеем

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad |A| > 0, \quad q_1 \geq 0, \quad q_2 \geq 0, \quad |Q| = q_1 q_2 - |q|^2 \geq 0.$$

При $Q = 0$ неравенство (25) просто означает, что $\zeta \geq 0$. Пусть ниже $Q \neq 0$, тогда $q_1 > 0$ либо $q_2 > 0$.

По второму из упомянутых критериев неравенство $\zeta A - Q \geq 0$ эквивалентно системе неравенств

$$\zeta a_1 - q_1 \geq 0, \quad \zeta a_2 - q_2 \geq 0, \quad |\zeta A - Q| \geq 0.$$

С использованием введенной выше величины b их можно переписать в виде

$$\zeta \geq \frac{q_1}{a_1}, \quad \zeta \geq \frac{q_2}{a_2}, \tag{26}$$

$$p_2(\zeta) := |\zeta A - Q| = (\zeta a_1 - q_1)(\zeta a_2 - q_2) - (\zeta a - q)(\zeta a - q^*) = |A|\zeta^2 - b\zeta + |Q| \geq 0. \tag{27}$$

Вычислим величину

$$\begin{aligned} p_2\left(\frac{q_1}{a_1}\right) &= (a_1 a_2 - a^2)\left(\frac{q_1}{a_1}\right)^2 - (a_1 q_2 + a_2 q_1 - 2aq_R)\frac{q_1}{a_1} + q_1 q_2 - |q|^2 = \\ &= -q_1^2\left[\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{|q|}{q_1}\right)^2 - 2\frac{a}{a_1}\frac{q_R}{q_1}\right] = -q_1^2\left[\left(\frac{a}{a_1} - \frac{q_R}{q_1}\right)^2 + \left(\frac{q_I}{q_1}\right)^2\right] \leq 0 \end{aligned} \tag{28}$$

при $q_1 > 0$. Аналогично проверяется формула

$$p_2\left(\frac{q_2}{a_2}\right) = -q_2^2\left[\left(\frac{a}{a_2} - \frac{q_R}{q_2}\right)^2 + \left(\frac{q_I}{q_2}\right)^2\right] \leq 0 \tag{29}$$

при $q_2 > 0$. Отсюда следует, что квадратный трехчлен $p_2(\zeta)$ имеет корень $\zeta_1 > 0$, и поэтому его детерминант $b^2 - 4|A||Q| \geq 0$. Более того, второй корень ζ_2 тоже положителен при $|Q| > 0$ либо равен 0 при $|Q| = 0$ (так как $|A|\zeta_1\zeta_2 = |Q|$). Тем самым $b = |A|(\zeta_1 + \zeta_2) > 0$.

Теперь квадратное неравенство (27) в сочетании с (26) приводит к условию (25), где справа стоит бóльший из корней ζ_1, ζ_2.

Замечание 2. Как правило, $\Delta := b^2 - 4|A||Q| > 0$ при $Q \neq 0$, за исключением специального случая. А именно, $\Delta = 0$ при $Q \neq 0$ означает, что $\zeta_1 = \zeta_2$. Тогда при $q_1 = 0$ либо $q_2 = 0$ имеем $\Delta = b^2 > 0$, откуда $q_1 > 0$ и $q_2 > 0$. Тогда в силу (28) имеем $p_2(q_1/a_1) = 0$, и поэтому $a/a_1 = q_R/q_1$ и $q_I = 0$. Аналогично, в силу (29) имеем $a/a_2 = q_R/q_2$, и далее $q_R(a_1/q_1 - a_2/q_2) = 0$. Если $q_R \neq 0$, то $a_1/q_1 - a_2/q_2 = 0$. Если $q_R = 0$, то $a = 0$ и $\Delta = (a_1 q_2 + a_2 q_1)^2 - 4a_1 a_2 q_1 q_2 = (a_1 q_2 - a_2 q_1)^2$, и при $\Delta = 0$ опять $a_1/q_1 - a_2/q_2 = 0$. Эквивалентно, $a_2/a_1 = q_2/q_1 = \theta > 0$. Таким образом, приходим к матрицам

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a \\ a & \theta a_1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_1 & q \\ q & \theta q_1 \end{pmatrix}, \quad a = \frac{a_1}{q_1}q, \quad q_1 > 0, \quad q \in \mathbb{R}$$

(здесь $A > 0$ и $Q \geq 0$ при $a_1 > 0$, $\theta > 0$, $|q| < \sqrt{\theta}q_1$). Для таких матриц имеем

$$\Delta = (2\theta a_1 q_1 - 2aq)^2 - 4(\theta a_1^2 - a^2)(\theta q_1^2 - q^2) = 4\theta(aq_1 - a_1 q)^2 = 0.$$

Следствие 1. В условиях леммы 1 для выполнения неравенства $\zeta A \geq Q$ с $\zeta \geq 0$ необходимо, чтобы $\zeta \geq b/(2|A|)$, и достаточно, чтобы $\zeta \geq b/|A|$. В эти условия не входит $|Q|$.

В самом деле, в силу свойств $b^2 - 4|A||Q| \geq 0$, $|A||Q| \geq 0$ и $b \geq 0$ результат следует из оценок $b \leq b + \sqrt{b^2 - 4|A||Q|} \leq 2b$.

3. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ L^2-ДИССИПАТИВНОСТИ

Следующий результат можно считать основным в данной работе.

Теорема 3. *Пусть* $\mu_{\mathrm{ph}} = 0$, $\alpha_s > 0$ *и* $M \neq 0$. Для L^2*-диссипативности схемы* (6), (7) *необходимо выполнение неравенства*

$$\frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{\beta_{\mathrm{nec}}} := \max\left\{\bar{b}_1\alpha, \frac{\bar{b}_2}{4\alpha_s\alpha}\right\} \tag{30}$$

и достаточно выполнение неравенства

$$\frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{\beta_{\mathrm{suf}}} := 2\bar{b}_1\alpha + \frac{\bar{b}_2}{2\alpha_s\alpha}, \tag{31}$$

где

$$\bar{b}_1 = \bar{b}_1(\alpha_s, M^2) := \begin{cases} \alpha_s + 1 \quad \text{\textit{при}} \quad M^2 \leq \alpha_s + 1, \\ \dfrac{1}{4M^2}(M^2 + \alpha_s + 1)^2 \quad \text{\textit{при}} \quad M^2 \geq \alpha_s + 1, \end{cases} \tag{32}$$

$$\bar{b}_2 = \bar{b}_2(\alpha_s, M^2) := \begin{cases} \alpha_s + 1 \quad \text{\textit{при}} \quad \alpha_s \leq 2, \quad M^2 \leq 2 - \alpha_s, \\ (M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1) \quad \text{\textit{иначе.}} \end{cases} \tag{33}$$

Доказательство. В силу теоремы 1 и леммы 1 в применении к матрицам $A(q)$ и $Q(q)$, введенным в (13) и (14), для L^2-диссипативности схемы (6), (7) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{2\alpha_s} \max_{0 \leq q \leq M^2} (b + \sqrt{b^2 - 4\alpha_s|Q(q)|}), \tag{34}$$

где $b = a_{11}q_{22} + a_{22}q_{11} - 2a_{12}q_{12R}$ и учтено, что $|A(q)| = \alpha_s$.

Из формул (13) и (16) следует, что

$$b = 2\alpha\sigma[q + (q + \alpha_s)^2] + \frac{1}{2\alpha}(q + 1) + (q + \alpha_s)\left[2\alpha\sigma(q + 1) + \frac{1}{2\alpha}(q + 1)\right] -$$
$$- 2\sqrt{q}\left[2\alpha\sigma\sqrt{q}(q + \alpha_s + 1) + \frac{1}{2\alpha}2\sqrt{q}\right] = 2\alpha\{\sigma[q + (q + \alpha_s)^2 + (q + \alpha_s)(q + 1) -$$
$$- 2q(q + \alpha_s + 1)]\} + \frac{1}{2\alpha}[(q + 1)(q + \alpha_s + 1) - 4q] = 2\alpha\alpha_s b_1(q) + \frac{1}{2\alpha}b_2(q)$$

с квадратными трехчленами относительно q (зависящими также от α_s и M)

$$b_1(q) = \sigma(q + \alpha_s + 1) = \left(1 - \frac{q}{M^2}\right)(q + \alpha_s + 1), \quad b_2(q) = (q - 1)^2 + \alpha_s(q + 1).$$

По следствию 1 необходимым условием выполнения критерия (34) служат неравенства

$$\frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{2\alpha_s} \max_{0 \leq q \leq M^2} b \geq \max\left\{\alpha\bar{b}_1, \frac{1}{4\alpha_s\alpha}\bar{b}_2\right\} \quad \text{с} \quad \bar{b}_k := \max_{0 \leq q \leq M^2} b_k(q), \quad k = 1, 2.$$

Корнями квадратного трехчлена $b_1(q)$ являются $q = -\alpha_s - 1$ и $q = M^2$. Он является вогнутой функцией по q и $b_1(0) = \alpha_s + 1$. Его вершиной является $q_{1v} = 0.5M^2[1 - (\alpha_s + 1)/M^2]$, и

$$b_1(q_{1v}) = \left[1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha_s + 1}{M^2}\right)\right]\left(\frac{M^2}{2} - \frac{\alpha_s + 1}{2} + \alpha_s + 1\right) = \frac{1}{4M^2}(M^2 + \alpha_s + 1)^2.$$

Поскольку $q_{1v} \ge 0$ при $M^2 \ge \alpha_s + 1$, то верна формула (32).

Имеем $b_2(q) = q^2 + (\alpha_s - 2)q + (\alpha_s + 1)$. Его вершиной служит $q_{2v} = 1 - \alpha_s/2$. В случае $\alpha_s \ge 2$ данный $b_2(q)$ возрастает по $q \ge 0$, и поэтому $\overline{b}_2 = b_2(M^2) = (M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1)$. В случае $\alpha_s < 2$ имеем $q_{2v} > 0$, и тем самым $\overline{b}_2 = b_2(0) = \alpha_s + 1$ при $M^2 \le 2q_{2v}$ либо $\overline{b}_2 = b_2(M^2)$ при $M^2 \ge 2q_{2v}$. В итоге это приводит к формуле (33).

Достаточное условие (31) выполнения критерия (34) вытекает из следствия 1 и оценки $\max\limits_{0 \le q \le M^2} b/\alpha_s \le 2\overline{b}_1\alpha + \overline{b}_2/(2\alpha_s\alpha)$.

Замечание 3. При $M = 0$ имеем $q = 0$ и $b_1 = \sigma(\alpha_s + 1)$ и $b_2 = \alpha_s + 1$. В этом случае следует брать максимум по $0 \le \sigma \le 1$, и теорема сохраняет силу, более того, необходимое условие можно усилить до

$$\frac{1}{\beta} \ge \overline{b}_1\alpha + \frac{\overline{b}_2}{4\alpha_s\alpha} = (\alpha_s + 1)\left(\alpha + \frac{1}{4\alpha_s\alpha}\right).$$

Функции β_{nec} и β_{suf} непрерывны в октанте $\alpha > 0$, $\alpha_s \ge 0$, $M^2 \ge 0$, не возрастают по M^2 (так как по определению $\overline{b}_1$ и $\overline{b}_2$ не убывают по M^2) и стремятся к 0 при $\alpha \to +0$ и $\alpha \to +\infty$. Существенно, что в силу указанного невозрастания выполнение условий (30) или (31) при некотором $M = M_0 > 0$ влечет их выполнение при всех $0 \le |M| \le M_0$ (при фиксированных α и α_s). Обратим внимание на то, что $0.25\beta_{\text{nec}} \le \beta_{\text{suf}} \le 0.5\beta_{\text{nec}}$.

На фиг. 2 даны типичные графики β_{nec} и β_{suf} в зависимости от α и $|M|$ при трех характерных значениях α_s.

Выполненные численные эксперименты в целом неплохо соотносятся с приведенным выше теоретическим анализом. Для линеаризованной задачи при $M = 0$ уже простые эксперименты показывают, что даже небольшое нарушение условия устойчивости фон Неймана обычно приводит к разрушению численного решения. С другой стороны, они подтверждают, что это условие не обеспечивает L^2-диссипативности, как и предсказывает теория (детали для краткости опускаем). Последнее не столь критично для линеаризованной задачи. Тем не менее выполнение этого свойства оказывается важным в исходной нелинейной постановке для обеспечения лучшего качества численных решений с целью устранения или существенного уменьшения численных осцилляций, хотя обычно лишь достаточно сильные из них приводят к полному разрушению решений.

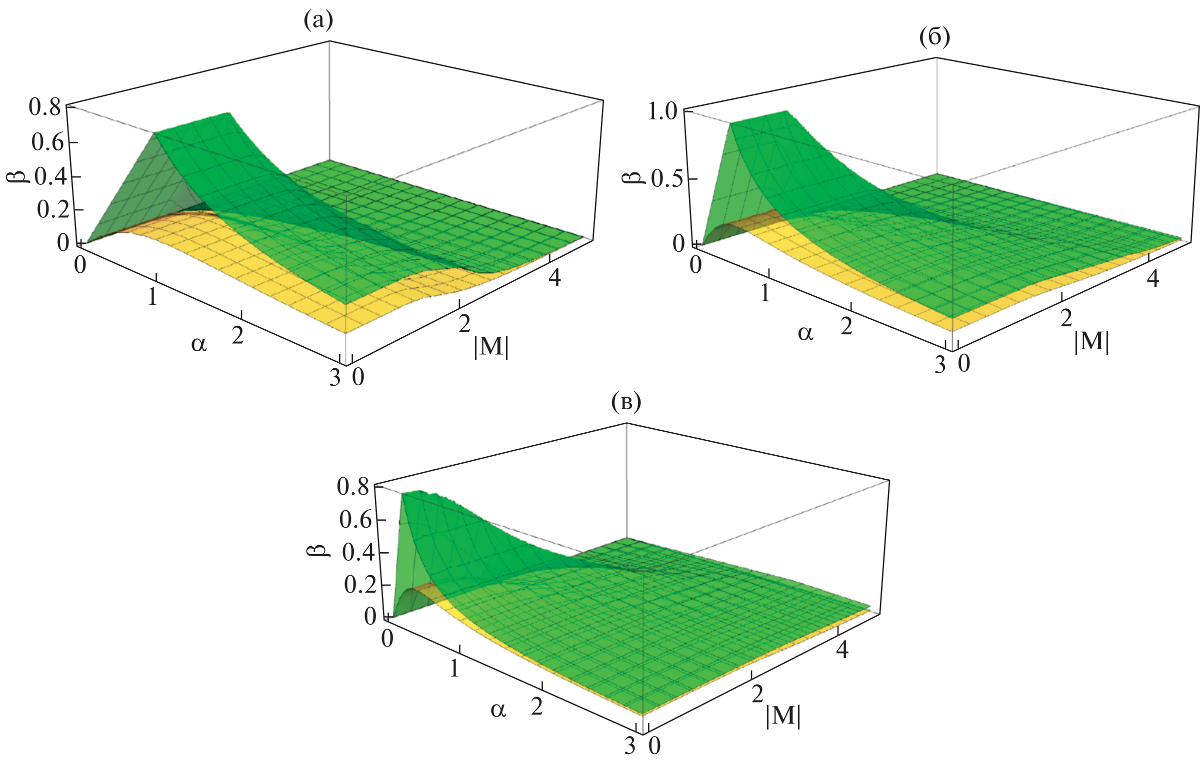
В нелинейной постановке возьмем $p(\rho) = \rho^\gamma$ с $\gamma = 1.4$. Пусть

$$\Delta t = \frac{\hat{\beta}h}{\max_{k\in\mathbb{Z}}(c_k + |u_k|)}, \quad \tau = \frac{\alpha h}{c}, \quad c = \sqrt{p'(s^*\rho)},$$

подобно (11). Рассмотрим две задачи Римана. В примере 1 выберем начальные данные

$$\rho_0(x) = \begin{cases} 1.4, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}, \quad u_0(x) = 0,$$

и численно решим задачу до момента времени $t_{\text{fin}} = 0.04$. Тогда число Маха $|M|$ варьируется от 0 до ≈ 0.1777 и тем самым невелико.



Фиг. 2. Графики β_{nec} (верхний) и β_{suf} (нижний) в зависимости от α и $|M|$ при: (а) $\alpha_s = 1/4$, (б) $\alpha_s = 1$, (в) $\alpha_s = 4$.

Возьмем $\alpha = 0.25$, $\hat{\beta} = 0.05$ и $h = 1/150$. На фиг. 3 даны графики решения ρ и u по пространству при $t = t_{\text{fin}}$ и график по времени его полной пространственной вариации

$$V(\rho, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\rho_{k+1/2} - \rho_{k-1/2}| + |u_k - u_{k-1}|.$$

При $\alpha_s = 1$ численное решение не имеет видимых осцилляций, а $V(\rho, u)$ является лишь слабо немонотонной и стремится к пределу. Отметим, что в этом случае $\beta_{\text{suf}} = 0.2$. Но при $\alpha_s = 0$ осцилляции ρ, u, $V(\rho, u)$ заметны, и несмотря на то, что $\hat{\beta} = 0.05$ много меньше $\beta_{\nu N} = 0.25$ (см. (19)), качество численного решения низкое.

В примере 2 используем другие начальные данные:

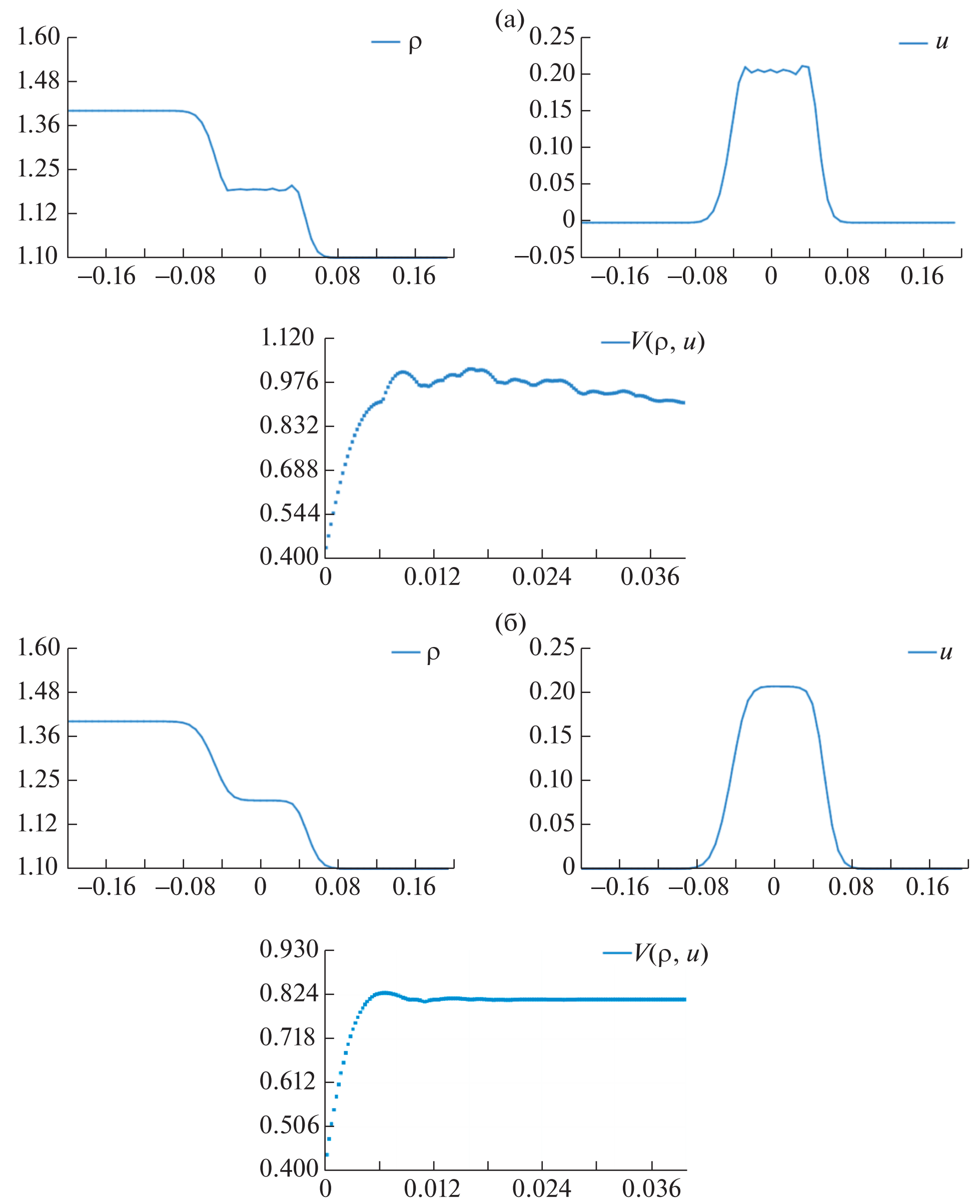
$$\rho_0(x) = \begin{cases} \rho_L = 1, & x < 0, \\ \rho_R = 1.1, & x > 0, \end{cases} \qquad u_0(x) = \begin{cases} -0.5\sqrt{p'(\rho_L)} \approx -0.5916, & x < 0, \\ 0.5\sqrt{p'(\rho_R)} \approx 0.6021, & x > 0, \end{cases}$$

и прежнее t_{fin}. Здесь в расчете число Маха варьируется от 0 до 0.5 и уже не мало.

Возьмем прежние α_s, h, а $\hat{\beta} = 0.3$. На фиг. 4б при $\alpha_s = 1$ у ρ, u нет осцилляций, а $V(\rho, u)$ возрастает и стремится к пределу. Напротив, на фиг. 4а при $\alpha_s = 0$ все величины ρ, u, $V(\rho, u)$ осциллируют, и поэтому этот выбор α_s намного хуже, что и предсказывает данный выше анализ диссипативности в контрасте с условием фон Неймана (см. фиг. 1а).

Также в ряде численных экспериментов с ударными волнами нами было отмечено, что значение $\beta = \beta_{\text{suf}}$ позволяет неплохо разделять слабо- или неосциллирующие решения от осциллирующих; детали для краткости опускаем.

В доказательстве теоремы 3 можно было найти $\max\limits_{0 \le q \le M^2} b$ и тем самым несколько уточнить результат, сблизив необходимое и достаточное условия подобно [15]. Однако соответствующее вы-

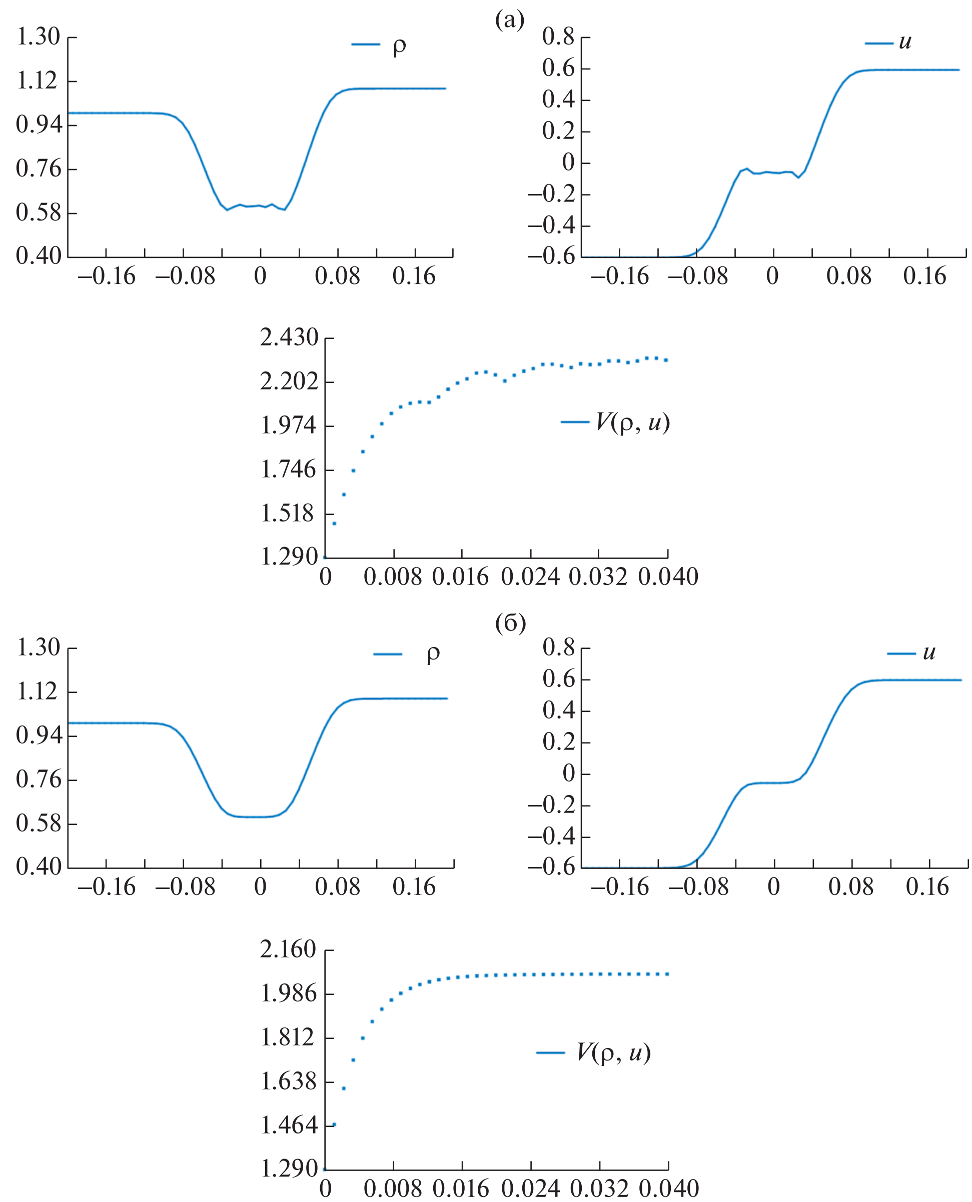


Фиг. 3. Пример 1. Численное решение по пространству для $t = 0.04$ и его полная вариация по времени для $\alpha = 0.25$, $\hat{\beta} = 0.05$, $h = 1/150$: (а) $\alpha_s = 0$, (б) $\alpha_s = 1$.

ражение зависит от α более сложным образом, и приводимая ниже теорема оказывается более громоздкой.

Теорема 4. *Пусть* $\mu_{\mathrm{ph}} = 0$, $\alpha_s > 0$ *и* $M \neq 0$. Для L^2*-диссипативности схемы* (6), (7) *необходимо, чтобы* $\beta \le \beta_{\mathrm{nec}}^{(0)}$, *и достаточно, чтобы* $\beta \le \beta_{\mathrm{suf}}^{(0)} := 0.5\beta_{\mathrm{nec}}^{(0)}$, *где*

$$\frac{1}{\beta_{\mathrm{nec}}^{(0)}} := \begin{cases} (\alpha_s + 1)\left(\alpha + \dfrac{1}{4\alpha_s\alpha}\right) & \text{в} \quad D_{\mathrm{I}}, \\ \dfrac{(M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1)}{4\alpha_s\alpha} & \text{в} \quad D_{\mathrm{II}}, \\ (\alpha_s + 1)\left(\alpha + \dfrac{1}{4\alpha_s\alpha}\right) + \dfrac{1}{16\alpha_s\alpha(æ\alpha^2 - 1)}[(M^2 - \alpha_s - 1)æ\alpha^2 + \alpha_s - 2]^2 & \text{в} \quad D_{\mathrm{III}}, \end{cases} \tag{35}$$

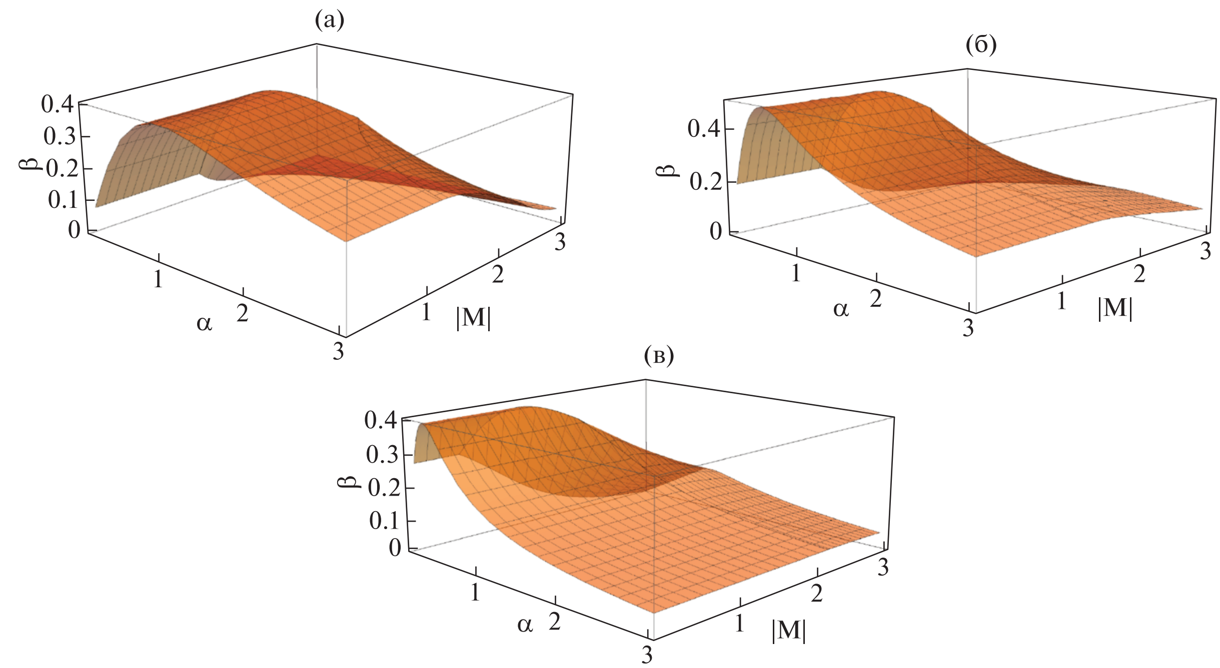


Фиг. 4. Пример 2. Численное решение по пространству для $t = 0.04$ и его полная вариация по времени при $\alpha = 0.25$, $\hat{\beta} = 0.3$, $h = 1/150$: (а) $\alpha_s = 0$, (б) $\alpha_s = 1$.

с $æ := 4\alpha_s/M^2$. *Множества* $D_{\mathrm{I}}{-}D_{\mathrm{III}}$ *включают точки с положительными координатами* $(\alpha^2, \alpha_s, M^2)$. В D_{I} *это*: 1) $æ\alpha^2 < 1$, $(M^2 - \alpha_s - 1)æ\alpha^2 + \alpha_s - 2 < 0$ *и* $(\alpha_s + 1)æ\alpha^2 \geq M^2 + \alpha_s - 2$; 2) $æ\alpha^2 = 1$ *и* $M^2 \leq 3$; 3) $æ\alpha^2 > 1$ *и* $(M^2 - \alpha_s - 1)æ\alpha^2 + \alpha_s - 2 \leq 0$.

В D_{II} *это*: 1) $æ\alpha^2 < 1$ *и* $(M^2 - \alpha_s - 1)æ\alpha^2 + \alpha_s - 2 \geq 0$; 2) $æ\alpha^2 < 1$, $(M^2 - \alpha_s - 1)æ\alpha^2 + \alpha_s - 2 < 0$ *и* $(\alpha_s + 1)æ\alpha^2 \leq M^2 + \alpha_s - 2$; 3) $æ\alpha^2 = 1$ *и* $M^2 \geq 3$; 4) $æ\alpha^2 > 1$, $(M^2 - \alpha_s - 1)æ\alpha^2 + \alpha_s - 2 > 0$ *и* $(M^2 + \alpha_s + 1)æ\alpha^2 \leq 2M^2 + \alpha_s - 2$.

В D_{III} *это* $æ\alpha^2 > 1$, $(M^2 - \alpha_s - 1)æ\alpha^2 + \alpha_s - 2 > 0$ *и* $(M^2 + \alpha_s + 1)æ\alpha^2 \geq 2M^2 + \alpha_s - 2$.



Фиг. 5. Графики $\beta_{\text{nec}}^{(0)}$ в зависимости от α и $|M|$ при: (а) $\alpha_s = 1/4$, (б) $\alpha_s = 1$, (в) $\alpha_s = 4$.

Доказательство. Вернемся к началу доказательства теоремы 3. Верны формулы

$$s_2(q) := \frac{1}{2\alpha_s} b = a_0 q^2 + a_1 q + a_2, \quad a_0 = \frac{1}{4\alpha_s\alpha}(1 - æ\alpha^2),$$

$$a_1 = \frac{1}{4\alpha_s\alpha}[(M^2 - \alpha_s - 1)æ\alpha^2 + \alpha_s - 2], \quad a_2 = (\alpha_s + 1)\left(\alpha + \frac{1}{4\alpha_s\alpha}\right).$$

Обозначим через q_* (любую) точку максимума $s_2(q)$ на $[0, M^2]$. При $æ\alpha^2 \neq 1$ ясно, что $s_2(q)$ – квадратный трехчлен с вершиной $q_v = -a_1/(2a)$.

В случае $æ\alpha^2 < 1$ имеем $a_0 > 0$, и при $a_1 \geq 0$ получаем, что $q_v \leq 0$ и $s_2(q)$ возрастает при $q \geq 0$, и поэтому $q_* = M^2$. При $a_1 < 0$ имеем $q_v > 0$, и поэтому $q_* = 0$ для $M^2 \leq 2q_v$ (эквивалентно, $(\alpha_s + 1)æ\alpha^2 \geq M^2 + \alpha_s - 2$) либо $q_* = M^2$ для $M^2 \geq 2q_v$.

В случае $æ\alpha^2 = 1$ имеем $a_0 = 0$, $s_2(q)$ – аффинная функция, поэтому $q_* = 0$ при $a_1 \leq 0$ (эквивалентно, $M^2 \leq 3$) либо $q_* = M^2$ для $M^2 \geq 3$.

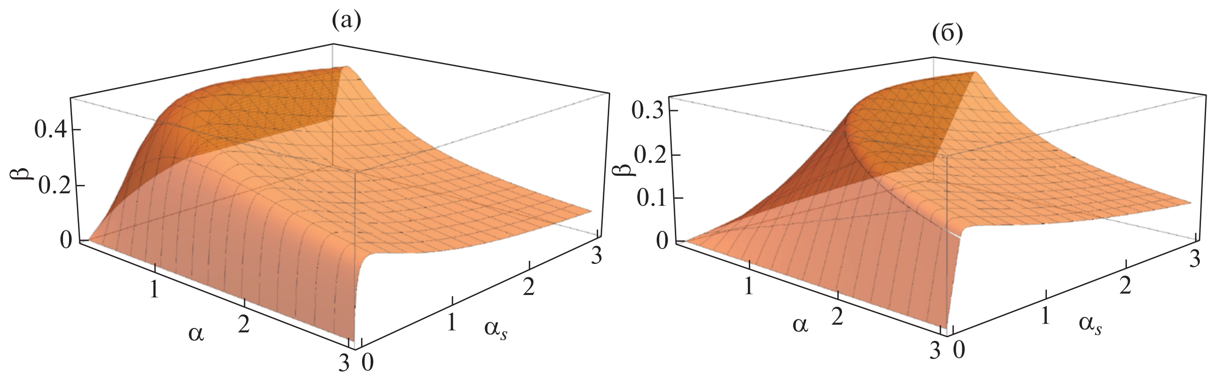
В случае $æ\alpha^2 > 1$ имеем $a_0 < 0$, и при $a_1 \leq 0$ получаем, что $s_2(q)$ убывает при $q \geq 0$, и поэтому $q_* = 0$. При $a_1 > 0$ имеем $q_v > 0$, и поэтому $q_* = M^2$ для $M^2 \leq q_v$ (эквивалентно, $(M^2 + \alpha_s + 1)æ\alpha^2 \leq 2M^2 + \alpha_s - 2$) либо $q_* = q_v$ для $M^2 \geq q_v$.

При этом верны формулы

$$s_2(0) = a_2, \quad s_2(M^2) = \frac{(M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1)}{4\alpha_s\alpha}, \quad s_2(q_v) = a_2 - \frac{a_1^2}{4a_0}.$$

Переупорядочив результаты согласно этим значениям, завершим доказательство.

Функция $\beta_{\text{nec}}^{(0)}$ непрерывна в октанте $\alpha > 0$, $\alpha_s > 0$, $M^2 > 0$, не возрастает по M^2 и, как нетрудно проверить, стремится к 0 при $\alpha \to +0$ и $\alpha \to +\infty$. Кроме того, она не зависит от M на D_1 и воз-



Фиг. 6. Графики $\beta_{\text{nec}}^{(0)}$ в зависимости от α и α_s при: (а) $|M| = 1$, (б) $|M| = 2$.

растает по α на D_{II}. На фиг. 5 представлены графики $\beta_{\text{nec}}^{(0)}$ в зависимости от α и $|M|$ при трех характерных значениях α_s. На всех трех графиках имеются участки, относящиеся ко всем множествам $D_{\text{I}}-D_{\text{III}}$, и они помечены разной штриховкой.

На фиг. 6 даны графики $\beta_{\text{nec}}^{(0)}$ в зависимости от α и α_s при двух характерных значениях $|M| = 1$ и 2. В силу указанного свойства невозрастания выполнение условий теоремы с $\beta_{\text{nec}}^{(0)}$ при некотором $M = M_0 > 0$ влечет их выполнение при всех $0 \le |M| \le M_0$ (при фиксированных α и α_s), тем самым график на фиг. 6а представляет интерес для всей дозвуковой области $|M| \le 1$, а график на фиг. 6б – также и для транс- и сверхзвуковых областей $|M| \le 2$. На них фигурируют участки, относящиеся только ко множествам D_{I} и D_{II}.

Вернемся к теореме 3. Оптимальное значение α, при котором достигаются максимальные значения β_{nec} и β_{suf} (это происходит одновременно) и тем самым – максимальный шаг по времени, определяется из простого уравнения $\bar{b}_1\alpha = \bar{b}_2/(4\alpha_s\alpha)$. Эти значения α, β_{nec} и β_{suf} даются формулами

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{b}_2}{\alpha_s\bar{b}_1}}, \quad \bar{\beta}_{\text{nec}} = 4\bar{\beta}_{\text{suf}} = 2\sqrt{\frac{\alpha_s}{\bar{b}_1\bar{b}_2}}.$$

Конкретизируем их. Неравенства на α_s и M^2, входящие в выражения для $\bar{b}_1$ и $\bar{b}_2$, порождают разбиение квадранта параметров (α_s, M^2) на четыре подобласти (фиг. 7). В области Ω_{I} имеем $M^2 \le \min\{\alpha_s + 1, 2 - \alpha_s\}$ (здесь $0 < \alpha_s \le 2$), и необходимое условие (30) принимает вид

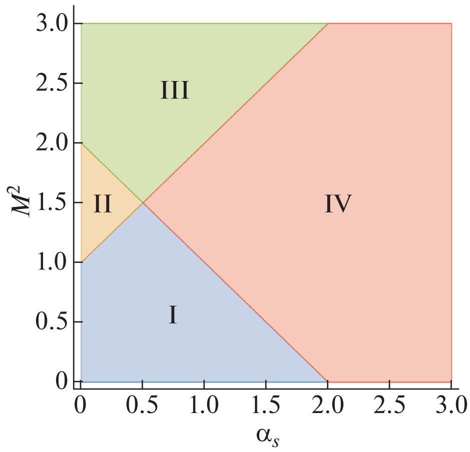
$$\frac{1}{\beta} \ge \frac{1}{\beta_{\text{nec}}} = (\alpha_s + 1)\max\left\{\alpha, \frac{1}{4\alpha_s\alpha}\right\}. \tag{36}$$

Только в ней оптимальные значения α и β_{nec} задаются формулами, не зависящими от M:

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_s}}, \quad \bar{\beta}_{\text{nec}} = \frac{2\sqrt{\alpha_s}}{\alpha_s + 1}. \tag{37}$$

Максимум $\bar{\beta}_{\text{nec}}$ достигается при $\alpha_s = 1$ и равен 1.

Как нетрудно убедиться, сечения D_{I} любой плоскостью $\alpha^2 = \text{const} > 0$ содержат Ω_I. Поэтому теорема 4 позволяет в (36) и (37) улучшить $1/\beta_{\text{nec}}$ и $\bar{\beta}_{\text{nec}}$ до соответственно $(\alpha_s + 1)[\alpha + 1/(4\alpha_s\alpha)] = 1/(2\beta_{\text{suf}})$ и $\sqrt{\alpha_s}/(\alpha_s + 1)$.



Фиг. 7. Подобласти разбиения квадранта параметров (α_s, M^2), $\alpha_s > 0$ в теореме 3.

В Ω_{II} имеем $\alpha_s + 1 \le M^2 \le 2 - \alpha_s$ (здесь $0 < \alpha_s \le 0.5$), и необходимое условие можно записать в виде

$$\frac{1}{\beta} \ge \max\left\{\frac{1}{4}\left(|M| + \frac{\alpha_s + 1}{|M|}\right)^2 \alpha, \frac{\alpha_s + 1}{4\alpha_s\alpha}\right\}.$$

Оптимальные значения α и β_{nec} задаются формулами

$$\alpha_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{\alpha_s + 1}{\alpha_s}} \frac{|M|}{M^2 + \alpha_s + 1}, \qquad \overline{\beta}_{\text{nec}} = \sqrt{\frac{\alpha_s}{\alpha_s + 1}} \frac{4|M|}{M^2 + \alpha_s + 1}.$$

В Ω_{III} имеем $\max\{\alpha_s + 1, 2 - \alpha_s\} \le M^2$, и необходимое условие принимает вид

$$\frac{1}{\beta} \ge \max\left\{\frac{1}{4}\left(|M| + \frac{\alpha_s + 1}{|M|}\right)^2 \alpha, \frac{(M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1)}{4\alpha_s\alpha}\right\}.$$

Оптимальные значения α и β_{nec} задаются формулами

$$\alpha_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{(M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1)}{\alpha_s}} \frac{|M|}{M^2 + \alpha_s + 1} \sim \frac{|M|}{\sqrt{\alpha_s}},$$

$$\overline{\beta}_{\text{nec}} = \frac{4\sqrt{\alpha_s}|M|}{(M^2 + \alpha_s + 1)\sqrt{(M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1)}} \le \frac{4\sqrt{\alpha_s}}{|M||M^2 - 1|} = O\left(\frac{1}{|M|^3}\right),$$

где асимптотическое поведение указано при $|M| \to \infty$ и фиксированном α_s. Отметим линейный рост α_{opt} и, к сожалению, быстрое убывание $\overline{\beta}_{\text{nec}}$ с ростом $|M|$.

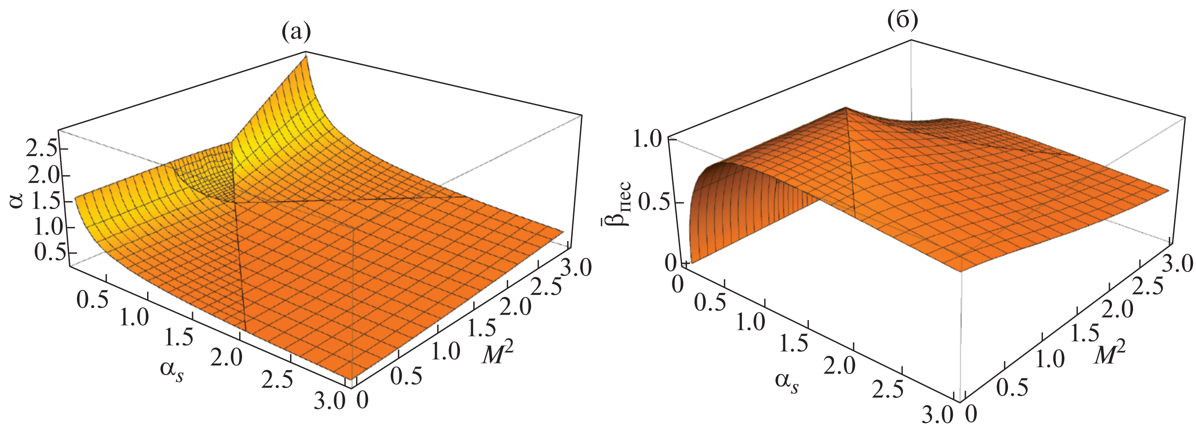
В Ω_{IV} имеем $2 - \alpha_s \le M^2 \le \alpha_s + 1$ (здесь $\alpha_s \ge 0.5$), и необходимое условие таково:

$$\frac{1}{\beta} \ge \max\left\{(\alpha_s + 1)\alpha, \frac{(M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1)}{4\alpha_s\alpha}\right\}.$$

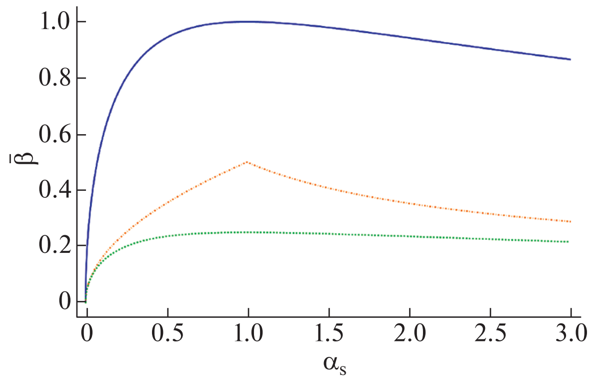
Оптимальные значения α и β_{nec} задаются формулами

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1)}{\alpha_s(\alpha_s + 1)}}, \tag{38}$$

$$\overline{\beta}_{\text{nec}} = 2\frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{(\alpha_s + 1)[(M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1)]}} = \frac{1}{(\alpha_s + 1)\alpha_{\text{opt}}}. \tag{39}$$



Фиг. 8. Графики: (а)$\alpha_{\rm opt}$ и (б) $\bar\beta_{\rm nec}$ в зависимости от α_s и M^2.



Фиг. 9. Графики $\bar\beta_{\rm nec}$ (сплошная), $\bar\beta_{\rm cr}$ (штрихпунктир) и $\bar\beta_{\rm suf}$ (пунктир) в зависимости от α_s при $M = 0$.

На фиг. 8 представлены графики $\alpha_{\rm opt}$ и $\bar\beta_{\rm nec}$ в зависимости от $\alpha_s, M^2 \in (0,3]$. На них разной штриховкой отмечены участки, относящиеся к разным областям $\Omega_{\rm I}$–$\Omega_{\rm IV}$.

При $M = 0$ формулы (38), (39) переходят в (37). Для сравнения отметим, что согласно критерию (24) значение $\alpha_{\rm opt}$ такое же, как в (37), а оптимальное значение $\bar\beta_{\rm cr}$ следующее:

$$\bar\beta_{\rm suf} = \frac{\sqrt{\alpha_s}}{2(\alpha_s+1)} \le \bar\beta_{\rm cr} = \frac{\min\{\alpha_s,1\}}{2\sqrt{\alpha_s}} \le \bar\beta_{\rm nec} = \frac{2\sqrt{\alpha_s}}{\alpha_s+1}.$$

При этом асимптотическое поведение $\bar\beta_{\rm cr}$ и $\bar\beta_{\rm suf}$ (но не $\bar\beta_{\rm nec}$) при $\alpha_s \to +0$ и $+\infty$ одинаковое. Графики трех величин из последних неравенств даны на фиг. 9.

4. СЛУЧАЙ КГиДД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА БЕЗ ИСКУССТВЕННОГО КОЭФФИЦИЕНТА ВЯЗКОСТИ

Рассмотрим теперь бегло другой важный на практике случай, когда $\mu_{\rm art} = 0$ (т.е. $\alpha_s = 0$), а $\mu_{\rm ph} > 0$, использованный в том числе в [10], [12], [25]. Он существенно отличается от предыдущего, поскольку теперь используется регуляризация баротропных уравнений Навье–Стокса, а не Эйлера, и уравнение импульса относительно u имеет уже параболический тип вместо гиперболического 1-го порядка. При этом весьма важно то, что благодаря рассмотрению выше любых значений $\alpha_s > 0$, новый анализ не требуется, ибо его можно свести к уже выполненному посредством замен

$$\alpha_s = \frac{d}{\tau_*}, \quad d := \frac{\nu_{\rm ph*}}{c_*^2}, \quad \alpha = \frac{c_*\tau_*}{h},$$

где параметр d имеет размерность времени. Следуя [26], теперь формулы (11) не используются и работа идет непосредственно с τ_* и Δt; это связано и с тем, что выбор τ здесь априори не очевиден, и более того, его желательно выяснить в ходе анализа устойчивости. Ниже для краткости опускаем индекс * у $\nu_{\mathrm{ph}*}$ и τ_*.

Указанные замены в теореме 3 приводят к следующему результату.

Теорема 5. *Пусть* $\mu_{\mathrm{art}} = 0$ *и* $d > 0$. Для L^2*-диссипативности схемы* (6), (7) *необходимо выполнение неравенства*

$$\Delta t \le \Delta t_{\mathrm{nec}} := \min\left\{\frac{h^2}{c_*^2\bar{b}_1\tau}, \frac{4d}{\bar{b}_2}\right\} \tag{40}$$

и достаточно выполнение неравенства

$$\Delta t \le \Delta t_{\mathrm{suf}} := \frac{2h^2}{4c_*^2\bar{b}_1\tau + d^{-1}\bar{b}_2h^2}, \tag{41}$$

где

$$\bar{b}_1 = \bar{b}_1\left(\frac{d}{\tau}, M^2\right) = \begin{cases} 1 + \dfrac{d}{\tau} & \text{\it при} \quad M^2 \le 1 + \dfrac{d}{\tau}, \\ \dfrac{1}{4}\left[|M| + \left(\dfrac{d}{\tau} + 1\right)\dfrac{1}{|M|}\right]^2 & \text{\it при} \quad M^2 \ge 1 + \dfrac{d}{\tau}, \end{cases}$$

$$\bar{b}_2 = \bar{b}_2\left(\frac{d}{\tau}, M^2\right) = \begin{cases} 1 + \dfrac{d}{\tau} & \text{\it при} \quad \dfrac{d}{\tau} \le 2, \quad M^2 \le 2 - \dfrac{d}{\tau}, \\ (M^2 - 1)^2 + \dfrac{d}{\tau}(M^2 + 1) & \text{\it иначе.} \end{cases}$$

Переформулировка теоремы 4 выполняется аналогично; для краткости ее опускаем.

Введем безразмерный параметр $\theta_h = c_*h/\nu_{\mathrm{ph}}$. В области Ω_{I}, где $M^2 \le \min\{\tau^{-1}d + 1, 2 - \tau^{-1}d\}$ (здесь $0 < \tau^{-1}d \le 2$, а $M^2 \le 3/2$), необходимое условие (40) с учетом теоремы 4, как указано в предыдущем разделе, можно уточнить как

$$\Delta t \le \Delta t_{\mathrm{nec}}^{(0)} := \frac{4h^2}{4c_*^2(d + \tau) + (d^{-1} + \tau^{-1})h^2}, \tag{42}$$

а достаточное условие (41) принимает вид $\Delta t \le \Delta t_{\mathrm{suf}} = 0.5\Delta t_{\mathrm{nec}}^{(0)}$. Верны двусторонние оценки

$$\frac{1}{2}\min\{d, \tau\} \le \frac{d\tau}{d + \tau} \le \Delta t_{\mathrm{suf}}^{(0)} \le 2\frac{d\tau}{d + \tau} \le 2\min\{d, \tau\} \quad \text{при} \quad h^2 \ge 4c_*^2 d\tau, \tag{43}$$

$$\frac{h^2}{4c_*^2(d + \tau)} \le \Delta t_{\mathrm{suf}}^{(0)} \le \frac{h^2}{2c_*^2(d + \tau)} \quad \text{при} \quad h^2 \le 4c_*^2 d\tau. \tag{44}$$

Соответствующее оптимальное значение параметра τ, при котором как необходимое, так и достаточное условия на Δt наиболее широкие, таково:

$$\tau_{\mathrm{opt}} = \begin{cases} \dfrac{d}{M^2 - 1} & \text{при} \quad \dfrac{2}{\theta_h} \le M^2 - 1, \quad |M| > 1, \\ \dfrac{h}{2c_*} = \dfrac{1}{2}d\theta_h & \text{при} \quad \max\{M^2 - 1, 0\} \le \dfrac{2}{\theta_h} \le 2 - M^2, \\ \dfrac{d}{2 - M^2} & \text{при} \quad \dfrac{2}{\theta_h} \ge 2 - M^2. \end{cases} \tag{45}$$

Обратим внимание на то, что τ_{opt} в двух из трех указанных случаев *не зависит от* h, что принципиально отличается от предыдущей формулы (11) для τ; подобное относится и к оценкам (43), а также имеет место ниже и в случае областей Ω_{II}–Ω_{IV}. В оставшемся третьем случае τ_{opt} совпадает с (11) при $\alpha = 0.5$ и не зависит от M. Расчеты в [25] были выполнены с параметрами, попадающими в последний случай и в основном с таким τ_{opt}, при малых числах Маха. Для них $\Delta t_{\mathrm{nec}}^{(0)} \approx 4d$ в формуле (42), что достаточно хорошо согласуется с Δt, найденным экспериментально в [25]. Подчеркнем, что до сих пор никаких формул типа (42) для выбора Δt для схем на разнесенных или неразнесенных сетках с регуляризацией при $\mu_{\mathrm{art}} = 0$ в литературе предложено не было (исключая [26] при $M = 0$).

Отметим, что при $2/\theta_h \le M^2 - 1$ и $|M| \to 1 + 0$ имеем $\tau_{\mathrm{opt}} \to +\infty$; это является признаком того, что данная регуляризация при таких параметрах едва ли удовлетворительна. Подобное наблюдается при $|M| \to 1$ или $|M| \to \sqrt{2}$ и в аналогичных формулах ниже.

Замечание 4. В теореме 5 необходимое условие (40) в Ω_{I}

$$\Delta t \le \min\left\{\frac{h^2}{c_*^2(d+\tau)}, 4\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{d}\right)^{-1}\right\}$$

не очень существенно отличается от (42). Однако оно приводит к другой формуле для оптимального значения τ, которая представляется менее адекватной:

$$\tilde{\tau}_{\mathrm{opt}} = \begin{cases} \dfrac{d}{M^2-1} & \text{при} \quad \dfrac{2}{\theta_h} \le \sqrt{M^2-1}, \quad |M| > 1, \\ \dfrac{h^2}{4\nu_{\mathrm{ph}}} = \dfrac{1}{4}d\theta_h^2 & \text{при} \quad \sqrt{\max\{M^2-1, 0\}} \le \dfrac{2}{\theta_h} \le \sqrt{2-M^2}, \\ \dfrac{d}{2-M^2} & \text{при} \quad \dfrac{2}{\theta_h} \ge \sqrt{2-M^2}. \end{cases}$$

Для сравнения отметим, что в Ω_{I} при $M = 0$ получаем

$$\tau_{\mathrm{opt}} = \max\left\{\frac{h}{2c_*}, \frac{d}{2}\right\}, \quad \tilde{\tau}_{\mathrm{opt}} = \max\left\{\frac{h^2}{4\nu_{\mathrm{ph}}}, \frac{d}{2}\right\}, \quad \tau_{\mathrm{opt,cr}} = d,$$

где значение $\tau_{\mathrm{opt,cr}} = d$ получено на основе критерия (24) (см. [26]).

В области Ω_{II}, где $1 + \tau^{-1}d \le M^2 \le 2 - \tau^{-1}d$ (здесь $0 < \tau^{-1}d \le 0.5$, а $1 < M^2 < 2$), достаточное условие (41) таково:

$$\Delta t \le \Delta t_{\mathrm{suf}} = \frac{2h^2}{c_*^2\left[|M| + \left(\dfrac{d}{\tau}+1\right)\dfrac{1}{|M|}\right]^2 \tau + \left(\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{\tau}\right)h^2},$$

и оно приводит к следующему оптимальному значению τ:

$$\tau_{\mathrm{opt}} = \begin{cases} \dfrac{d}{M^2+1}\sqrt{1+M^2\theta_h^2} & \text{при} \quad \dfrac{M^2+1}{\sqrt{1+M^2\theta_h^2}} \le \min\{M^2-1, 2-M^2\}, \\ \dfrac{d}{\min\{M^2-1, 2-M^2\}} & \text{иначе.} \end{cases}$$

В области Ω_{III}, где $\max\{\tau^{-1}d + 1, 2 - \tau^{-1}d\} \le M^2$ (здесь $M^2 \ge 3/2$), достаточное условие (41) имеет вид

$$\Delta t \le \Delta t_{\mathrm{suf}} = \frac{2h^2}{c_*^2\left[|M| + \left(\dfrac{d}{\tau}+1\right)\dfrac{1}{|M|}\right]^2 \tau + \left[\dfrac{1}{d}(M^2-1)^2 + \dfrac{1}{\tau}(M^2+1)\right]h^2}$$

и приводит к следующему оптимальному значению τ:

$$\tau_{\text{opt}} = \begin{cases} \dfrac{d}{2 - M^2} & \text{при} \quad r(M, \theta_h) \le 2 - M^2, \quad M^2 < 2, \\ \dfrac{d}{r(M, \theta_h)} & \text{при} \quad \max\{2 - M^2, 0\} \le r(M, \theta_h) \le M^2 - 1, \\ \dfrac{d}{M^2 - 1} & \text{при} \quad r(M, \theta_h) \ge M^2 - 1, \end{cases}$$

где $r(M, \theta_h) := (M^2 + 1)/\sqrt{1 + (M^2 + 1)M^2\theta_h^2}$.

В области Ω_{IV}, где $2 - \tau^{-1}d \le M^2 \le \tau^{-1}d + 1$ (здесь $\tau^{-1}d > 0.5$), достаточное условие (41) таково:

$$\Delta t \le \Delta t_{\text{suf}} = \frac{2h^2}{4c_*^2(d + \tau) + \left[\dfrac{1}{d}(M^2 - 1)^2 + \dfrac{1}{\tau}(M^2 + 1)\right]h^2},$$

и оно приводит к следующему оптимальному значению τ:

$$\tau_{\text{opt}} = \begin{cases} \dfrac{d}{\max\{2 - M^2, M^2 - 1\}} & \text{при} \quad \dfrac{2}{\theta_h} \le \sqrt{M^2 + 1}\max\{2 - M^2, M^2 - 1\}, \\ \sqrt{M^2 + 1}\dfrac{h}{2c_*} & \text{иначе.} \end{cases}$$

В случае $M^2 \le 1 - \varepsilon$ с $0 < \varepsilon < 1$ справедливы аналогичные (43), (44) оценки

$$\frac{1}{4}\min\{d, \tau\} \le \Delta t_{\text{suf}}^{(0)} \le \frac{2}{\varepsilon^2}\min\{d, \tau\} \quad \text{при} \quad h^2 \ge 4c_*^2 d\tau,$$

$$\frac{h^2}{8c_*^2(d + \tau)} \le \Delta t_{\text{suf}}^{(0)} \le \frac{h^2}{2\varepsilon^2 c_*^2(d + \tau)} \quad \text{при} \quad h^2 \le 4c_*^2 d\tau.$$

При $M = 0$ в Ω_{IV} получаем $\tau_{\text{opt}} = \min\{h/(2c_*), d/2\}$ и по-прежнему $\tau_{\text{opt,cr}} = d$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. 2-е изд. М.: Физматлит, 2012.
2. *LeVeque R.J.* Finite volume methods for hyperbolic problems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
3. *Wesseling P.* Principles of computational fluid dynamics. Berlin: Springer, 2009.
4. *Abgrall R., Shu C.-W.*, eds. Handbook of numerical methods for hyperbolic problems: basic and fundamental issues. Handbook of Numerical Analysis. V. 17. Amsterdam: North Holland, 2016.
5. *Четверушкин Б.Н.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
6. *Елизарова Т.Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
7. *Шеретов Ю.В.* Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2009.
8. *Елизарова Т.Г., Широков И.А.* Регуляризованные уравнения и примеры их использования при моделировании газодинамических течений. М.: МАКС Пресс, 2017.
9. *Булатов О.В., Елизарова Т.Г.* Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах // Ж. вычисл. матем. матем. физ. 2011. Т. 51. № 1. С. 170–184.
10. *Balashov V., Zlotnik A., Savenkov E.* Analysis of a regularized model for the isothermal two-component mixture with the diffuse interface // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2017. V. 32. № 6. P. 347–358.
11. *Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Истомина М.А.* Гидродинамические аспекты формирования спирально-вихревых структур во вращающихся газовых дисках // Астрономический ж. 2018. Т. 95. № 1. С. 11–21.
12. *Balashov V., Zlotnik A.* An energy dissipative spatial discretization for the regularized compressible Navier-Stokes-Cahn-Hilliard system of equations // Math. Model. Anal. 2020. V. 25. № 1. P. 110–129.

13. *Сухомозгий А.А., Шеретов Ю.В.* Анализ устойчивости одной разностной схемы решения уравнений Сен–Венана в теории мелкой воды // В сб.: Прилож. функц. анализа в теории приближений. Тверь: ТвГУ. 2013. С. 48–60.
14. *Zlotnik A., Lomonosov T.* On conditions for weak conservativeness of regularized explicit finite-difference schemes for 1D barotropic gas dynamics equations // In: Differential and Difference Equations with Applications. Springer Proc. in Math. and Stat. 2018. V. 230. P. 635–647.
15. *Злотник А.А., Ломоносов Т.А.* Условия L^2-диссипативности линеаризованных явных разностных схем с регуляризацией для уравнений 1D баротропной газовой динамики // Ж. вычисл. матем. матем. физ. 2019. Т. 59. № 3. С. 481–493.
16. *Zlotnik A.* On conditions for L^2-dissipativity of an explicit finite-difference scheme for linearized 2D and 3D barotropic gas dynamics system of equations with regularizations // Symmetry. 2021. V. 13. № 11. Article 2184. P. 1–17.
17. *Попов И.В., Фрязинов И.В.* Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики. М.: Красанд, 2015.
18. *Guermond J.-L., Popov B., Tomov V.* Entropy–viscosity method for the single material Euler equations in Lagrangian frame // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 2016. V. 300. P. 402–426.
19. *Feireisl E., Lukáčová-Medvidová M., Mizerová H.* A finite volume scheme for the Euler system inspired by the two velocities approach // Numer. Math. 2020. V. 144. № 1. P. 89–132.
20. *Dolejší V., Svärd M.* Numerical study of two models for viscous compressible fluid flows // J. Comput. Phys. 2021. V. 427. Article 110068. P. 1–26.
21. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
22. *Van der Heul D.R., Vuik C., Wesseling P.* Stability analysis of segregated solution methods for compressible flow // Appl. Num. Math. 2001. V. 38. P. 257–274.
23. *Bauer A.L., Loubere R., Wendroff B.* On stability of staggered schemes // SIAM J. Numer. Anal. 2008. V. 46. № 2. P. 996–1011.
24. *Konangi S., Palakurthi N.K., Ghia U.* Von Neumann stability analysis of first-order accurate discretization schemes for one-dimensional (1D) and two-dimensional (2D) fluid flow equations // Comput. Math. Appl. 2018. V. 75. P. 643–665.
25. *Balashov V., Zlotnik A.* An energy dissipative semi-discrete finite-difference method on staggered meshes for the 3D compressible isothermal Navier–Stokes–Cahn–Hilliard equations // J. Comput. Dynamics. 2020. V. 7. № 2. P. 291–312.
26. *Злотник А.А., Ломоносов Т.А.* L^2-диссипативность разностных схем для регуляризованных 1D баротропных уравнений движения газа при малых числах Маха // Матем. моделирование. 2021. Т. 33. № 5. С. 16–34.
27. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
28. *Ломоносов Т.А.* Критерии L^2-диссипативности линеаризованных явных разностных схем для регуляризации одномерных уравнений газовой динамики // Пробл. матем. анализа. 2019. № 101. С. 97–102.
29. *Злотник А.А.* О параболичности квазигидродинамической системы уравнений и устойчивости малых возмущений для нее // Матем. заметки. 2008. Т. 83. № 5. С. 667–682.
30. *Злотник А.А.* Пространственная дискретизация одномерной баротропной квазигазодинамической системы уравнений и уравнение энергетического баланса // Матем. моделирование. 2012. Т. 24. № 10. С. 51–64.