ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 12, с. 2105–2111

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 531.36

О ПРИБЛИЖЕНИИ ДВУМЯ ШАРАМИ ТВЕРДОГО ТЕЛА, БЛИЗКОГО К ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОМУ[1)]

А. А. Буров[1, *], В. И. Никонов[1, **]

[1] 119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: jtm@narod.ru

**e-mail: nikon_v@list.ru

Поступила в редакцию 22.05.2022 г.
Переработанный вариант 27.06.2022 г.
Принята к публикации 04.08.2022 г.

Рассматривается твердое тело, близкое к динамически симметричному. Исследуется вопрос о том, как приблизить это тело системой из двух однородных шаров, чтобы для исходного тела и его приближения совпали бы компоненты тензора Эйлера–Пуансо вплоть до третьего порядка, а моменты инерции тела были бы хорошо приближены моментами инерции системы из двух шаров. В качестве примера рассмотрены астероиды (1620) Географ и (25143) Итокава. Библ. 40. Табл. 1.

Ключевые слова: приближение поля притяжения, малые небесные тела, астероиды, массово-инерционные характеристики, тензоры инерции старших порядков.

DOI: 10.31857/S0044466922120055

Приближение потенциала притяжения динамически симметричного тела потенциалом притяжения пары точек представляет интерес благодаря тому, что задача о движении точки в поле двух неподвижных притягивающих центров вполне интегрируема. Идея приближения поля притяжения динамически симметричного твердого тела полем притяжения двух массивных точек восходит к работам М.Д. Кислика [1], [2], Е.П. Аксенова, Е.А. Гребеникова и В.Г. Демина [3], [4], J.P. Vinti [5] (см. также [6]–[9]). Было получено правило, позволяющее вычислять для такого приближения расстояния между такими точками, а также из массы. В частности, было установлено, что в зависимости от распределения масс тела концы возникающей в рамках такого рассмотрения гантели, могут оказаться разнесенными в комплексную область, а сосредоточенные в них массы могут оказаться комплексными.

Интегрирование уравнений движения точки в поле притяжения двух притягивающих центров методом разделения переменных выполнено Л.Эйлером [10]. Систематическое исследование зависимости движений от параметров задачи было выполнено В.М. Алексеевым [11]. Исследованию различных аспектов движения точки в поле притяжения равномерно вращающейся или прецессирующей гантели посвящен ряд работ В.В. Белецкого и А.В. Родникова [12]–[14].

1. ОСНОВОПОЛАГАЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Пусть $\mathcal{B}$ – динамически симметричное твердое тело массой m с центром масс в точке O, осевой и экваториальный центральные моменты инерции которого равны I_a и I_e соответственно. Пусть $Oxyz$ – связанная с этим телом система координат, ось Oz которой направлена вдоль оси динамической симметрии. Как известно (см., например, [8]), разложение в ряд потенциала притяжения такого тела представимо в виде

$$U = -G\frac{m}{r}\left(1 + \sum_{k\geq 2} J_k \left(\frac{R}{r}\right)^k P_k(\sin\varphi)\right), \tag{1.1}$$

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта 22-21-00297).

где G — гравитационная постоянная, m — масса тела, R — характерный размер тела, например, радиус шара, объем которого совпадает с объемом тела, r — расстояние от центра масс тела до изучаемой точки, φ — "географическая широта" изучаемой точки (отстоящей от центра масс тела на расстоянии r), J_k — безразмерные постоянные, $P_k(\cdot)$ — многочлены Лежандра.

Пусть теперь $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ — однородные шары массами m_1 и m_2 и радиусами r_1 и r_2, центры которых во введенной системе координат задаются как $C_1 = (0,0,c_1)$ и $C_2 = (0,0,c_2)$. Так как поле притяжения однородного шара вне него совпадает с полем притяжения массивной точки, расположенной в его центре и имеющей ту же массу, что и сам шар, то для системы двух шаров разложение, аналогичное (1.1), имеет вид

$$U = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r}\left(1 + \sum_{k\ge 1}\frac{\gamma_k}{r^k}P_k(\sin\varphi)\right), \quad \gamma_k = \frac{m_1c_1^k + m_2c_2^k}{m_1 + m_2}. \tag{1.2}$$

Следуя перечисленным выше работам, потребуем совпадения первых четырех коэффициентов в разложениях (1.1) и (1.2). Соответствующие равенства примут вид:

$$m_1 + m_2 = m \tag{1.3}$$

(уравнение на совпадение масс);

$$m_1c_1 + m_2c_2 = 0 \tag{1.4}$$

(условие совпадения центров масс);

$$m_1c_1^2 + m_2c_2^2 = mJ_2R^2, \tag{1.5}$$

$$m_1c_1^3 + m_2c_2^3 = mJ_3R^3 \tag{1.6}$$

(условия совпадения коэффициентов во втором и третьем слагаемых разложения потенциала).

Решение системы (1.3)–(1.6) имеет вид (ср., например, [8], [9])

$$c_1 = \left(\frac{J_3}{2J_2} + \sqrt{D}\right)\frac{R}{2}, \quad c_2 = \left(\frac{J_3}{2J_2} - \sqrt{D}\right)\frac{R}{2}, \quad D = \left(\frac{J_3}{2J_2}\right)^2 + 4J_2, \tag{1.7}$$

$$m_1 = \frac{mc_2}{c_2 - c_1} = \frac{m}{2\sqrt{D}}\left(\sqrt{D} - \frac{J_3}{2J_2}\right), \quad m_2 = -\frac{mc_1}{c_2 - c_1} = \frac{m}{2\sqrt{D}}\left(\sqrt{D} + \frac{J_3}{2J_2}\right). \tag{1.8}$$

Причем в зависимости от знака дискриминанта D найденные решения могут быть либо вещественными, либо комплексными. В рассмотренных в дальнейшем примерах дискриминант D оказался положительным, и поэтому детали теории для случая отрицательного D специально обсуждаться не будут.

Заметим, что система, образованная двумя массами, сосредоточенными в точках, неудовлетворительно приближает распределение масс реальных тел: для нее осевой момент инерции равен нулю. В случае, когда вместо точек рассматриваются однородные шары, это уже не так. Поэтому дополнительно потребуем совпадения осевых моментов рассматриваемого тела и системы из двух шаров:

$$\frac{2}{5}\left(m_1r_1^2 + m_2r_2^2\right) = I_a. \tag{1.9}$$

Остается подставить в соотношение (1.9) выражения для масс из (1.8) и каким-либо образом дополнить соотношение (1.9), которое будет рассматриваться как уравнение на радиусы шаров. Тому, как это можно сделать, посвятим следующий раздел.

Замечание 1. Если осевой момент инерции I_a системы двух шаров определен, то экваториальный момент инерции I_e определяется из соотношения

$$I_e = m_1c_1^2 + m_2c_2^2 + I_a. \tag{1.10}$$

Заметим также, что в силу (1.9) и (1.10) получаем

$$I_e - I_a = mJ_2R^2. \tag{1.11}$$

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАДИУСОВ ШАРОВ, ПРИБЛИЖАЮЩИХ ТЕЛО

Согласно (1.7) расстояние между центрами шаров определяется из соотношения

$$|C_1C_2| = |c_1 - c_2| = \left|\sqrt{D}\right| R. \tag{2.1}$$

В дальнейшем, если не сказано противоположное, ограничимся рассмотрением случая $D > 0$. Естественно предположить, что шары не пересекаются, т.е. выполнено условие

$$r_1 + r_2 \le \sqrt{D}R. \tag{2.2}$$

Естественно рассматривать решение относительно (r_1, r_2) системы, образованной уравнением (1.9) и неравенством (2.2).

Ограничимся рассмотрением случая, когда шары касаются. В этом случае неравенство (2.2) обращается в равенство, из которого можно выразить одну из неизвестных, например,

$$r_1 = \sqrt{D}R - r_2. \tag{2.3}$$

Подстановка этого выражения в уравнение (1.9) дает

$$\frac{2}{5}\left(m_1\left(\sqrt{D}R - r_2\right)^2 + m_2r_2^2\right) = I_a. \tag{2.4}$$

Приводя подобные члены, имеем

$$(m_1 + m_2)r_2^2 - 2m_1\sqrt{D}Rr_2 + m_1DR^2 - \frac{5}{2}I_a = 0, \tag{2.5}$$

откуда после учета соотношений (1.7) и (1.8) имеем

$$r_2^{\pm} = \frac{1}{m}\left(\frac{m}{2}\left(\sqrt{D} - \frac{J_3}{2J_2}\right)R \pm \sqrt{D_1}\right), \quad D_1 = m^2R^2\left(\frac{5}{2}\frac{I_a}{mR^2} - J_2\right). \tag{2.6}$$

Радиус для первого шара находится из соотношения (2.3), имеем

$$r_1^{\pm} = \frac{m_2\sqrt{D}R \mp \sqrt{D_1}}{m}\frac{1}{m}\left(\frac{m}{2}\left(\sqrt{D} + \frac{J_3}{2J_2}\right)R \mp \sqrt{D_1}\right).$$

Может быть предложен и иной подход к вычислению радиусов шаров. Будем считать, что поверхность тела $\mathcal{B}$ задана триангуляционной сеткой $\mathcal{G}$ с вершинами $P_\ell \in \mathcal{G}$. В частности, такими сетками, построенными в результате анализа данных фотометрии, приближают поверхности малых небесных тел. Так как центры шаров определены однозначно, то можно выделить из сетки множество вершин $\mathcal{G}_1$, которые ближе к центру C_1, и множество вершин $\mathcal{G}_2$, которые ближе к центру C_2. Ясно, что $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$, и в общем случае множества $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$, содержащие n_1 и n_2 вершин соответственно, не пересекаются.

Найдем расстояния от центра C_1 до каждой из точек множества $\mathcal{G}_1$ и от центра C_2 до каждой из точек множества $\mathcal{G}_2$. Вычисленные расстояния составляют множества $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ соответственно. Для каждого из множеств $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ найдем средние значения $\overline{r}_1$ и $\overline{r}_2$ таких расстояний. Будем считать, что величины $\overline{r}_1$ и $\overline{r}_2$ приближают радиусы шаров $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$.

Замечание 2. Наряду со средними значениями $\overline{r}_1$ и $\overline{r}_2$ в качестве приближений радиусов шаров $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ можно воспользоваться медианами $\hat{r}_1$ и $\hat{r}_2$, вычисленными по множествам $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ соответственно.

Замечание 3. В [15], см. также [16], [17], в рамках т.н. метода K-средних, радиусы $\tilde{r}_1$ и $\tilde{r}_2$ в качестве приближений радиусов шаров $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ определялись из итерационной процедуры. Прежде всего по триангулированной поверхности, приближающей поверхность небесного тела, строилось его разбиение на множество тетраэдров с общей вершиной в центре масс. Для каждого из построенных таким образом тетраэдров определялся его центроид. Далее, на первом шаге итераций за концы гантели принимались две точки тела, наиболее удаленные друг от друга. На следующем шаге множество центроидов разбивалось на два подмножества, в зависимости от того, к какой из концевых точек оказывался ближе тот или иной центроид и вычислялись барицентры каждого из построенных подмножеств. Эти барицентры принимались за концы гантели для следующей итерации, и процедура повторялась. Останов процедуры происходил после того, как расстояния между соответствующими концами гантели на текущем и предыдущем шаге оказывались меньше наперед заданного значения точности. Для подмножеств, построенных в результате последней итерации, определялись объемы отвечающих им многогранников. Наконец, вычислялись величины $\tilde{r}_1$ и $\tilde{r}_2$ – радиусы шаров, отвечающих объемам указанных многогранников.

Замечание 4. Величины $\overline{r}_1$ и $\overline{r}_2$, $\hat{r}_1$ и $\hat{r}_2$, $\tilde{r}_1$ и $\tilde{r}_2$ позволяют оценить плотности ρ_1 и ρ_2 шаров $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$, которые предполагаются однородными:

$$\overline{\rho}_k = \frac{3m_k}{4\pi\overline{r}_k^3}, \quad \hat{\rho}_k = \frac{3m_k}{4\pi\hat{r}_k^3}, \quad \tilde{\rho}_k = \frac{3m_k}{4\pi\tilde{r}_k^3}, \quad k = 1, 2.$$

3. ОСРЕДНЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ ТЕЛА, БЛИЗКОГО К ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОМУ

Гравитационный потенциал твердого тела в общем виде может быть представлен как (см. [18], ср. [19])

$$U = -G\sum_{a+b+c=d} I_{abc}\frac{(-1)^d}{a!b!c!}\frac{\partial^d}{\partial x^a\partial y^b\partial z^c}\left(\frac{1}{r}\right), \tag{3.1}$$

где a, b, c – целые числа, $d = 0,1,2$, и I_{abc} – компоненты тензора Эйлера–Пуансо порядка d (см., например, [20]–[26]). В общем случае соотношение (3.1) не может быть представлено в виде (1.1). Но в случае, когда тело близко к динамически симметричному, вместо потенциала (3.1) можно рассмотреть потенциал, полученный из (3.1) в результате следующей процедуры осреднения. Пусть

$$x = r\cos\varphi\cos\theta, \quad y = r\cos\varphi\sin\theta, \quad z = r\sin\varphi. \tag{3.2}$$

Тогда осредненный по углу θ потенциал

$$\bar{U} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U\big|_{(3.2)}\,d\theta = -G\frac{m}{r}\left(1 + \sum_{k=2,3,4} J_k\left(\frac{R}{r}\right)^k P_k(\sin\varphi) + \ldots\right), \tag{3.3}$$

примет вид (1.1). Коэффициенты $\mathbf{J}_2$ и $\mathbf{J}_3$ в выражении (3.3) определяются из соотношений

$$J_2 = \frac{1}{2}\frac{2I_{002} - I_{020} - I_{200}}{I_{000}R^2}, \tag{3.4}$$

$$J_3 = \frac{1}{2}\frac{2I_{003} - 3I_{021} - 3I_{201}}{I_{000}R^3}. \tag{3.5}$$

Для тела, вытянутого вдоль оси Oz, величина $J_2 > 0$, и $I_{002} > (I_{200} + I_{020})/2 - I_e$, что влечет положительность величины D из (1.7). Принимая во внимание соотношения (3.4) и (3.5) и $I_a = I_{200} + I_{020}$, величина D_1 из (2.6) принимает вид

$$D_1 = m^2R^2\left(\frac{5}{2}\frac{I_a}{mR^2} - J_2\right) = m\left(3\left(I_{200} + I_{020}\right) - I_{002}\right) \tag{3.6}$$

и является положительной, в случае, если $I_{002} < 6I_e$. Таким образом, при $I_e < I_{002} < 6I_e$ соотношение (2.6) позволяет определить две пары вещественных радиусов концевых шаров гантели.

Замечание 5. Указанное осреднение приводит к потенциалу динамически симметричного тела с осью динамический симметрии Oz. Циклическая перестановка величин x, y, z, а также индексов a, b, c коэффициентов I_{abc} с последующим осреднением по θ приводит к случаям, когда ось динамической симметрии – это ось Ox, а затем ось Oy.

Замечание 6. Осреднение становится осмысленным, если рассматриваемое тело мало отличается от динамически симметричного, но в строгом смысле не является таковым.

Замечание 7. [“let’s cut corners” (англоязычная идиома “to cut corners” ≈ “делать что-либо быстро, но, возможно, в ущерб точности” [28])]. В публикации [27] предлагается “не срезать углы” при вычислении приближенного значения потенциала притяжения, что даже отражено в названии публикации. В настоящей работе мы, наоборот, “срезаем углы”, чтобы получить выражение, пригодное для применения описываемого подхода.

4. ПРИБЛИЖЕНИЯ МАЛЫХ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

Осуществим описанные выше вычисления для астероидов (1620) Географ [29], [30] и (25143) Итокава [31], [32] (см., также, [33]) в предположении, что их поверхности моделируются в рамках полиэдрального представления, а плотность заключенного в них вещества постоянна. Так, астероид (1620) Географ представляется многогранником с 4092 треугольными гранями и 2048 вершинами, а астероид (25143) Итокава – многогранник с 3688 треугольными гранями и 1846 вершинами.

Для этого нам понадобятся следующие данные, касающиеся изучаемых тел: массы m_k, средние значения плотностей ρ_k и главные моменты инерции $\mathcal{I}_i\big|_k/m_k$, $i = 1,2,3$, отнесенные к массам. Эти данные собраны в табл. 1.

Рассматриваемые астероиды можно приближенно рассматривать как динамически симметричные тела с осевым моментом инерции $I_a = \mathcal{I}_1$ и экваториальным моментом инерции $I_e = (\mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3)/2$, так как они обладают ярко выраженной вытянутой формой, а величины $\delta_k = \left.\dfrac{|\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_3|}{I_e}\right|_k$, служащие мерой динамической асимметрии тела, невелики (см., например, данные в приведенной ниже табл. 1).

Опираясь на вычисленные ранее (см. [34]) значения компонент тензора Эйлера-Пуансо вплоть до четвертого порядка, из соотношений (3.4) и (3.5) находим величины J_i, $i = 2,3,4$,

Таблица 1. Параметры изучаемых астероидов и эквивалентных им гантелеобразных тел

Параметры	1620 Географ	25143 Итокава
m, (кг)	1.7736×10^{13}	4.6495×10^{10}
ρ, (кг/м^3)	2000	1950
$\mathcal{I}_1/m$, (м^2)	3.667×10^5	7.78×10^3
$\mathcal{I}_2/m$, (м^2)	1.381×10^6	2.291×10^4
$\mathcal{I}_3/m$, (м^2)	1.366×10^6	2.395×10^4
δ	0.0399	0.1338
I_a/m, (м^2)	3.667×10^5	7.78×10^3
I_e/m, (м^2)	1.374×10^6	2.343×10^3
R, (м)	1284	178.6
J_2R^2, (м^2)	1.007×10^6	1.565×10^4
J_3R^3, (м^3)	2.779×10^8	-2.406×10^5
J_4R^4, (м^4)	2.276×10^{12}	4.586×10^8
m_1, (кг)	8.263×10^{12}	2.396×10^{10}
m_2, (кг)	9.477×10^{12}	2.253×10^{10}
c_1, (м)	1074.91	121.31
c_2, (м)	–936.93	–129.01
ℓ (м)	2011.84	250.33
r_1^+, (м)	–	59.676
r_1^-, (м)	–	182.963
$\bar{r}_1$, (м)	1008.008	148.266
$\hat{r}_1$, (м)	953.364	148.187
r_2^+, (м)	–	190.651
r_2^-, (м)	–	67.364
$\bar{r}_2$, (м)	1055.201	144.590
$\hat{r}_2$, (м)	1032.485	143.622

см. табл. 1. Далее, согласно формулам (1.8), (1.7), определяем координаты концов гантели и массы на ее концах, см. табл. 1.

Замечание 8. Согласно (3.6), для астероида (1620) Географ величина $D_1/m \approx -0.09 < 0$ отрицательная, и, как следствие, определить вещественные значения радиусов $r_1^{\pm}$ и $r_2^{\pm}$ невозможно. Получающиеся их комплексные значения $r_1^{\pm} = 1074.91 \mp 300.73i$ и $r_2^{\pm} = 936.93 \pm 300.73i$ требуют дальнейшего осмысления.

Замечание 9. Вычисления показывают, что в случае, когда в качестве приближений радиусов шаров $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ принимаются величины $\overline{r_1}$ и $\overline{r_2}$, то для обоих астероидов имеет место пересечение шаров $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$.

Замечание 10. Радиусам $\hat{r}_1$ и $\hat{r}_2$ для астероида (1620) Географ отвечают непересекающиеся шары $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$, а для астероида (25143) Итокава шары $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ пересекаются.

В случае, когда в тех или иных предположениях шары пересекаются, возможно, применимы результаты, изложенные в [35]. Это обстоятельство требует дальнейшего исследования.

Замечание 11. Одним из возможных способов проверки качества представления астероида с помощью гантелеобразного тела является сравнение точек либрации, найденных с помощью точного выражения для потенциала и с помощью его гантелеобразного приближения. Так, точки либрации, в частности для астероидов (1620) Географ и (25143) Итокава, изучались, например, в [36], [37].

Замечание 12. В качестве примеров контактно-двойных малых небесных объектов, которые могут быть представлены в виде двух шаров, следует указать такие кометы, как 67P Чурюмова–Герасименко, Галлея, Туттля, Борелли, Хартли (см., например, [38]), а также транснептуновый объект 2014 MU_{69} Аррокот (см., например, [39], [40]).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Естественно, что рассматриваемое приближение, применяемое для того, чтобы была возможность представить движение космических аппаратов около изучаемых тел в явном виде, сильно загрубляет задачу. Уточнение потенциала, опирающееся на использование не двух, а трех или четырех шаров, несомненно улучшает качество приближения, но происходит это за счет утраты возможности аналитического интегрирования уравнений движения космического аппарата в окрестности рассматриваемых вращающихся гравитирующих тел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кислик М.Д.* Движение искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли // Искусственные спутники Земли. 1960. Вып. 4. С. 3–17.
2. *Кислик М.Д.* Анализ интегралов уравнений движения искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли // Искусственные спутники Земли. 1963. Вып. 13. С. 23–52.
3. *Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г.* Обобщенная задача двух неподвижных центров и ее применение в теории движения искусственных спутников Земли // Астрономический ж. 1963. Т. 40. Вып. 2. С. 363–372.
4. *Демин В.Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. М.: Наука, 1968.
5. *Vinti J.P.* Theory of an accurate intermediary orbit for satellite astronomy // J. Res. Nat. Bur. Standards. 1961. V. B65. № 3. P. 169–201.
6. *Брауэр Д., Клеменс Дж.* Методы небесной механики. Перевод с английского В.К. Абалакина. М.: Мир, 1964.
7. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1964.
8. *Белецкий В.В.* Очерки о движении космических тел. М.: Наука, 1972.
9. *Демин В.Г., Косенко И.И., Красильников П.С., Фурта С.Д.* Избранные задачи небесной механики. Ижевск: РХД, 1999.
10. *Euler L.* Problème. Un corps étant attiré en raison réciproque quarrée des distances vers deux points fixes donnés trouver les cas où la courbe décrite par ce corps sera algébrique // Mémoires de l'Acad. de Berlin. 1760. P. 228–249.
11. *Алексеев В.М.* Обобщенная пространственная задача двух неподвижных центров: Классификация движений // Бюллетень ИТА. 1965. Т. 10. № 4(117). С. 241–271.

12. *Белецкий В.В.* Обобщенная ограниченная круговая задача трех тел как модель динамики двойных астероидов // Космические исследования. 2007. Т. 45. № 6. С. 435–442.
13. *Белецкий В.В., Родников А.В.* Об устойчивости треугольных точек либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел // Космические исследования. 2008. Т. 46. № 1. С. 42–50.
14. *Родников А.В.* Треугольные точки либрации обобщенной ограниченной круговой задачи трех тел в случае комплексно-сопряженных масс притягивающих центров // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. Вып. 2. С. 213–222.
15. *Буров А.А., Герман А.Д., Распопова Е.А., Никонов В.И.* О применении k-средних для определения распределения масс гантелеобразных небесных тел // Нелинейная динамика. 2018. Т. 14. № 1. С. 45–52.
16. *Буров А.А., Герман А.Д., Никонов В.И.* Использование метода K-средних для агрегирования масс продолговатых небесных тел // Космические исследования. 2019. Т. 57. № 4. С. 283–289.
17. *Burov A.A., Guerman A.D., Nikonova E.A., Nikonov V. I.* Approximation for attraction field of irregular celestial bodies using four massive points // Acta Astronautica. 2019. V. 157. P. 225–232.
18. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. школа, 1970.
19. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968.
20. *Soler T.* A new matrix development of the potential and attraction at exterior points as a function of the inertia tensors // Celestial mechanics. 1984. V. 32. № 3. P 257–296.
21. *Dobrovolskis A.R.* Inertia of Any Polyhedron // Icarus. 1996. V. 124. № 2. P. 698–704.
22. *Mirtich B.* Fast and Accurate Computation of Polyhedral Mass Properties // Journal of Graphics Tools. 1996. V. 1. № 2. P. 31–50.
23. *Буров А.А., Никонов В.И.* Вычисление потенциала притяжения астероида (433) Эрос с точностью до членов четвертого порядка // Докл. РАН. Физика, технические науки. 2020. Т. 492. № 1. С. 58–62.
24. *Burov A.A., Nikonov V.I.* Inertial characteristics of higher orders and dynamics in a proximity of a small celestial body // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2020. V. 16. № 2. P. 259–273.
25. *Буров А.А., Никонов В.И.* Чувствительность значений компонент тензоров Эйлера–Пуансо к выбору триангуляционной сетки поверхности тела // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 10. С. 1764–1776.
26. *Буров А.А., Никонова Е.А.* Производящая функция компонент тензора Эйлера–Пуансо // Докл. РАН. Физика, технические науки. 2021. Т. 498. С. 53–56.
27. *Werner R.A.* The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1994. V. 59. P. 253–278.
28. Cambridge Learner's Dictionary English-Russian. Cambridge: Cambridge University Press. 2011.
29. *Ostro S.J., Jurgens R.F., Rosema K.D. et al.* Radar observations of asteroid 1620 Geographos // Icarus. 1996. V. 121. № 1. P. 46–66.
30. *Hudson R.S., Ostro S.J.* Physical Model of Asteroid 1620 Geographos from Radar and Optical Data // Icarus. 1999. V. 140. № 2. P. 369–378.
31. *Abe S., Mukai T., Hirata N. et al.* Mass and local topography measurements of Itokawa by Hayabusa // Science. 2006. V. 312. № 5778. P. 1344–1347.
32. *Gaskell R., Saito J., Ishiguro M. et al.* Gaskell Itokawa Shape Model V1.0. HAY-A-AMICA-5-ITOKAWASHAPE-V1.0. NASA Planetary Data System, 2008.
33. *Lages J., Shepelyansky D.L., Shevchenko I.I.* Chaotic Zones around Rotating Small Bodies // Astronomical Journal. 2017. V. 153. № 6. ArtNo. 272.
34. *Никонов В.И.* Гравитационные поля малых небесных тел. М.: ООО Белый ветер, 2020.
35. *Буров А.А., Герман А.Д., Косенко И.И., Никонов В.И.* О притяжении гантелеобразных тел, представленных парой пересекающихся шаров // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13. № 2. С. 243–256.
36. *Wang X., Jiang Y., Gong Sh.* Analysis of the potential field and equilibrium points of irregular-shaped minor celestial bodies // Astrophysics and Space Science. 2014. V. 353. № 1. P. 105–121.
37. *Zeng X., Jiang F., Li J., Baoyin H.* Study on the connection between the rotating mass dipole and natural elongated bodies // Astrophysics and Space Science. 2015. V. 356. P. 29–42.
38. *Lages J., Shevchenko I.I., Rollin G.* Chaotic dynamics around cometary nuclei // Icarus. 2018. V. 307. P. 391–399.
39. *Stern S.A. et al.* Initial results from the New Horizons exploration of 2014 MU_{69}, a small Kuiper Belt object // Science. 2019. V. 364. № 6441. ArtNo. eaaw9771.
40. *Rollin G., Shevchenko I.I., Lages J.* Dynamical environments of MU_{69} and similar objects // Icarus. 2021. V. 357. ArtNo. 114178.