ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 12, с. 2026–2042

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 519.624.2

К ИНТЕГРИРОВАНИЮ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ С ЗАТУХАНИЕМ В МОНОГРАФИИ Н.Н. БОГОЛЮБОВА И Ю.А. МИТРОПОЛЬСКОГО “АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ”

© 2022 г. А. Ф. Курин[1, *]

[1] 394006 Воронеж, Университетская пл., 1, Воронежский гос. ун-т, физ. ф-т, Россия

*e-mail: afkurin@mail.ru

Поступила в редакцию 01.03.2021 г.
Переработанный вариант 23.06.2022 г.
Принята к публикации 04.08.2022 г.

Асимптотическим методом, изложенным в монографии, указанной в заглавии статьи, получены выражения, определяющие границы трех областей параметрического резонанса однородного уравнения Матье с затуханием. Формулы для границ второй и третьей областей, справедливость которых подтверждает также численное решение уравнения, существенно отличаются от известных, полученных в монографии. Показано, что само существование областей резонанса зависит от выбора порядков малости трех малых параметров задачи. Библ. 11. Фиг. 3.

Ключевые слова: уравнение Матье, асимптотический метод, параметрический резонанс.

DOI: 10.31857/S0044466922120109

ВВЕДЕНИЕ

В монографии [1], посвященной приближенным асимптотическим методам решения задач теории нелинейных колебаний, рассмотрено, в частности, уравнение Матье с затуханием, для которого на плоскости параметров уравнения вычислены границы трех областей параметрического резонанса (формулы (17.62)–(17.64) в [1]). При этом авторы ограничивались тем приближением асимптотического метода, в котором появляется та или иная область резонанса: указанные три формулы получены в первом, втором и третьем приближениях соответственно. Отметим, что в [1] отсутствуют какие-либо подробности вывода формул.

В настоящей работе уравнение Матье интегрируется подробно асимптотическим методом, принятым в монографии [1], сохранены также обозначения величин. Амплитуда и фаза колебаний имеет вид разложения по степеням малого параметра ε. Однако теперь предусмотрена возможность в полученных выражениях устанавливать порядок малости параметров, входящих в уравнение, поскольку, как показал анализ, для существования каждой области параметрических колебаний требуется своя комбинация порядков малости трех параметров. Справедливость полученных выражений для границ второй и третьей областей резонанса (формулы (38), (48) настоящей работы) подтверждается численным решением уравнения Матье с затуханием. Эти выражения не совпадают с формулами (17.63), (17.64) в [1]. Количественные результаты различаются существенно.

Правильность формул (38), (48) статьи подтверждается еще и тем, что вычисленные из этих формул границы для уравнения Матье с затуханием в другой часто используемой записи (см. разд. 5) совпали с границами, установленными ранее для такого уравнения в статье [2] известным асимптотическим методом усреднения для систем с многими быстрыми фазами [3], [4]. Заметим, что метод усреднения использовался также для уравнения Матье без затухания [4]–[6].

Далее, формулы для границ областей резонанса (38), (48) получаются и методом И.З. Штокало [7]. Дальнейшее развитие метода изложено в статье Ю.С. Колесова и В.В. Майорова [8]. Таким образом, в случае уравнения Матье три метода дают одинаковый результат.

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ

В обозначениях работы [1] запишем уравнение Матье с затуханием (см. (17.61) в [1])

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta\frac{dx}{dt} + \omega^2\left[1 - h\cos(\nu t)\right]x = 0. \tag{1}$$

Рассматриваются резонансы, когда близки частоты ω и $p\nu/q$. Здесь p и q — взаимно простые числа. Частоты связаны соотношением

$$\omega^2 = \left(\frac{p\nu}{q}\right)^2 + \varepsilon\Delta_1 + \varepsilon^2\Delta_2 + \varepsilon^3\Delta_3 + \cdots, \tag{2}$$

где ε — малый параметр. Малыми величинами являются также затухание

$$\delta = \varepsilon\delta_1 + \varepsilon^2\delta_2 + \varepsilon^3\delta_3 + \cdots \tag{3}$$

и параметр

$$h = \varepsilon h_1. \tag{4}$$

В отличие от [1] представление частотной расстройки и коэффициента затухания рядом по степеням ε позволяет выбирать порядок малости этих величин при анализе полученных формул.

Представим уравнение (1) в виде разложения по степеням малого параметра ε.

Для этого, следуя асимптотическому методу, изложенному в [1], с учетом (2)–(4) перепишем уравнение (1) в виде

$$\begin{gathered}\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{p\nu}{q}\right)^2 x = \varepsilon\left[\left(\frac{p\nu}{q}\right)^2 h_1\cos(\nu t)x - \Delta_1 x - \delta_1\frac{dx}{dt}\right] + \\ + \varepsilon^2\left[\Delta_1 h_1\cos(\nu t)x - \Delta_2 x - \delta_2\frac{dx}{dt}\right] + \varepsilon^3\left[\Delta_2 h_1\cos(\nu t)x - \Delta_3 x - \delta_3\frac{dx}{dt}\right] + \cdots = F.\end{gathered} \tag{5}$$

Согласно [1] решение ищем в виде ряда

$$x = a\cos\psi + \varepsilon u_1(a,t,\theta) + \varepsilon^2 u_2(a,t,\theta) + \varepsilon^3 u_3(a,t,\theta) + \cdots, \tag{6}$$

в котором

$$\psi = \frac{p\nu}{q}t + \theta \tag{7}$$

есть быстрая фаза, а медленные амплитуда a и фаза θ определяются из уравнений

$$\begin{gathered}\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a,\theta) + \varepsilon^2 A_2(a,\theta) + \varepsilon^3 A_3(a,\theta) + \cdots, \\ \frac{d\theta}{dt} = \varepsilon B_1(a,\theta) + \varepsilon^2 B_2(a,\theta) + \varepsilon^3 B_3(a,\theta) + \cdots.\end{gathered} \tag{8}$$

Функции $A_{1,2,3,\ldots}$, $B_{1,2,3,\ldots}$, $u_{1,2,3,\ldots}$ подлежат вычислению.

Представим правую и левую части в виде разложения по степеням ε. Здесь x — выражение (6). Вычислим производную

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt}\cos\psi - a\sin\psi\frac{d\psi}{dt} + \sum_{n=1}\varepsilon^n\left(\frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{\partial u_n}{\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial u_n}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt}\right) = \\ = \frac{da}{dt}\left(\cos\psi + \sum_{n=1}\varepsilon^n\frac{\partial u_n}{\partial a}\right) + \frac{d\theta}{dt}\left(-a\sin\psi + \sum_{n=1}\varepsilon^n\frac{\partial u_n}{\partial\theta}\right) - \frac{ap\nu}{q}\sin\psi + \sum_{n=1}\varepsilon^n\frac{\partial u_n}{\partial t},\end{gathered} \tag{9}$$

где da/dt и $d\theta/dt$ определяются формулами (8).

Подставляя выражения (6) и (9) в правую часть уравнения (5), получаем

$$
\begin{aligned}
F = {} & \varepsilon\left[a\left(\frac{p\nu}{q}\right)^2 h_1\cos(\nu t)\cos\psi - a\Delta_1\cos\psi + a\frac{p\nu}{q}\delta_1\sin\psi\right] + \\
& + \varepsilon^2\left[\left(\frac{p\nu}{q}\right)^2 h_1u_1\cos(\nu t) - \Delta_1u_1 - \delta_1\left(A_1\cos\psi - aB_1\sin\psi + \frac{\partial u_1}{\partial t}\right) + \right. \\
& \left. + ah_1\Delta_1\cos(\nu t)\cos\psi - a\Delta_2\cos\psi + a\frac{p\nu}{q}\delta_2\sin\psi\right] + \\
& + \varepsilon^3\left[\left(\frac{p\nu}{q}\right)^2 h_1u_2\cos(\nu t) - \Delta_1u_2 - \delta_1\left(A_2\cos\psi - aB_2\sin\psi + A_1\frac{\partial u_1}{\partial a} + \right.\right. \\
& \left. + B_1\frac{\partial u_1}{\partial\theta} + \frac{\partial u_2}{\partial t}\right) + h_1\Delta_1u_1\cos(\nu t) - \Delta_2u_1 - \delta_2\left(A_1\cos\psi - aB_1\sin\psi + \frac{\partial u_1}{\partial t}\right) + \\
& \left. + ah_1\Delta_2\cos(\nu t)\cos\psi - a\Delta_3\cos\psi + a\frac{p\nu}{q}\delta_3\sin\psi\right] + \cdots.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Вторую производную d^2x/dt^2 в левой части уравнения (5) получаем дифференцированием (9). При этом используем выражения (8), а также

$$
\begin{gathered}
\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \varepsilon^2A_1^2 + 2\varepsilon^3A_1A_2 + \cdots, \\
\frac{d^2a}{dt^2} = \varepsilon^2\left(A_1\frac{\partial A_1}{\partial a} + B_1\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right) + \varepsilon^3\left(A_1\frac{\partial A_2}{\partial a} + B_1\frac{\partial A_2}{\partial\theta} + A_2\frac{\partial A_1}{\partial a} + B_2\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right) + \cdots, \\
\frac{da}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon^2A_1B_1 + \varepsilon^3(A_1B_2 + A_2B_1) + \cdots, \\
\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \varepsilon^2B_1^2 + 2\varepsilon^3B_1B_2 + \cdots, \\
\frac{d^2\theta}{dt^2} = \varepsilon^2\left(A_1\frac{\partial B_1}{\partial a} + B_1\frac{\partial B_1}{\partial\theta}\right) + \varepsilon^3\left(A_1\frac{\partial B_2}{\partial a} + A_2\frac{\partial B_1}{\partial a} + B_1\frac{\partial B_2}{\partial\theta} + B_2\frac{\partial B_1}{\partial\theta}\right) + \cdots.
\end{gathered}
$$

После простых вычислений для левой части (5) получаем разложение

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{p\nu}{q}\right)^2 x = {} & \varepsilon\left[-2\frac{p\nu}{q}A_1\sin\psi - 2a\frac{p\nu}{q}B_1\cos\psi + \frac{\partial^2u_1}{\partial t^2} + \left(\frac{p\nu}{q}\right)^2u_1\right] + \\
& + \varepsilon^2\left[\left(A_1\frac{\partial A_1}{\partial a} + B_1\frac{\partial A_1}{\partial\theta} - aB_1^2 - 2a\frac{p\nu}{q}B_2\right)\cos\psi + \right. \\
& \left. + \left(-aA_1\frac{\partial B_1}{\partial a} - aB_1\frac{\partial B_1}{\partial\theta} - 2A_1B_1 - 2\frac{p\nu}{q}A_2\right)\sin\psi + 2A_1\frac{\partial^2u_1}{\partial a\partial t} + 2B_1\frac{\partial^2u_1}{\partial\theta\partial t} + \frac{\partial^2u_2}{\partial t^2} + \left(\frac{p\nu}{q}\right)^2u_2\right] + \\
& + \varepsilon^3\left[\left(A_1\frac{\partial A_2}{\partial a} + B_1\frac{\partial A_2}{\partial\theta} + A_2\frac{\partial A_1}{\partial a} + B_2\frac{\partial A_1}{\partial\theta} - 2aB_1B_2 - 2a\frac{p\nu}{q}B_3\right)\cos\psi + \right. \\
& + \left(-aA_1\frac{\partial B_2}{\partial a} - aA_2\frac{\partial B_1}{\partial a} - aB_1\frac{\partial B_2}{\partial\theta} - aB_2\frac{\partial B_1}{\partial\theta} - 2A_1B_2 - 2A_2B_1 - 2\frac{p\nu}{q}A_3\right)\sin\psi + \\
& + \frac{\partial u_1}{\partial a}\left(A_1\frac{\partial A_1}{\partial a} + B_1\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right) + A_1^2\frac{\partial^2u_1}{\partial a^2} + 2A_1B_1\frac{\partial^2u_1}{\partial a\partial\theta} + 2A_2\frac{\partial^2u_1}{\partial a\partial t} + 2A_1\frac{\partial^2u_2}{\partial a\partial t} + \\
& \left. + \frac{\partial u_1}{\partial\theta}\left(A_1\frac{\partial B_1}{\partial a} + B_1\frac{\partial B_1}{\partial\theta}\right) + B_1^2\frac{\partial^2u_1}{\partial\theta^2} + 2B_2\frac{\partial^2u_1}{\partial\theta\partial t} + 2B_1\frac{\partial^2u_2}{\partial\theta\partial t} + \frac{\partial^2u_3}{\partial t^2} + \left(\frac{p\nu}{q}\right)^2u_3\right].
\end{aligned} \tag{11}
$$

Если отбросить члены с ε^3, приходим к выражению (4.10) в [1].

2. РЕЗОНАНС $\omega \approx \frac{\nu}{2}$

Выведем формулы для границы первой области параметрического резонанса в первом и во втором (формула (27)) приближениях асимптотического метода.

Формулы первого приближения получим из равенства выражений с ε в (11) и (10) при $p = 1$, $q = 2$;

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\nu^2}{4}u_1 - \nu A_1 \sin\psi - a\nu B_1 \cos\psi = \frac{a\nu^2 h_1}{4}\cos(\nu t)\cos\psi - a\Delta_1\cos\psi + \frac{a\nu\delta_1}{2}\sin\psi.$$

Решение u_1 этого дифференциального уравнения не должно содержать колебаний основной частоты $\nu/2$ [1]. Это требование означает отсутствие в уравнении слагаемых с $\sin\psi$ и $\cos\psi$. Поэтому с учетом формулы

$$\cos(\nu t)\cos\psi = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{3\nu}{2}t + \theta\right) + \sin(2\theta)\sin\psi + \cos(2\theta)\cos\psi\right] \tag{12}$$

приравняем нулю выражения с $\sin\psi$ и $\cos\psi$. Получаем

$$\nu A_1 + \frac{a\nu\delta_1}{2} + \frac{a\nu^2 h_1}{8}\sin(2\theta) = 0, \quad \nu B_1 - \Delta_1 + \frac{\nu^2 h_1}{8}\cos(2\theta) = 0,$$

откуда

$$A_1 = -\frac{a\delta_1}{2} - \frac{a\nu h_1}{8}\sin(2\theta), \quad B_1 = \frac{\Delta_1}{\nu} - \frac{\nu h_1}{8}\cos(2\theta). \tag{13}$$

Для функции u_1 получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\nu^2}{4}u_1 = \frac{a\nu^2 h_1}{8}\cos\left(\frac{3\nu}{2}t + \theta\right),$$

которое имеет общее решение

$$u_1 = C_1\cos\left(\frac{\nu}{2}t\right) + C_2\sin\left(\frac{\nu}{2}t\right) - \frac{ah_1}{16}\cos\left(\frac{3\nu}{2}t + \theta\right).$$

Полагаем $C_1 = C_2 = 0$, чтобы исключить в u_1 колебания с основной частотой $\nu/2$. Окончательно,

$$u_1 = -\frac{ah_1}{16}\cos\left(\frac{3\nu}{2}t + \theta\right). \tag{14}$$

Приравняем теперь выражения с ε^2 в разложениях (11) и (10)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &+ \frac{\nu^2}{4}u_2 + \left(-2A_1B_1 - aA_1\frac{\partial B_1}{\partial a} - aB_1\frac{\partial B_1}{\partial\theta} - \nu A_2\right)\sin\psi + \left(-aB_1^2 + A_1\frac{\partial A_1}{\partial a} + \right.\\ &\left. + B_1\frac{\partial A_1}{\partial\theta} - a\nu B_2\right)\cos\psi + 2A_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\partial t} + 2B_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta\partial t} = \frac{\nu^2 h_1}{4}u_1\cos(\nu t) - \Delta_1 u_1 - \\ &- \delta_1\left(A_1\cos\psi - aB_1\sin\psi + \frac{\partial u_1}{\partial t}\right) + ah_1\Delta_1\cos(\nu t)\cos\psi - a\Delta_2\cos\psi + \frac{a\nu\delta_2}{2}\sin\psi.\end{aligned} \tag{15}$$

Это – дифференциальное уравнение относительно u_2. Функции A_1, B_1, u_1 определяются формулами первого приближения (13), (14). Чтобы избежать появления в u_2 колебаний с частотой $\nu/2$, приравняем нулю выражения с $\sin\psi$ и $\cos\psi$, учитывая формулы (7), (12) и

$$u_1\cos(\nu t) = -\frac{ah_1}{32}\left[\cos\left(\frac{5\nu}{2}t + \theta\right) + \cos\psi\right]. \tag{16}$$

Получаем

$$\nu A_2 = -2A_1B_1 - aA_1\frac{\partial B_1}{\partial a} - aB_1\frac{\partial B_1}{\partial\theta} - a\delta_1B_1 - \frac{ah_1\Delta_1}{2}\sin(2\theta) - \frac{a\nu\delta_2}{2},$$
$$a\nu B_2 = A_1\frac{\partial A_1}{\partial a} + B_1\frac{\partial A_1}{\partial\theta} - aB_1^2 + \frac{a\nu^2h_1^2}{128} + \delta_1A_1 - \frac{ah_1\Delta_1}{2}\cos(2\theta) + a\Delta_2,$$

откуда после вычислений следуют выражения

$$A_2 = -\frac{a\delta_2}{2} - \frac{ah_1\Delta_1}{2\nu}\sin(2\theta), \quad B_2 = \frac{\Delta_2}{\nu} - \frac{\Delta_1^2}{\nu^3} - \frac{\delta_1^2}{4\nu} + \frac{3\nu h_1^2}{128} - \frac{h_1\Delta_1}{2\nu}\cos(2\theta). \tag{17}$$

Если в решении уравнения (1) ограничиться вторым приближением метода, вычисление u_2 не требуется [1].

Далее вместо системы уравнений (8) будем использовать систему для a и 2θ, которая во втором приближении имеет вид

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2, \quad \frac{d(2\theta)}{dt} = \varepsilon 2B_1 + \varepsilon^2 2B_2.$$

Подставим выражения (13), (17), получаем систему

$$\frac{da}{dt} = \frac{a}{2}[-\delta + r\sin(2\theta)], \quad \frac{d(2\theta)}{dt} = s + r\cos(2\theta), \tag{18}$$

где в коэффициентах, имеющих вид разложения по степеням ε

$$\delta = \varepsilon\delta_1 + \varepsilon^2\delta_2, \quad r = \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2, \quad s = \varepsilon s_1 + \varepsilon^2 s_2,$$

составляющие равны

$$r_1 = -\frac{\nu h_1}{4}, \quad r_2 = -\frac{h_1\Delta_1}{\nu}, \quad s_1 = \frac{2\Delta_1}{\nu}, \quad s_2 = \frac{2\Delta_2}{\nu} - \frac{2\Delta_1^2}{\nu^3} - \frac{\delta_1^2}{2\nu} + \frac{3\nu h_1^2}{64}. \tag{19}$$

Как в [1], систему (18) сведем к линейной однородной системе с постоянными коэффициентами с помощью замены переменных

$$P = a\sin\theta, \quad R = a\cos\theta. \tag{20}$$

Дифференцируем

$$\frac{dP}{dt} = \frac{da}{dt}\sin\theta + a\cos\theta\frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{dR}{dt} = \frac{da}{dt}\cos\theta - a\sin\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

Подставляем сюда выражения da/dt, $d\theta/dt = 0, 5d(2\theta/dt)$ (18). С учетом формул (20) получаем систему

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\delta}{2}P + \frac{r+s}{2}R, \quad \frac{dR}{dt} = -\frac{\delta}{2}R + \frac{r-s}{2}P. \tag{21}$$

Исключая, например, R, приходим к уравнению осциллятора относительно P

$$\frac{d^2P}{dt^2} + \delta\frac{dP}{dt} + \frac{s^2 - r^2 + \delta^2}{4}P = 0,$$

характеристическое уравнение которого имеет корни

$$k_{1,2} = \frac{-\delta \pm \sqrt{r^2 - s^2}}{2}.$$

При $D = r^2 - s^2 \geq 0$ корни вещественные. Оба они отрицательные, пока $D < \delta^2$. Функция $P(t)$ и, следовательно, амплитуда $a(t)$ экспоненциально затухают, не совершая колебаний. Этот режим описан в [9], [2].

Если $D > \delta^2$ корень $k_1 > 0$. В этом случае функция $P(t)$ имеет экспоненциально возрастающую составляющую, что указывает на параметрический резонанс.

При $k_1 = 0, (D = \delta^2)$ получаем уравнение, связывающее параметры уравнения (1) и определяющее границу области резонанса

$$s^2 + \delta^2 = r^2. \tag{22}$$

При $D = r^2 - s^2 < 0$ корни $k_{1,2}$ комплексно-сопряженные. Функция $P(t)$ и, следовательно, амплитуда $a(t)$ экспоненциально затухают, совершая медленные колебания с частотой $\sqrt{s^2 - r^2}/2$.

Используя формулы (19), запишем уравнение (22) в первом приближении

$$\varepsilon^2 \frac{4\Delta_1^2}{\nu^2} + \varepsilon^2\delta_1^2 = \varepsilon^2 \frac{\nu^2 h_1^2}{16}. \tag{23}$$

В работе [1] граница построена на плоскости параметров $((2\omega/\nu)^2, h)$. После подстановки выражения

$$\varepsilon\Delta_1 = \omega^2 - \frac{\nu^2}{4}, \tag{24}$$

которое следует из (2) при $p = 1$, $q = 2$, в формулу (23), и умножения на $4/\nu^2$ находим

$$\left(\frac{2\omega}{\nu}\right)^2 = 1 \pm \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{4\delta^2}{\nu^2}},$$

т.е. выражение, определяющее границу области параметрического резонанса, которое получено в [1].

Дополним этот результат. Вычислим границу во втором приближении, считая $\Delta \sim \varepsilon$, $\delta \sim \varepsilon$, т.е. полагая в формулах (19) $\Delta_2 = 0$.

Согласно (24) параметр $(2\omega/\nu)^2$ выражается через частотную расстройку Δ_1, которая присутствует в r_2, $s_{1,2}$. Поэтому (22) является алгебраическим уравнением относительно $(2\omega/\nu)^2$.

Запишем это уравнение. Для удобства введем

$$y = \left(\frac{2\omega}{\nu}\right)^2 - 1, \tag{25}$$

тогда из (24) следует

$$\varepsilon\Delta_1 = \frac{\nu^2}{4} y.$$

Подставим это выражение в r_2, s_1, s_2 (19) и запишем (22) в виде

$$y^4 - 8y^3 + \left(16 - \frac{19h^2}{4} + \frac{8\delta^2}{\nu^2}\right)y^2 - \left(5h^2 + \frac{32\delta^2}{\nu^2}\right)y + \frac{9h^4}{64} - 4h^2 - \frac{3h^2\delta^2}{\nu^2} + \frac{64\delta^2}{\nu^2} + \frac{16\delta^4}{\nu^4} = 0.$$

Решение уравнения ищем в виде разложения по степеням ε

$$y = \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots \tag{26}$$

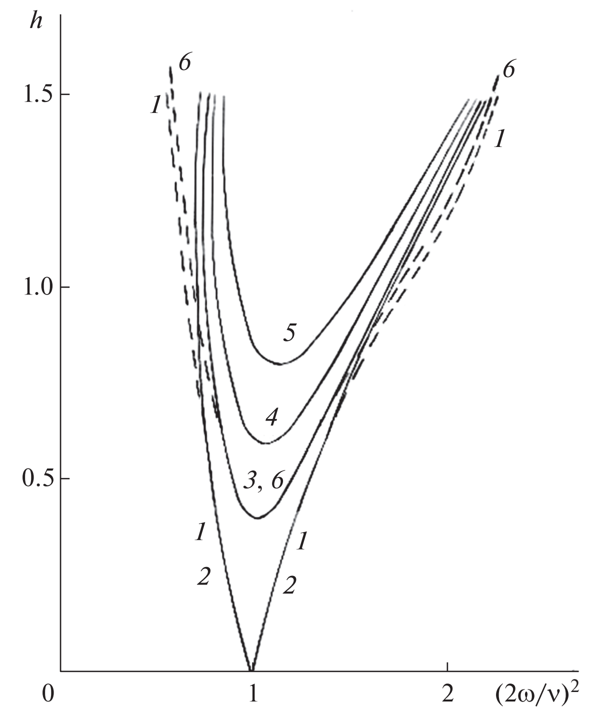
с использованием формул

$$y^2 = \varepsilon^2 y_1^2 + 2\varepsilon^3 y_1 y_2 + \cdots, \quad y^3 = \varepsilon^3 y_1^3 + \cdots.$$

Подставим в уравнение, учитывая оценки $h, \delta \sim \varepsilon$, приравняем нулю коэффициенты при степенях ε

$$\varepsilon^2: \ 16y_1^2 - 4h_1^2 + \frac{64\delta_1^2}{\nu^2} = 0,$$

$$\varepsilon^3: \ -8y_1^3 + 32y_1y_2 - \left(5h_1^2 + \frac{32\delta_1^2}{\nu^2}\right)y_1 = 0.$$



Фиг. 1

В полученной системе уравнений относительно $y_{1,2}$ первое уравнение имеет решение

$$y_1 = \pm\sqrt{\frac{h_1^2}{4} - \frac{4\delta_1^2}{\nu^2}}.$$

Используя (25), получаем границу области параметрического резонанса в первом приближении.

Подставим y_1 во второе уравнение и выразим y_2:

$$y_2 = \frac{7h_1^2}{32}.$$

Формулы для $y_{1,2}$ позволяют с использованием (25) записать y (26) – границу области параметрического резонанса во втором приближении асимптотического метода

$$\left(\frac{2\omega}{\nu}\right)^2 = 1 \pm \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{4\delta^2}{\nu^2}} + \frac{7h^2}{32}. \tag{27}$$

На фиг. 1 показаны границы первой области резонанса во втором приближении для трех значений $\delta/\nu = 0.1, 0.15, 0.2$ (кривые *3*, *4*, *5* соответственно). Линия *2* – граница (27) при отсутствии затухания ($\delta/\nu = 0$). Штриховые линии получены численным решением уравнения Матье: кривая *1* – из уравнения без затухания, кривая *2* – из уравнения с затуханием в случае $\delta/\nu = 0.1$. При численном интегрировании уравнения Матье (1) делением на ν^2 приводилось к виду

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{\delta}{\nu}\frac{dx}{d\tau} + \frac{1}{4}\left(\frac{2\omega}{\nu}\right)^2 (1 - h\cos\tau)\,x = 0, \quad \tau = \nu t. \tag{28}$$

3. РЕЗОНАНС $\omega \approx \nu$

Выведем формулы для границы второй области параметрического резонанса во втором и третьем приближениях асимптотического метода (формула (38)). Результат сравним с [1].

Теперь $p = 1$, $q = 1$ и $\psi = \nu t + \theta$. Из равенства выражений с ε в (11) и (10) следует уравнение

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \nu^2 u_1 - 2\nu A_1 \sin\psi - 2a\nu B_1 \cos\psi = ah_1\nu^2 \cos(\nu t)\cos\psi - a\Delta_1 \cos\psi + a\nu\delta_1 \sin\psi.$$

Чтобы устранить в решении u_1 колебания с основной частотой ν, приравняем нулю выражения с $\sin\psi$ и $\cos\psi$. Учитывая тригонометрическую формулу

$$\cos(\nu t)\cos\psi = \frac{1}{2}[\cos(2\nu t + \theta) + \cos\theta], \tag{29}$$

не содержащую колебаний с частотой ν, получаем

$$2\nu A_1 + a\nu\delta_1 = 0, \quad 2a\nu B_1 - a\Delta_1 = 0.$$

Отсюда

$$A_1 = -\frac{a\delta_1}{2}, \quad B_1 = \frac{\Delta_1}{2\nu}. \tag{30}$$

Уравнение для u_1

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \nu^2 u_1 = \frac{a\nu^2 h_1}{2}[\cos(2\nu t + \theta) + \cos\theta]$$

имеет общее решение

$$u_1 = C_1\cos(\nu t) + C_2\sin(\nu t) - \frac{ah_1}{6}\cos(2\nu t + \theta) + \frac{ah_1}{2}\cos\theta. \tag{31}$$

Далее полагаем $C_1 = C_2 = 0$.

Формулы второго приближения найдем из равенства выражений с ε^2 в (11) и (10) (при $p = q = 1$)

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \nu^2 u_2 + \left(-2A_1B_1 - aA_1\frac{\partial B_1}{\partial a} - aB_1\frac{\partial B_1}{\partial \theta} - 2\nu A_2\right)\sin\psi + \left(-aB_1^2 + A_1\frac{\partial A_1}{\partial a} + B_1\frac{\partial A_1}{\partial\theta} - 2a\nu B_2\right)\cos\psi +$$
$$+ 2A_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\partial t} + 2B_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta\partial t} = \nu^2 h_1 u_1\cos(\nu t) - \Delta_1 u_1 - \delta_1\left(A_1\cos\psi - aB_1\sin\psi + \frac{\partial u_1}{\partial t}\right) +$$
$$+ ah_1\Delta_1\cos(\nu t)\cos\psi - a\Delta_2\cos\psi + a\nu\delta_2\sin\psi.$$

Здесь присутствуют тригонометрические выражения $\cos(\nu t)\cos\psi$ (29) и

$$u_1\cos(\nu t) = -\frac{ah_1}{12}\cos(3\nu t + \theta) + \frac{ah_1}{4}\sin(2\theta)\sin\psi + \left[\frac{ah_1}{6} + \frac{ah_1}{4}\cos(2\theta)\right]\cos\psi, \tag{32}$$

которое получаем с использованием (31).

В функции u_2 будут отсутствовать колебания с основной частотой ν, если приравняем нулю выражения с $\sin\psi$ и $\cos\psi$

$$2\nu A_2 = -2A_1B_1 - aA_1\frac{\partial B_1}{\partial a} - aB_1\frac{\partial B_1}{\partial\theta} - a\delta_1 B_1 - \frac{a\nu^2 h_1^2}{4}\sin(2\theta) - a\nu\delta_2,$$
$$2a\nu B_2 = A_1\frac{\partial A_1}{\partial a} + B_1\frac{\partial A_1}{\partial\theta} - aB_1^2 - \frac{a\nu^2 h_1^2}{6} + \delta_1 A_1 - \frac{a\nu^2 h_1^2}{4}\cos(2\theta) + a\Delta_2.$$

Отсюда после простых вычислений с использованием формул (30) получаем

$$A_2 = -\frac{a\delta_2}{2} - \frac{a\nu h_1^2}{8}\sin(2\theta), \quad B_2 = \frac{\Delta_2}{2\nu} - \frac{\Delta_1^2}{8\nu^3} - \frac{\delta_1^2}{8\nu} - \frac{\nu h_1^2}{12} - \frac{\nu h_1^2}{8}\cos(2\theta). \tag{33}$$

Дифференциальное уравнение относительно u_2 приобретает вид

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \nu^2 u_2 = \frac{ah_1\Delta_1}{3}\cos(2\nu t + \theta) - \frac{a\nu^2 h_1^2}{12}\cos(3\nu t + \theta).$$

Оно имеет общее решение

$$u_2 = C_1\cos(\nu t) + C_2\sin(\nu t) - \frac{ah_1\Delta_1}{9\nu^2}\cos(2\nu t + \theta) + \frac{ah_1^2}{96}\cos(3\nu t + \theta). \tag{34}$$

Далее полагаем $C_1 = C_2 = 0$.

Приравняем выражения с ε^3 в (11) и (10), считая $p = q = 1$. Получаем дифференциальное уравнение относительно u_3:

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \nu^2 u_3 + \left(-aA_1\frac{\partial B_2}{\partial a} - aA_2\frac{\partial B_1}{\partial a} - aB_1\frac{\partial B_2}{\partial\theta} - aB_2\frac{\partial B_1}{\partial\theta} - 2A_1B_2 - 2A_2B_1 - 2\nu A_3\right)\sin\psi +$$
$$+\left(A_1\frac{\partial A_2}{\partial a} + B_1\frac{\partial A_2}{\partial\theta} + A_2\frac{\partial A_1}{\partial a} + B_2\frac{\partial A_1}{\partial\theta} - 2aB_1B_2 - 2a\nu B_3\right)\cos\psi + \frac{\partial u_1}{\partial a}\left(A_1\frac{\partial A_1}{\partial a} + B_1\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right) + A_1^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial a^2} +$$
$$+ 2A_1B_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\partial\theta} + 2A_2\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\partial t} + 2A_1\frac{\partial^2 u_2}{\partial a\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial\theta}\left(A_1\frac{\partial B_1}{\partial a} + B_1\frac{\partial B_1}{\partial\theta}\right) + B_1^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta^2} + 2B_2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta\partial t} + 2B_1\frac{\partial^2 u_2}{\partial\theta\partial t} =$$
$$= \nu^2 h_1 u_2\cos(\nu t) - \Delta_1 u_2 - \delta_1\left(A_2\cos\psi - aB_2\sin\psi + A_1\frac{\partial u_1}{\partial a} + B_1\frac{\partial u_1}{\partial\theta} + \frac{\partial u_2}{\partial t}\right) + h_1\Delta_1 u_1\cos(\nu t) -$$
$$- \Delta_2 u_1 - \delta_2\left(A_1\cos\psi - aB_1\sin\psi + \frac{\partial u_1}{\partial t}\right) + ah_1\Delta_2\cos(\nu t)\cos\psi - a\Delta_3\cos\psi + a\nu\delta_3\sin\psi,$$

где присутствуют тригонометрические выражения $u_1\cos(\nu t)$ (32), $\cos(\nu t)\cos\psi$ (29) и

$$u_2\cos(\nu t) = -\frac{ah_1\Delta_1}{18\nu^2}[\cos(3\nu t + \theta) + \cos\psi] + \frac{ah_1^2}{192}[\cos(4\nu t + \theta) + \cos(2\nu t + \theta)],$$

которое вычислено с использованием формулы (34).

Приравняем нулю выражения с $\sin\psi$ и $\cos\psi$

$$2\nu A_3 + aA_1\frac{\partial B_2}{\partial a} + aA_2\frac{\partial B_1}{\partial a} + aB_1\frac{\partial B_2}{\partial\theta} + aB_2\frac{\partial B_1}{\partial\theta} + 2A_1B_2 + 2A_2B_1 + \frac{ah_1^2\Delta_1}{4}\sin(2\theta) +$$
$$+ a\delta_1B_2 + a\delta_2B_1 + a\nu\delta_3 = 0,$$
$$2a\nu B_3 - A_1\frac{\partial A_2}{\partial a} - B_1\frac{\partial A_2}{\partial\theta} - A_2\frac{\partial A_1}{\partial a} - B_2\frac{\partial A_1}{\partial\theta} + 2aB_1B_2 + \frac{ah_1^2\Delta_1}{9} +$$
$$+ \frac{ah_1^2\Delta_1}{4}\cos(2\theta) - \delta_1A_2 - \delta_2A_1 - a\Delta_3 = 0.$$

Здесь A_1, B_1 определяются формулами (30), A_2, B_2 – (33). В результате простых вычислений получаем

$$A_3 = -\frac{a\delta_3}{2} - \frac{ah_1^2\Delta_1}{8\nu}\sin(2\theta), \quad B_3 = \frac{\Delta_3}{2\nu} + \frac{\Delta_1^3}{16\nu^5} - \frac{\Delta_1\Delta_2}{4\nu^3} + \frac{\Delta_1\delta_1^2}{16\nu^3} - \frac{\delta_1\delta_2}{4\nu} - \frac{h_1^2\Delta_1}{72\nu} - \frac{h_1^2\Delta_1}{8\nu}\cos(2\theta). \tag{35}$$

Используя формулы (30), (33), (35), записываем систему (8) в виде (18), где в коэффициентах, имеющих вид разложения по степеням ε

$$\delta = \varepsilon\delta_1 + \varepsilon^2\delta_2 + \varepsilon^3\delta_3, \quad r = \varepsilon^2 r_2 + \varepsilon^3 r_3, \quad s = \varepsilon s_1 + \varepsilon^2 s_2 + \varepsilon^3 s_3,$$

составляющие равны

$$r_2 = -\frac{\nu h_1^2}{4}, \quad r_3 = -\frac{h_1^2\Delta_1}{4\nu}, \quad s_1 = \frac{\Delta_1}{\nu},$$
$$s_2 = \frac{\Delta_2}{\nu} - \frac{\Delta_1^2}{4\nu^3} - \frac{\delta_1^2}{4\nu} - \frac{\nu h_1^2}{6}, \quad s_3 = \frac{\Delta_3}{\nu} + \frac{\Delta_1^3}{8\nu^5} - \frac{\Delta_1\Delta_2}{2\nu^3} + \frac{\Delta_1\delta_1^2}{8\nu^3} - \frac{\delta_1\delta_2}{2\nu} - \frac{h_1^2\Delta_1}{36\nu}. \tag{36}$$

Замена переменных (20) приводит к системе (21) и, как следствие, к уравнению (22), определяющему границу области параметрического резонанса. С учетом формул (36) запишем (22) подробно

$$\varepsilon^2(s_1^2+\delta_1^2)+\varepsilon^3(2s_1s_2+2\delta_1\delta_2)+\varepsilon^4(s_2^2+2s_1s_3+\delta_2^2+2\delta_1\delta_3)+\varepsilon^5(2s_2s_3+2\delta_2\delta_3)+$$
$$+\varepsilon^6(s_3^2+\delta_3^2)=\varepsilon^4r_2^2+\varepsilon^5 2r_2r_3+\varepsilon^6r_3^2.$$

Приравнивая выражения с одинаковыми степенями ε в левой и правой частях, получаем систему равенств

$$\begin{gathered}s_1^2+\delta_1^2=0,\quad s_1s_2+\delta_1\delta_2=0,\quad s_2^2+2s_1s_3+\delta_2^2+2\delta_1\delta_3=r_2^2,\\ s_2s_3+\delta_2\delta_3=r_2r_3,\quad s_3^2+\delta_3^2=r_3^2.\end{gathered}\tag{37}$$

Сначала найдем границу области параметрического резонанса во втором приближении, как в [1]. Для этого положим $\delta_3=r_3=s_3=0$. Получаем

$$s_1^2+\delta_1^2=0,\quad s_1s_2+\delta_1\delta_2=0,\quad s_2^2+\delta_2^2=r_2^2.$$

Первое и второе равенства выполняются, если $s_1=\delta_1=0$, т.е. согласно (36) при $\Delta_1=\delta_1=0$. В этом случае частотная расстройка $\Delta\sim\varepsilon^2$ и коэффициент затухания $\delta\sim\varepsilon^2$. Далее, из (36) следуют выражения

$$s_2=\frac{\Delta_2}{\nu}-\frac{\nu h_1^2}{6},\quad r_2=-\frac{\nu h_1^2}{4},$$

которые подставим в третье равенство

$$\left(\frac{\Delta_2}{\nu}-\frac{\nu h_1^2}{6}\right)^2=\frac{\nu^2h_1^4}{16}-\delta_2^2.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta_2}{\nu}=\frac{\nu h_1^2}{6}\pm\sqrt{\frac{\nu^2h_1^4}{16}-\delta_2^2}.$$

Умножим на ε^2

$$\frac{\varepsilon^2\Delta_2}{\nu}=\frac{\nu h^2}{6}\pm\sqrt{\frac{\nu^2h^4}{16}-\delta^2}$$

и подставим частотную расстройку

$$\varepsilon^2\Delta_2=\omega^2-\nu^2,$$

которая следует из формулы (2) при $\Delta_1=0$, $p=q=1$. Приходим к выражению

$$\frac{\omega^2-\nu^2}{\nu}=\frac{\nu h^2}{6}\pm\sqrt{\frac{\nu^2h^4}{16}-\delta^2},$$

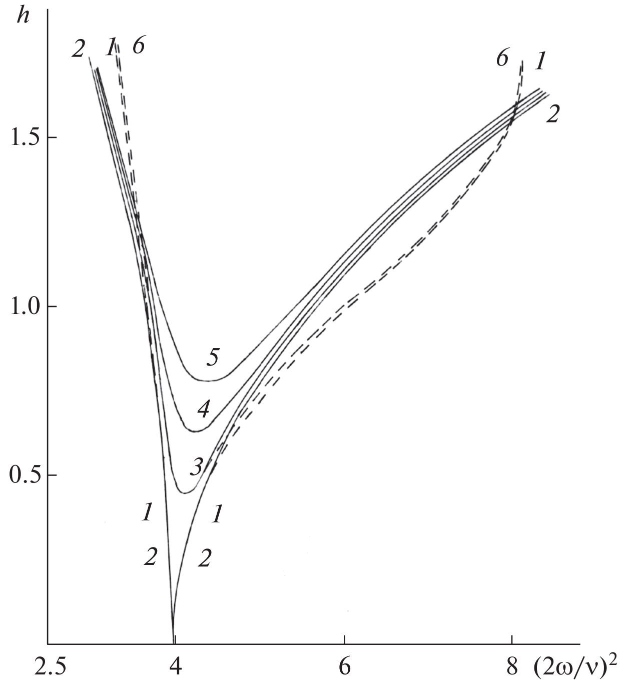
которое умножаем на $4/\nu$. В результате получаем границу области параметрического резонанса на плоскости параметров $((2\omega/\nu)^2,h)$ (как в работе [1])

$$\left(\frac{2\omega}{\nu}\right)^2=4+\frac{2h^2}{3}\pm\sqrt{h^4-\frac{16\delta^2}{\nu^2}}.\tag{38}$$

Эта формула отличается от формулы (17.63) в [1] числовым множителем при δ^2. Там вместо 16 стоит 64.

В третьем приближении используем оценки $\Delta,\delta\sim\varepsilon^2$. Тогда $\Delta_1=\delta_1=\Delta_3=\delta_3=0$, и по формулам (36) получаем

$$s_2=\frac{\Delta_2}{\nu}-\frac{\nu h_1^2}{6},\quad r_2=-\frac{\nu h_1^2}{4},\quad s_3=r_3=0,$$



Фиг. 2

как во втором приближении. В результате граница области параметрического резонанса в третьем приближении совпадает с границей (38) во втором приближении.

На фиг. 2 показана граница, вычисленная по формуле (38) для трех значений $\delta/\nu = 0.05$; 0.1; 0.15 (линии *3*, *4*, *5* соответственно). Кривая *2* – граница, которая следует из (38) при отсутствии затухания ($\delta/\nu = 0$). Эта граница, вычисленная численным интегрированием уравнения Матье (28), изображена штриховой линией *1*. Штриховая линия *6* – граница области параметрического резонанса при затухании $\delta/\nu = 0.05$ получена также численным интегрированием.

4. РЕЗОНАНС $\omega \approx \frac{3}{2}\nu$

Получим формулу для границы третьей области параметрического резонанса (формула (48)). Результат сравним с [1].

Из равенства выражений с ε в (11) и (10) при $p = 3, q = 2$ следует дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{9\nu^2}{4}u_1 - 3\nu A_1 \sin\psi - 3a\nu B_1 \cos\psi = \frac{9a\nu^2 h_1}{4}\cos(\nu t)\cos\psi - a\Delta_1 \cos\psi + \frac{3a\nu\delta_1}{2}\sin\psi.$$

Здесь

$$\psi = \frac{3\nu}{2}t + \theta$$

и

$$\cos(\nu t)\cos\psi = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{5\nu}{2}t + \theta\right) + \cos\left(\frac{\nu}{2}t + \theta\right)\right]. \tag{39}$$

Приравняем нулю выражения, содержащие $\sin\psi$ и $\cos\psi$

$$3\nu A_1 + \frac{3a\nu\delta_1}{2} = 0, \quad 3a\nu B_1 - a\Delta_1 = 0,$$

откуда

$$A_1 = -\frac{a\delta_1}{2}, \quad B_1 = \frac{\Delta_1}{3\nu}. \tag{40}$$

Дифференциальное уравнение приобретает вид

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{9\nu^2}{4}u_1 = \frac{9a\nu^2 h_1}{8}\cos\left(\frac{\nu}{2}t + \theta\right) + \frac{9a\nu^2 h_1}{8}\cos\left(\frac{5\nu}{2}t + \theta\right).$$

Оно имеет общее решение

$$u_1 = C_1\cos\left(\frac{3\nu}{2}t\right) + C_2\sin\left(\frac{3\nu}{2}t\right) + \frac{9ah_1}{16}\cos\left(\frac{\nu}{2}t + \theta\right) - \frac{9ah_1}{32}\cos\left(\frac{5\nu}{2}t + \theta\right), \tag{41}$$

в котором далее полагаем $C_1 = C_2 = 0$.

Приравняем теперь выражения с ε^2 в (11) и (10) с $p = 3$, $q = 2$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{9\nu^2}{4}u_2 + \left(-2A_1B_1 - aA_1\frac{\partial B_1}{\partial a} - aB_1\frac{\partial B_1}{\partial\theta} - 3\nu A_2\right)\sin\psi + \\ + \left(-aB_1^2 + A_1\frac{\partial A_1}{\partial a} + B_1\frac{\partial A_1}{\partial\theta} - 3a\nu B_2\right)\cos\psi + 2A_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\partial t} + 2B_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta\partial t} = \frac{9\nu^2 h_1}{4}u_1\cos(\nu t) - \Delta_1 u_1 - \\ - \delta_1\left(A_1\cos\psi - aB_1\sin\psi + \frac{\partial u_1}{\partial t}\right) + ah_1\Delta_1\cos(\nu t)\cos\psi - a\Delta_2\cos\psi + \frac{3a\nu\delta_2}{2}\sin\psi.\end{gathered} \tag{42}$$

Здесь присутствуют тригонометрические выражения (39) и

$$u_1\cos(\nu t) = \frac{9ah_1}{32}\cos\left(\frac{\nu}{2}t - \theta\right) - \frac{9ah_1}{64}\cos\left(\frac{7\nu}{2}t + \theta\right) + \frac{9ah_1}{64}\cos\psi, \tag{43}$$

которое вычислено с учетом (41).

Приравняем нулю выражения с $\sin\psi$ и $\cos\psi$

$$3\nu A_2 + 2A_1B_1 + aA_1\frac{\partial B_1}{\partial a} + aB_1\frac{\partial B_1}{\partial\theta} + a\delta_1B_1 + \frac{3a\nu\delta_2}{2} = 0,$$

$$3a\nu B_2 - A_1\frac{\partial A_1}{\partial a} - B_1\frac{\partial A_1}{\partial\theta} + aB_1^2 + \frac{81a\nu^2h_1^2}{256} - \delta_1A_1 - a\Delta_2 = 0.$$

Используя формулы (40), получаем

$$A_2 = -\frac{a\delta_2}{2}, \quad B_2 = \frac{\Delta_2}{3\nu} - \frac{\Delta_1^2}{27\nu^3} - \frac{\delta_1^2}{12\nu} - \frac{27\nu h_1^2}{256}. \tag{44}$$

Дифференциальное уравнение (42) относительно u_2 принимает вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{9\nu^2}{4}u_2 = \frac{81a\nu^2h_1^2}{128}\cos\left(\frac{\nu}{2}t - \theta\right) + \frac{ah_1\Delta_1}{8}\cos\left(\frac{\nu}{2}t + \theta\right) + \\ + \frac{5ah_1\Delta_1}{16}\cos\left(\frac{5\nu}{2}t + \theta\right) - \frac{81a\nu^2h_1^2}{256}\cos\left(\frac{7\nu}{2}t + \theta\right).\end{gathered}$$

Оно имеет общее решение

$$\begin{gathered}u_2 = C_1\cos\left(\frac{3\nu}{2}t\right) + C_2\sin\left(\frac{3\nu}{2}t\right) + \frac{81ah_1^2}{256}\cos\left(\frac{\nu}{2}t - \theta\right) + \frac{ah_1\Delta_1}{16\nu^2}\cos\left(\frac{\nu}{2}t + \theta\right) - \\ - \frac{5ah_1\Delta_1}{64\nu^2}\cos\left(\frac{5\nu}{2}t + \theta\right) + \frac{81ah_1^2}{2560}\cos\left(\frac{7\nu}{2}t + \theta\right).\end{gathered} \tag{45}$$

Далее полагаем $C_1 = C_2 = 0$.

Формулы третьего приближения получим из равенства выражений с ε^3 в (11) и (10) при $p = 3, q = 2$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \frac{9\nu^2}{4} u_3 + \left(-aA_1 \frac{\partial B_2}{\partial a} - aA_2 \frac{\partial B_1}{\partial a} - aB_1 \frac{\partial B_2}{\partial \theta} - aB_2 \frac{\partial B_1}{\partial \theta} - 2A_1 B_2 - 2A_2 B_1 - 3\nu A_3\right)\sin\psi +$$
$$+ \left(A_1 \frac{\partial A_2}{\partial a} + B_1 \frac{\partial A_2}{\partial \theta} + A_2 \frac{\partial A_1}{\partial a} + B_2 \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - 2aB_1 B_2 - 3a\nu B_3\right)\cos\psi + \frac{\partial u_1}{\partial a}\left(A_1 \frac{\partial A_1}{\partial a} + B_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta}\right) + A_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a^2} +$$
$$+ 2A_1 B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \theta} + 2A_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} + 2A_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a \partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial \theta}\left(A_1 \frac{\partial B_1}{\partial a} + B_1 \frac{\partial B_1}{\partial \theta}\right) + B_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + 2B_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta \partial t} + 2B_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta \partial t} =$$
$$= \frac{9\nu^2 h_1}{4} u_2 \cos(\nu t) - \Delta_1 u_2 - \delta_1 \left(A_2 \cos\psi - aB_2 \sin\psi + A_1 \frac{\partial u_1}{\partial a} + B_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial t}\right) + h_1 \Delta_1 u_1 \cos(\nu t) -$$
$$- \Delta_2 u_1 - \delta_2 \left(A_1 \cos\psi - aB_1 \sin\psi + \frac{\partial u_1}{\partial t}\right) + ah_1 \Delta_2 \cos(\nu t)\cos\psi - a\Delta_3 \cos\psi + \frac{3a\nu\delta_3}{2}\sin\psi.$$

Здесь присутствуют тригонометрические выражения (39), (43) и

$$u_2 \cos(\nu t) = \frac{81ah_1^2}{512}[\cos(2\theta)\cos\psi + \sin(2\theta)\sin\psi] - \frac{ah_1\Delta_1}{128\nu^2}\cos\psi + \frac{ah_1\Delta_1}{32\nu^2}\cos\left(\frac{\nu}{2}t - \theta\right) +$$
$$+ \frac{81ah_1^2}{512}\cos\left(\frac{\nu}{2}t + \theta\right) + \frac{81ah_1^2}{5120}\cos\left(\frac{5\nu}{2}t + \theta\right) - \frac{5ah_1\Delta_1}{128\nu^2}\cos\left(\frac{7\nu}{2}t + \theta\right) + \frac{81ah_1^2}{5120}\cos\left(\frac{9\nu}{2}t + \theta\right),$$

которое получаем с использованием u_2 (45).

Приравняем нулю выражения с $\sin\psi$ и $\cos\psi$

$$3\nu A_3 + aA_1 \frac{\partial B_2}{\partial a} + aA_2 \frac{\partial B_1}{\partial a} + aB_1 \frac{\partial B_2}{\partial \theta} + aB_2 \frac{\partial B_1}{\partial \theta} + 2A_1 B_2 + 2A_2 B_1 +$$
$$+ \frac{729a\nu^2 h_1^3}{2048}\sin(2\theta) + a\delta_1 B_2 + a\delta_2 B_1 + \frac{3a\nu\delta_3}{2} = 0,$$
$$3a\nu B_3 - A_1 \frac{\partial A_2}{\partial a} - B_1 \frac{\partial A_2}{\partial \theta} - A_2 \frac{\partial A_1}{\partial a} - B_2 \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + 2aB_1 B_2 +$$
$$+ \frac{63ah_1^2\Delta_1}{512} + \frac{729a\nu^2 h_1^3}{2048}\cos(2\theta) - \delta_1 A_2 - \delta_2 A_1 - a\Delta_3 = 0.$$

Учитывая формулы (40), (44), после простых вычислений получаем

$$A_3 = -\frac{a\delta_3}{2} - \frac{243a\nu h_1^3}{2048}\sin(2\theta),$$
$$B_3 = \frac{\Delta_3}{3\nu} + \frac{2\Delta_1^3}{243\nu^5} - \frac{2\Delta_1\Delta_2}{27\nu^3} + \frac{\Delta_1\delta_1^2}{54\nu^3} - \frac{\delta_1\delta_2}{6\nu} - \frac{9h_1^2\Delta_1}{512\nu} - \frac{243\nu h_1^3}{2048}\cos(2\theta).$$

Эти формулы, а также (40) и (44) позволяют записать систему дифференциальных уравнений (8) в виде (18) с коэффициентами

$$\delta = \varepsilon\delta_1 + \varepsilon^2\delta_2 + \varepsilon^3\delta_3, \quad r = \varepsilon^3 r_3, \quad s = \varepsilon s_1 + \varepsilon^2 s_2 + \varepsilon^3 s_3, \tag{46}$$

в которых

$$r_3 = -\frac{243\nu h_1^3}{1024}, \quad s_1 = \frac{2\Delta_1}{3\nu}, \quad s_2 = \frac{2\Delta_2}{3\nu} - \frac{2\Delta_1^2}{27\nu^3} - \frac{\delta_1^2}{6\nu} - \frac{27\nu h_1^2}{128},$$
$$s_3 = \frac{2\Delta_3}{3\nu} - \frac{4\Delta_1\Delta_2}{27\nu^3} + \frac{4\Delta_1^3}{243\nu^5} + \frac{\Delta_1\delta_1^2}{27\nu^3} - \frac{\delta_1\delta_2}{3\nu} - \frac{9\Delta_1 h_1^2}{256\nu}. \tag{47}$$

Подстановка (20) приводит систему (18) к системе (21) и далее к равенству (22), определяющему границу области параметрического резонанса. При подстановке разложений (46) в (22) приходим к системе равенств

$$s_1^2 + \delta_1^2 = 0, \quad s_1 s_2 + \delta_1\delta_2 = 0, \quad s_2^2 + 2s_1 s_3 + \delta_2^2 + 2\delta_1\delta_3 = 0,$$
$$s_2 s_3 + \delta_2\delta_3 = 0, \quad s_3^2 + \delta_3^2 = r_3^2.$$

Из первого следует $s_1 = \delta_1 = 0$. При этих значениях справедливо второе равенство. Третье принимает вид $s_2^2 + \delta_2^2 = 0$, откуда получаем $s_2 = \delta_2 = 0$, и, значит, справедливо четвертое равенство. Граница области параметрического резонанса определяется пятым равенством

$$s_3^2 + \delta_3^2 = r_3^2.$$

Уточним формулы для s_2 и s_3 (47). При $s_1 = 0$ имеем $\Delta_1 = 0$. Тогда с учетом значения $\delta_1 = 0$ получаем

$$s_2 = \frac{2\Delta_2}{3\nu} - \frac{27\nu h_1^2}{128}, \quad s_3 = \frac{2\Delta_3}{3\nu}.$$

Из условия $s_2 = 0$ следует

$$\Delta_2 = \frac{81\nu^2 h_1^2}{256}.$$

Теперь запишем подробно пятое равенство, умножая его на ε^6:

$$\frac{4(\varepsilon^3\Delta_3)^2}{9\nu^2} + (\varepsilon^3\delta_3)^2 = \left(\frac{243}{1024}\right)^2 \nu^2(\varepsilon h_1)^6.$$

Подставим выражение

$$\varepsilon^3\Delta_3 = \omega^2 - \frac{9\nu^2}{4} - \varepsilon^2\Delta_2,$$

полученное из формулы (2):

$$\frac{4}{9\nu^2}\left(\omega^2 - \frac{9\nu^2}{4} - \varepsilon^2\Delta_2\right)^2 = \left(\frac{243}{1024}\right)^2 \nu^2 h^6 - \delta^2.$$

Подставим сюда Δ_2:

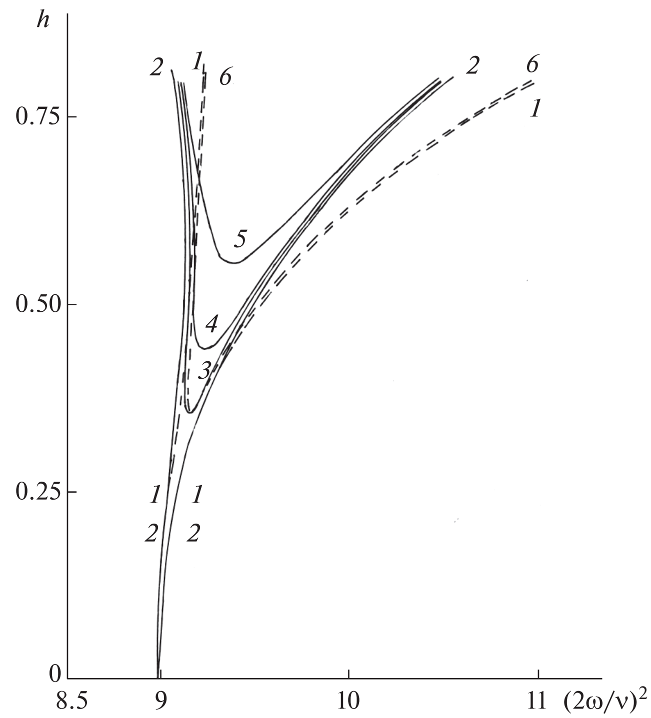
$$\frac{4}{9\nu^2}\left(\omega^2 - \frac{9\nu^2}{4} - \frac{81\nu^2 h^2}{256}\right)^2 = \left(\frac{243}{1024}\right)^2 \nu^2 h^6 - \delta^2.$$

Выразим $(2\omega/\nu)^2$. Для этого умножаем на $36/\nu^2$ и извлекаем квадратный корень. В результате получаем границу области параметрического резонанса на плоскости параметров $((2\omega/\nu)^2, h)$

$$\left(\frac{2\omega}{\nu}\right)^2 = 9 + \frac{81h^2}{64} \pm \sqrt{\left(\frac{81}{64}\right)^3 h^6 - \frac{36\delta^2}{\nu^2}}. \tag{48}$$

В [1] под корнем при δ^2 стоит множитель 324 (см. формулу (17.64)).

На фиг. 3 показана граница (48) третьей области параметрического резонанса при значениях затуханий $\delta/\nu = 0, 0.01$; 0.02; 0.04 (кривые *2*, *3*, *4*, *5* соответственно). При значении $\delta/\nu = 0.01$ изображена также граница *6* (штриховая линия), полученная численным интегрированием уравнения Матье (28). Штриховая линия *1* – граница при отсутствии затухания – также результат численного интегрирования.



Фиг. 3

5. ГРАНИЦЫ ОБЛАСТЕЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $\ddot{x} + \delta\dot{x} + [a + q\cos(2t)]x = 0$

Уравнение Матье в такой записи часто встречается в литературе (см., например, [4], [2]). Для него из формул (27), (38), (48), полученных из уравнения (1), выведем формулы, описывающие границы трех областей параметрического резонанса на плоскости параметров (a, q).

Из сравнения уравнений следуют соотношения

$$\omega^2 = a, \quad h = -\frac{q}{a} \sim \varepsilon, \quad \nu = 2. \tag{49}$$

Формула (27), справедливая в случае резонанса $\omega \approx \nu/2 = 1$, приобретает вид

$$a = 1 \pm \sqrt{\frac{q^2}{4a^2} - \delta^2} + \frac{7q^2}{32a^2}.$$

Поскольку параметры q и δ имеют одинаковый порядок малости ($\sim\varepsilon$), положим $\delta = kq$, где $k \sim 1$, и перепишем это выражение

$$a = 1 \pm q\sqrt{\frac{1}{4a^2} - k^2} + \frac{7q^2}{32a^2}. \tag{50}$$

Корни a уравнения будем искать в виде разложения по степеням q

$$a = 1 + qa_1 + q^2a_2 + q^3a_3 + \ldots. \tag{51}$$

Сделаем разложение во втором слагаемом правой части (50)

$$\sqrt{\frac{1}{4a^2} - k^2} = \sqrt{\frac{1}{4} - k^2} + \left(\sqrt{\frac{1}{4a^2} - k^2}\right)'_a\Bigg|_{a=1}(qa_1 + q^2a_2 + \cdots) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{4a^2} - k^2}\right)''_{a^2}\Bigg|_{a=1}(qa_1 + \cdots)^2 + \cdots =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} - k^2} - \frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{4} - k^2}}(qa_1 + q^2a_2 + \cdots) + \frac{1 - 6k^2}{16\left(\frac{1}{4} - k^2\right)^{3/2}}(q^2a_1^2 + \cdots),$$

в третьем слагаемом –

$$\frac{1}{a^2} = 1 - 2qa_1 + \ldots.$$

Подставим эти разложения и (51) в уравнение (50), приравняем выражения с одинаковыми степенями q в левой и правой частях:

$$q: \ a_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{4} - k^2}; \quad q^2: \ a_2 = \mp\frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{4} - k^2}}a_1 + \frac{7}{32}.$$

Отсюда

$$a_2 = -\frac{1}{32}.$$

Подставляя $a_{1,2}$ в (51) и учитывая формулу $k = \delta/q$, получаем выражение, описывающее границу области параметрического резонанса $a \approx 1$ на плоскости параметров (a, q)

$$a = 1 \pm \frac{\sqrt{q^2 - 4\delta^2}}{2} - \frac{q^2}{32}. \quad (52)$$

При резонансе $\omega \approx \nu = 2$ с использованием формул (49) запишем выражение (38) для границы области параметрического резонанса

$$a = 4 + \frac{2q^2}{3a^2} \pm \sqrt{\frac{q^4}{a^4} - 4\delta^2}.$$

Ищем решение этого уравнения, зависящего от a, в виде

$$a = 4 + qa_1 + q^2a_2 + q^3a_3 + \ldots.$$

Учитывая оценку $\delta \sim q^2$ и полагая $\delta = kq^2$, разлагая функции по степеням q и приравнивая выражения с одинаковыми степенями q в левой и правой частях уравнения, находим

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{24} \pm \sqrt{\frac{1}{256} - 4k^2}, \quad a_3 = 0.$$

Таким образом, сохраняя точность третьего приближения, получаем границу области параметрического резонанса на плоскости параметров (a, q)

$$a = 4 + \frac{q^2}{24} \pm \sqrt{\frac{q^4}{256} - 4\delta^2}. \quad (53)$$

В случае $\omega \approx 3\nu/2 = 3$ с использованием формул (49) и $\delta = kq^3$ запишем выражение (48) для границы области параметрического резонанса

$$a = 9 + \frac{81q^2}{64a^2} \pm q^3\sqrt{\frac{81^3}{64^3a^6} - 9k^2}.$$

Ищем решение a в виде разложения

$$a = 9 + qa_1 + q^2a_2 + q^3a_3 + \ldots.$$

Тогда во втором слагаемом в правой части

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{81} - \frac{2q}{729}a_1 + \ldots.$$

Из сравнения коэффициентов при одинаковых степенях q получаем

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{64}, \quad a_3 = \pm\sqrt{\frac{1}{64^3} - 9k^2}.$$

Окончательно имеем

$$a = 9 + \frac{q^2}{64} \pm \sqrt{\left(\frac{q^3}{512}\right)^2 - 9\delta^2}. \quad (54)$$

Формулы (52)–(54) получены асимптотическим методом усреднения [3], [4] в статье [2]. При этом уравнение Матье с параметрами a и q приводилось к системе уравнений, содержащей несколько быстрых фаз, как это делалось для уравнений Матье в [4]–[6], а также уравнения Хилла без затухания в [10] и с затуханием в [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
2. *Беломытцева Е.Г., Курин А.Ф., Туленко Е.Б.* Задача Коши для уравнения Матье с затуханием при параметрическом резонансе // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. 2018. № 3. С. 105–125.
3. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981.
4. *Гребеников Е.А.* Метод усреднения в прикладных задачах. М.: Наука, 1986.
5. *Курин А.Ф.* Задача Коши для уравнения Матье при параметрическом резонансе // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 4. С. 633–650.
6. *Курин А.Ф.* Задача Коши для уравнения Матье вдали от параметрического резонанса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 8. С. 1419–1433.
7. *Штокало И.З.* Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Киев: Изд-во АН Украинской ССР, 1960.
8. *Колесов Ю.С., Майоров В.В.* Новый метод исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами // Дифференц. ур-ния. 1974. Т. 10. № 10. С. 1778–1788.
9. *Горелик Г.* Резонансные явления в линейных системах с периодически меняющимися параметрами // Ж. теор. физ. 1935. Т. 5. № 3. С. 489–517.
10. *Курин А.Ф.* Спектральный критерий устойчивости и задача Коши для уравнения Хилла при параметрическом резонансе // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 3. С. 498–511.
11. *Беломытцева Е.Г., Курин А.Ф., Туленко Е.Б.* Спектральный критерий устойчивости и задача Коши для уравнения Хилла с затуханием при параметрическом резонансе// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. 2019. № 1. С. 69–90.