

**УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

УДК 517.54

**ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ КОНФОРМНОГО
ОТОБРАЖЕНИЯ КРУГОВОГО ТРЕУГОЛЬНИКА**

© 2022 г. С. В. Пикулин¹, *

¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: spikulin@gmail.com

Поступила в редакцию 13.05.2022 г.
Переработанный вариант 17.06.2022 г.
Принята к публикации 07.07.2022 г.

Показано, что конформное отображение на полуплоскость кругового треугольника, имеющего один нулевой угол в бесконечно удаленной точке и два равных между собой ненулевых угла, может быть продолжено в полуполосу на основании принципа симметрии Римана–Шварца. Задача об аналитическом продолжении такого отображения возникает в качестве вспомогательной при построении конформного отображения L -образной области на полуплоскость. Библ. 6. Фиг. 2.

Ключевые слова: круговой треугольник, аналитическое продолжение, принцип симметрии Римана–Шварца.

DOI: 10.31857/S0044466922120110

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим конформное отображение кругового треугольника T , изображенного на фиг. 1а (треугольник T заштрихован) на полуплоскость, осуществляемое аналитической функцией

$$w = \mathcal{F}(z) : T \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{H}^+, \quad (1)$$

которая переводит вершины A, B, C в точки $0, 1, \infty$ соответственно. Такое отображение существует и определено однозначно (см. [1], т. 2, гл. 1, § 2).

Возможно ли аналитически продолжить отображение (1) через граничную дугу \widehat{BC} треугольника T в полуполосу, ограниченную прямолинейным отрезком BC ? В этом заключается один из вопросов, возникающих при построении конформного отображения L -образного многоугольника на полуплоскость (см. [2]–[5]). Положительный ответ на этот вопрос дает теорема 1 настоящей работы.

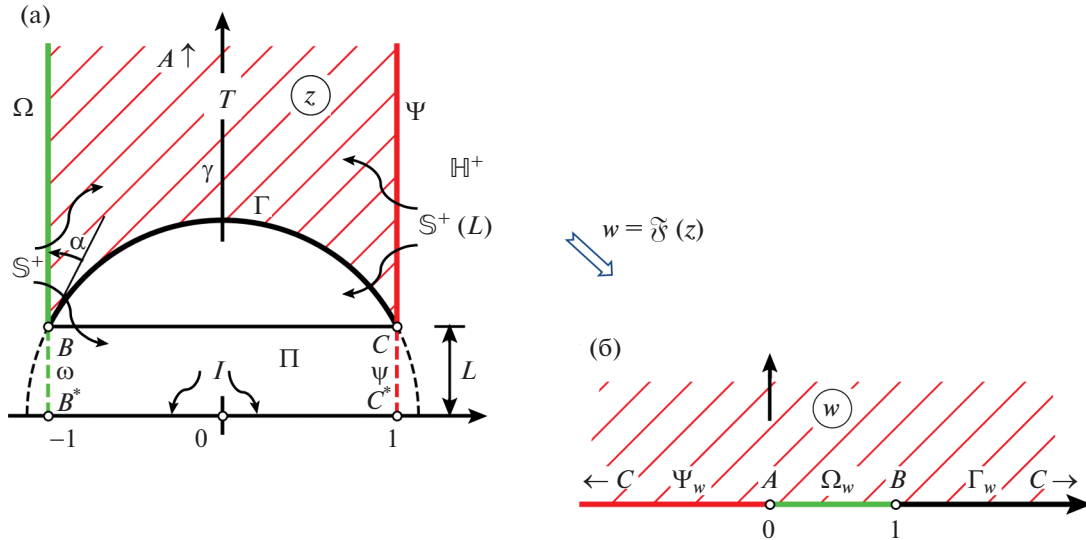
Треугольник $Tz \in \mathbb{C}$ обладает осевой симметрией относительно вертикальной полуоси γ , имеет нулевой угол при вершине A , расположенной в бесконечности, углы треугольника при вершинах B и C одинаковы и равны $\alpha \in (0, \pi/2)$. Введем для сторон этого треугольника следующие обозначения:

$$\Omega := \widehat{AB}, \quad \Gamma := \widehat{BC}, \quad \Psi := \widehat{CA}, \quad (2)$$

где Ω и Ψ являются вертикальными лучами, центр дуги Γ расположен в начале координат, которое будем обозначать через O . Вершины B и C имеют комплексные координаты $-1 + iL$ и $1 + iL$ соответственно, где $L = \text{tg } \alpha$. Введем следующие обозначения для полуполосы и полуплоскости:

$$\mathbb{S}^+(h) := \{\text{Re } z \in (-1, 1), \text{Im } z > h\}, \quad \mathbb{S}^+ := \mathbb{S}^+(0), \quad h \geq 0,$$

$$\mathbb{H}^+(h) := \{\text{Im } z > h\}, \quad \mathbb{H}^+ = \mathbb{H}^+(0).$$



Фиг. 1. Конформное отображение треугольника T на полуплоскость.

Теорема 1. Функция (1) может быть аналитически продолжена в полуплоску $S^+(L)$.

Доказательство теоремы 1 дано разд. 2.

Обозначим через B^* точку $z = -1$ и через C^* – точку $z = +1$, а также введем обозначения для замкнутого прямоугольника BB^*C^*C и его сторон:

$$\Pi := \{Re z \in [-1, 1], Im z \in [0, L]\}, \quad I := B^*C^*, \quad \omega := BB^*, \quad \psi := CC^*. \quad (3)$$

Внутренность плоской фигуры $X \subset \mathbb{C}$ будем обозначать через $int X$, дугу λ без конечных точек – через $int \lambda$. Через X^λ обозначим образ фигуры X под действием круговой симметрии (инверсии) относительно окружности, содержащей дугу λ .

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ПО ПРИНЦИПУ СИММЕТРИИ

2.1. Правильные круговые триангуляции

В качестве основного инструмента аналитического продолжения функции $\mathcal{F}(z)$ будем применять принцип симметрии Римана–Шварца (см. [6, ч. 3, гл. 4, § 5]), пользуясь тем, что стороны Ω, Γ, Ψ треугольника T переходят в соответствующие промежутки вещественной оси $\Omega_w := (0, 1), \Gamma_w := (1, +\infty)$ и $\Psi_w := (-\infty, 0)$.

Введем следующее понятие.

Определение 1. Правильной круговой триангуляцией односвязной непустой области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ назовем тройку $(\mathcal{D}, \Delta, \Lambda)$, где Δ – конечное или счетное множество круговых треугольников, Λ – конечное или счетное (возможно, пустое) множество круговых дуг, являющихся сторонами треугольников из Δ , если выполнены следующие условия:

1) различные треугольники $P_1, P_2 \in \Delta$ не пересекаются во внутренних точках:

$$int P_1 \cap int P_2 = \emptyset; \quad (4)$$

2) каждая дуга $\lambda \in \Lambda$ является стороной ровно двух треугольников из Δ , причем эти треугольники симметричны друг другу относительно λ ;

3) треугольники из Δ и дуги из Λ в совокупности исчерпывают область \mathcal{D} :

$$\mathcal{D} = \bigcup_{P \in \Delta} int P \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda} int \lambda. \quad (5)$$

Подчеркнем, что множество дуг Λ , фигурирующее в определении 1, не обязательно совпадает со множеством всех граничных дуг треугольников из Δ , но лишь является его подмножеством. В Λ не входят дуги, лежащие на границе области \mathcal{D} .

Лемма 1. *Если для некоторой правильной круговой триангуляции $\mathcal{D} = (\mathcal{D}, \Delta, \Lambda)$ справедливо включение $T \in \Delta$, то функция (1) аналитически продолжается в область \mathcal{D} .*

Доказательство. Введем в рассмотрение правильную круговую триангуляцию $\mathcal{D}_1 = (\mathcal{D}_1, \Delta_1, \Lambda_1)$, отнеся к множеству Δ_1 треугольник T и все такие треугольники $P \in \Delta$, которые можно связать с T цепочкой элементов из Δ , имеющей конечную длину:

$$T, T_1, \dots, T_n = P, \quad T_j \in \Delta, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{6}$$

где каждые два соседних треугольника граничат по некоторой общей дуге $\lambda_j \in \Lambda$ и, следовательно, симметричны друг другу относительно λ_j . Все такие дуги по всевозможным цепочкам вида (6) отнесем ко множеству Λ_1 . Покажем, что $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}$.

Рассмотрим дугу λ из $\Lambda \setminus \Lambda_1$ и покажем, что она не может являться стороной какого-либо треугольника $P \in \Delta_1$. В самом деле, в противном случае существовала бы цепочка

$$T, T_1, \dots, T_{n-1}, P, P^\lambda$$

вида (6), где последние два треугольника соединены через дугу λ , тогда $P^\lambda \in \Delta_1$ и $\lambda \in \Lambda_1$, что противоречит сделанному предположению. Следовательно, λ является общей стороной двух треугольников из $\Delta \setminus \Delta_1$, и, значит, множество $\mathcal{D}_2 := \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_1$ является открытым, т.е. содержащим вместе с каждой своей точкой и некоторую ее окрестность. Но поскольку область \mathcal{D} по определению связна, то она не может являться объединением двух непересекающихся открытых множеств, следовательно, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$, и $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1$. Таким образом, для каждого треугольника $P \in \Delta$ существует цепочка вида (6).

Далее покажем от противного, что для каждого $P \in \Delta$ существует единственная цепочка (6), состоящая из попарно различных треугольников. Предположим, что для некоторого треугольника $P \in \Delta$ найдется две такие цепочки, отличные друг от друга:

$$T = T_0, T_1, \dots, T_m = Q, T_{m+1}, \dots, T_{n_1} = P, \\ T = T_0, T_1, \dots, T_m = Q, T'_{m+1}, \dots, T'_{n_2} = P, T_{m+1} \neq T'_{m+1},$$

где через Q обозначен их последний совпадающий элемент. Отбросив общее начало обеих цепочек до Q и обратив порядок во второй из них, соединим обе цепочки в одну новую, начинающуюся и заканчивающуюся треугольником Q :

$$Q, T_{m+1}, \dots, T_{n_1-1}, T_{n_1} = P = T'_{n_2}, T'_{n_2-1}, \dots, T'_{m+1}, Q, \tag{7}$$

где, по-прежнему, каждые два соседних элемента являются симметричными относительно общей стороны, принадлежащей Λ . Если в цепочке (7) найдется пара повторяющихся элементов (кроме пары, состоящей из первого и последнего элемента), то заменим ограничиваемый ими отрезок цепочки одним экземпляром дублирующегося элемента. Устраняя дубли таким образом и отождествляя первый элемент с последним, получаем из (7) циклическую цепочку, содержащую более одного элемента, в которой все треугольники попарно различны, и выполнено условие симметричности соседних треугольников относительно общей граничной дуги.

Проведем замкнутый жорданов контур через область, объединяющую треугольники построенной циклической цепочки и их общие стороны, таким образом, чтобы путь однократно пересекал по внутренней точке каждую из граничных дуг, разделяющих пары соседних треугольников. Тогда этот контур, во-первых, лежит целиком внутри области \mathcal{D} , а во-вторых, заключает внутри себя по крайней мере одну вершину треугольника Q . Но вершины треугольников из Δ не лежат внутри области \mathcal{D} согласно определению 1, — получаем противоречие с условием односвязности \mathcal{D} . Таким образом, цепочка попарно различных треугольников (6) для каждого $P \in \Delta$ определена однозначно.

С помощью индукции по длине цепочки устанавливаем, что функция $\mathcal{F}(z)$ допускает аналитическое продолжение по принципу симметрии в каждый из треугольников $P \in \Delta$, через какую-

либо из его сторон $\lambda_p \in \Lambda$, при этом каждая граничная дуга такого треугольника переходит в один из трех прямолинейных участков вещественной оси – Ω_w, Ψ_w либо Γ_w . Лемма доказана.

Определение 2. Правильные круговые триангуляции \mathfrak{D}_1 и \mathfrak{D}_2 двух не пересекающихся областей,

$$\mathfrak{D}_1 = (\mathfrak{D}_1, \Delta_1, \Lambda_1), \quad \mathfrak{D}_2 = (\mathfrak{D}_2, \Delta_2, \Lambda_2), \quad \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2 = \emptyset, \quad (8)$$

назовем *смежными по круговой дуге λ* , если тройка

$$\mathfrak{D}_1 \#_\lambda \mathfrak{D}_2 := (\mathfrak{D}_3, \Delta_3, \Lambda_3), \quad \mathfrak{D}_3 = \mathfrak{D}_1 \cup \mathfrak{D}_2 \cup \lambda, \quad \Delta_3 = \Delta_1 \cup \Delta_2, \quad \Lambda_3 = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \{\lambda\}, \quad (9)$$

является правильной круговой триангуляцией. Такую тройку будем называть соединением \mathfrak{D}_1 и \mathfrak{D}_2 по дуге λ .

Предложение 1. *Правильные круговые триангуляции (8) не пересекающихся областей являются смежными по дуге λ тогда и только тогда, когда найдется пара треугольников $P_1 \in \Delta_1, P_2 \in \Delta_2$, для которых λ является общей стороной и которые симметричны друг другу относительно λ .*

Доказательство. Если найдется пара треугольников $P_1 \in \Delta_1, P_2 \in \Delta_2$, симметричных друг другу относительно их общей стороны λ , то справедливость условий определения 1 для тройки (9) проверяется непосредственно.

Обратно, предположим, что тройка (9) представляет собой правильную круговую триангуляцию. Тогда найдутся треугольники $P_1, P_2 \in \Delta_3$, для которых λ является их общей стороной, причем они симметричны друг другу относительно λ . Если при этом оба треугольника P_1, P_2 принадлежат Δ_1 , то, во-первых, множество $\mathfrak{D}_1 \cup \text{int } \lambda$ является открытым, и, во-вторых, λ не пересекается с \mathfrak{D}_2 . Тогда множество \mathfrak{D}_3 распадается в объединение непустых непересекающихся открытых множеств $\mathfrak{D}_1 \cup \text{int } \lambda$ и \mathfrak{D}_2 , что противоречит требованию его связности. Следовательно, $P_1 \in \Delta_1, P_2 \in \Delta_2$. Предложение доказано.

Отметим, что всякое круговое преобразование, в том числе, симметрия относительно круговой дуги, а также любое евклидово движение плоскости \mathbb{C} , переводит правильную круговую триангуляцию также в правильную круговую триангуляцию.

Пусть $\mathfrak{D} = (\mathfrak{D}, \Delta, \Lambda)$ – некоторая правильная круговая триангуляция, содержащая треугольник T , область \mathfrak{D} которой лежит в полуполосе \mathbb{S}^+ , т.е.

$$T \subset \mathfrak{D} \subset \mathbb{S}^+, \quad T \in \Delta. \quad (10)$$

Рассмотрим образы \mathfrak{D} под действием преобразований S^n параллельного переноса вдоль горизонтальной оси на расстояние, кратное ширине полуполосы:

$$S^n : z \mapsto z + 2n, \quad z \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (11)$$

$$\mathfrak{D}^n := (\mathfrak{D}^n, \Delta^n, \Lambda^n), \quad \mathfrak{D}^n = S^n \mathfrak{D}, \quad \Delta^n = S^n \Delta, \quad \Lambda^n = S^n \Lambda.$$

В силу того, что $S^j \mathbb{S}^+ \cap S^k \mathbb{S}^+ = \emptyset$ при $j \neq k$ и треугольники $S^n T$ и $S^{n+1} T$ симметричны относительно своей общей стороны – вертикального луча

$$\Phi^n := S^{n+1} \Omega = S^n \Psi,$$

пользуясь предложением 1, находим, что триангуляции \mathfrak{D}^n и \mathfrak{D}^{n+1} смежны по дуге Φ^n . Определим правильную круговую триангуляцию

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{D}} &= \dots \#_{\Phi^{-2}} \mathfrak{D}^{-1} \#_{\Omega} \mathfrak{D} \#_{\Psi} \mathfrak{D}^1 \#_{\Phi^1} \mathfrak{D}^2 \#_{\Phi^2} \dots := (\tilde{\mathfrak{D}}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Lambda}), \\ \tilde{\mathfrak{D}} &= \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (\text{int } \mathfrak{D}^n \cup \text{int } \Phi^n), \quad \tilde{\Delta} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Delta^n, \quad \tilde{\Lambda} = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Lambda^n \right) \cup \{\Phi^n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \end{aligned} \quad (12)$$

которую будем называть *периодическим продолжением* триангуляции \mathfrak{D} .

Подчеркнем, что наличие 2-периодической структуры в геометрическом расположении круговых треугольников триангуляции (12) не означает, что также и функция $\mathcal{F}(z)$, аналитически продолженная в область $\tilde{\mathfrak{D}}$ в соответствии с леммой 1, окажется 2-периодичной, поскольку дуги

Ω и Ψ переходят в различные промежутки вещественной оси плоскости w . Однако поскольку точки $z, (z + 4) \in \tilde{\mathcal{D}}$ получаются друг из друга композицией двух отражений относительно находящихся между ними вертикальных лучей Φ^j, Φ^{j+1} , образ каждого из которых под действием $\mathcal{F}(z)$ является промежутком вещественной прямой, то по принципу симметрии и в силу единственности аналитического продолжения в односвязную область имеем $\mathcal{F}(z) = \mathcal{F}(z + 4)$, т.е. функция $\mathcal{F}(z)$ является периодической в $\tilde{\mathcal{D}}$ с периодом 4.

Определение 3. Правильные круговые триангуляции $\mathcal{D}_1 = (\mathcal{D}_1, \Delta_1, \Lambda_1)$ и $\mathcal{D}_2 = (\mathcal{D}_2, \Delta_2, \Lambda_2)$ назовем *совместимыми*, если их объединение, заданное равенством

$$\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 := (\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2, \Delta_1 \cup \Delta_2, \Lambda_1 \cup \Lambda_2), \tag{13}$$

является правильной круговой триангуляцией.

По аналогии с объединением (13) определим пересечение $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ правильных круговых триангуляций, а также отношение включения \subset . Если $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$, то справедливы равенства

$$\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_2, \quad \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1,$$

следовательно, \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 являются совместимыми согласно определению 3.

Предложение 2. Если заданы правильные круговые триангуляции $\mathcal{D}_1 = (\mathcal{D}_1, \Delta_1, \Lambda_1)$ и $\mathcal{D}_2 = (\mathcal{D}_2, \Delta_2, \Lambda_2)$ пересекающихся областей \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 ,

$$\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \neq \emptyset, \tag{14}$$

при этом пересечение

$$\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 := (\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2, \Delta_1 \cap \Delta_2, \Lambda_1 \cap \Lambda_2) \tag{15}$$

есть правильная круговая триангуляция, то триангуляции \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 являются совместимыми.

Доказательство. Поскольку пересечение областей $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ обладает правильной круговой триангуляцией (15), то по определению 1 является односвязной областью. Из этого и из условия (14) следует, что объединение $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ также является односвязной областью.

Предположим, что найдутся два различных треугольника $P_1, P_2 \in \Delta_1 \cup \Delta_2$, пересекающихся по внутренней точке $z \in \text{int } P_1 \cap \text{int } P_2$. Тогда $P_1 \in \Delta_1, P_2 \in \Delta_2$, так как \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 являются правильными триангуляциями. Поскольку (15) также является правильной триангуляцией, то точка z является внутренней для некоторого элемента – треугольника или дуги, принадлежащего одновременно и к \mathcal{D}_1 , и к \mathcal{D}_2 , причем этот элемент должен совпадать одновременно и с P_1 , и с P_2 , так как в правильной круговой триангуляции каждая точка области принадлежит одному и только одному элементу триангуляции (дуге или треугольнику). Полученное противоречие показывает, что условие (4) выполнено для тройки (13).

Справедливость остальных требований определения 1 для тройки (13) следует из условий предложения непосредственно. Предложение 2 доказано.

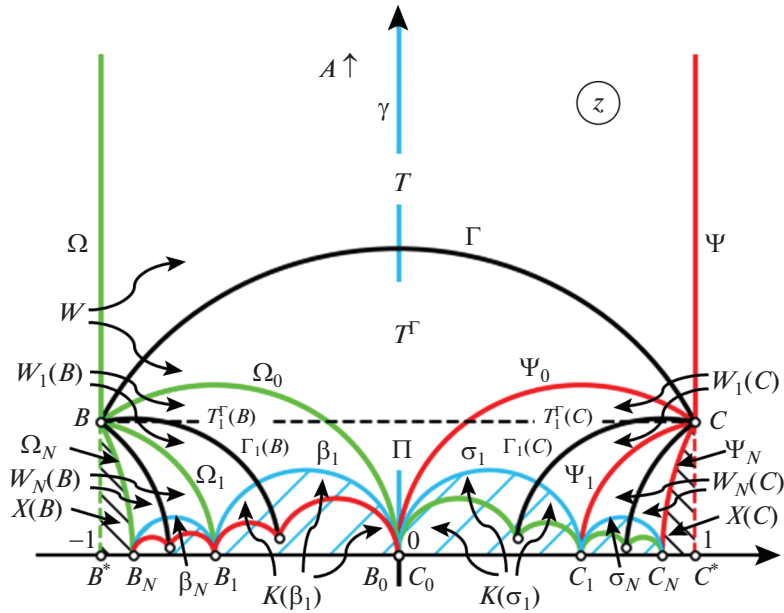
2.2. Построение области аналитичности функции $\mathcal{F}(z)$

Перейдем к построению односвязной области \mathcal{N} , содержащей полуполосу $\mathbb{S}^+(L)$ и допускающей аналитическое продолжение функции $\mathcal{F}(z)$. Для этого мы укажем правильную круговую триангуляцию $\mathfrak{A} = (\mathcal{N}, \Delta, \Lambda)$ вида (10), т.е.

$$T \subset \mathbb{S}^+(L) \subset \mathcal{N} \subset \mathbb{S}^+, \quad T \in \Delta, \tag{16}$$

тогда согласно лемме 1 отображение (1) окажется аналитически продолженным в область \mathcal{N} .

Присоединим к треугольнику T в составе минимальной содержащей его триангуляции $\mathfrak{T} := (T, \{T\}, \emptyset)$ смежную с ней по дуге Γ триангуляцию $\mathfrak{T}^\Gamma = (T^\Gamma, \{T^\Gamma\}, \emptyset)$, область которой суть симметричный T относительно Γ круговой треугольник $T^\Gamma = BCO$. В результате объединения по-



Фиг. 2. Объединение кругового многоугольника \mathcal{N}_0 , системы полукругов $K(\Xi_0)$ и замкнутого множества X_0 содержит полуполосу \mathbb{S}^+ .

лучим область в виде кругового четырехугольника W , снабженную правильной круговой триангуляцией

$$\mathfrak{W} = (W, \{T, T^\Gamma\}, \{\Gamma\}), \quad W := \text{int } T \cup \text{int } \Gamma \cup \text{int } T^\Gamma. \tag{17}$$

Четырехугольник W имеет нулевые углы при вершинах A и O , и углы $2\alpha \in (0, \pi)$ при вершинах B и C . Если значение α принадлежит диапазону $\alpha \in [\pi/4, \pi/2)$, то область W содержит полуполосу $\mathbb{S}^+(L)$, т.е. триангуляция (17) удовлетворяет условию (16), и теорема в этом случае доказана.

Рассмотрим теперь дополнительный промежуток значений угла α , т.е. $\alpha \in (0, \pi/4)$. Присоединим к триангуляции (17) смежную с ней по стороне $\Omega_0 := \Omega^\Gamma$ (см. фиг. 2) четырехугольника W триангуляцию

$$\mathfrak{W}_1(B) := \mathfrak{W}^{\Omega_0},$$

затем к результату присоединим триангуляцию $\mathfrak{W}_2(B)$, смежную с $\mathfrak{W}_1(B)$ по дуге $\Omega_1 := \Omega^{\Omega_0}$ и т.д. – проделаем эту операцию N раз, где

$$N := \left\lceil \frac{\pi}{2\alpha} \right\rceil - 1 \geq 1,$$

$$\mathfrak{W}_j(B) := \mathfrak{W}^{\Omega_0 \dots \Omega_{j-1}}, \quad \Omega_j = \Omega_{j-2}^{\Omega_{j-1}}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad \Omega_{-1} := \Omega,$$

каждая из дуг Ω_j выходит из точки B в полуполосу \mathbb{S}^+ под углом $(2\alpha j)$ к лучу Ω и заканчивается в некоторой точке $B_j \in I$, образуя прямой угол с вещественной осью. Составляющие триангуляцию $\mathfrak{W}_j(B)$ треугольники и их общую граничную дугу обозначим следующим образом:

$$\mathfrak{W}_j(B) = (W_j(B), \{T_j(B), T_j^\Gamma(B)\}, \{\Gamma_j(B)\}), \quad W_j(B) := W^{\Omega_0 \dots \Omega_{j-1}}, \tag{18}$$

$$T_j(B) := T^{\Omega_0 \dots \Omega_{j-1}}, \quad T_j^\Gamma(B) := T^{\Gamma \Omega_0 \dots \Omega_{j-1}}, \quad \Gamma_j(B) := \Gamma^{\Omega_0 \dots \Omega_{j-1}}. \tag{19}$$

По аналогии с триангуляциями четырехугольников (18) построим серию из N триангуляций $\mathfrak{W}_j(C)$ четырехугольных областей $W_j(C)$, имеющих на границе общую вершину C и получаемых из \mathfrak{W} последовательными отражениями относительно дуг

$$\Psi_0 := \Psi^\Gamma = \widehat{CC}_0, \quad \Psi_1 := \Psi^{\Psi_0} = \widehat{CC}_1, \quad \dots, \quad \Psi_{N-1} := (\Psi_{N-3})^{\Psi_{N-2}} = \widehat{CC}_{N-1},$$

образующих прямые углы с вещественной осью в концевых точках $C_j \in I, j = 0, 1, \dots, N$. Элементы триангуляций $\mathfrak{W}_j(C)$ находятся по формулам, аналогичным (19), с заменой B на C и Ω на Ψ .

Триангуляции $\mathfrak{W}_j(B), \mathfrak{W}, \mathfrak{W}_j(C)$ по построению являются смежными по граничным дугам Ω_j, Ψ_j . Соединяя их, получим симметричную относительно вертикальной оси правильную круговую триангуляцию

$$\mathfrak{N}_0 = (\mathcal{N}_0, \Delta_0, \Lambda_0) := \mathfrak{W}_N(B) \#_{\Omega_{N-1}} \dots \#_{\Omega_1} \mathfrak{W}_1(B) \#_{\Omega_0} \mathfrak{W} \#_{\Psi_0} \mathfrak{W}_1(C) \#_{\Psi_1} \dots \#_{\Psi_{N-1}} \mathfrak{W}_N(C), \quad (20)$$

область \mathcal{N}_0 которой является круговым многоугольником. Поскольку углы при вершинах B и C в этом многоугольнике имеют меру

$$\alpha_0 := 2\alpha \left[\frac{\pi}{2\alpha} \right],$$

превышающую $\pi/2$, то многоугольник \mathcal{N}_0 накрывает некоторую окрестность точек B и C в полуполосе $\mathbb{S}^+(L)$, однако может при этом не содержать всю эту полуполосу целиком.

Вертикальная полуось $\gamma = OA$ соединяет вершины двух нулевых углов четырехугольника W , лежит внутри него, $\text{int } \gamma \subset \text{int } W$, и служит осью симметрии как для самой области W , так и для содержащихся в ней треугольников $T, T^\Gamma \in \Delta_0$ и их общей стороны Γ .

Поскольку триангуляция $\mathfrak{W}_j(B)$ получена из \mathfrak{W} композицией последовательных круговых симметрий относительно дуг $\Omega_0, \dots, \Omega_{j-1}$, то составляющие ее элементы (19) и область $W_j(B)$ также обладают общей осью симметрии

$$\beta_j = \gamma^{\Omega_0 \dots \Omega_{j-1}} \subset \text{int } W_j(B),$$

соединяющей два нулевых угла B_{j-1} и B_j четырехугольника $W_j(B)$. Поскольку луч γ и все дуги Ω_k ортогональны вещественной оси, то и дуга β_j обладает этим свойством. Таким образом, β_j есть полуокружность, опирающаяся на отрезок $B_{j-1}B_j \subset I$ как на диаметр.

Открытый полукруг, стягиваемого полуокружностью ξ , обозначим через $K(\xi)$, а также введем обозначение

$$K(\Xi) := \bigcup_{\xi \in \Xi} K(\xi),$$

для объединения таких полукругов по некоторому множеству Ξ полуокружностей.

Также отметим, что полукруг $K(\beta_j)$ имеет непустое пересечение с треугольниками $T_j(B)$ и $T_j^\Gamma(B)$, но с другими треугольниками из множества Δ_0 не пересекается. Введем в связи с этим следующее понятие.

Определение 4. Полуокружность ξ назовем *совместимой с правильной круговой триангуляцией* $\mathfrak{D} = (\mathcal{D}, \Delta, \Lambda)$ области $\mathcal{D} \subset \mathbb{H}^+$, если ξ опирается на некоторый интервал $D(\xi)$ вещественной оси как на диаметр, стягиваемый ею полукруг $K(\xi)$ пересекает ровно два треугольника

$$P(\xi), P(\xi)^{\lambda(\xi)} \in \Delta, \quad (21)$$

граничащих по некоторой дуге $\lambda(\xi) \in \Lambda$, при этом дуга ξ полностью содержится в четырехугольной области

$$W(\xi) := (\text{int } P(\xi) \cup \text{int } P(\xi)^{\lambda(\xi)} \cup \text{int } \lambda(\xi)) \supset \text{int } \xi \quad (22)$$

и является общей осью круговой симметрии для $P(\xi), \lambda(\xi), P(\xi)^{\lambda(\xi)}$ и $W(\xi)$.

Проведенные выше построения показывают, что полуокружности $\beta_j, j = 1, 2, \dots, N$, являются совместимыми с правильной круговой триангуляцией \mathfrak{N}_0 . По аналогии с β_j построим полуокружности

$$\sigma_j = \gamma^{\Psi_0 \dots \Psi_{j-1}} \subset \text{int } W_j(C),$$

опирающиеся на интервалы $(C_{j-1}C_j)$ как на диаметры. Каждая из этих дуг является общей осью симметрии для соответствующей четырехугольной области $W_j(C)$ и для элементов, составляющих правильную круговую триангуляцию $\mathfrak{N}_j(C)$ этой области. Кроме того, дуги σ_j являются совместимыми с триангуляцией \mathfrak{N}_0 .

Отметим, что различные интервалы $(B_{j-1}B_j), (C_{k-1}C_k)$ попарно не пересекаются между собой, как и построенные на них как на диаметрах открытые полукруги $K(\beta_j), K(\sigma_k)$.

Определение 5. Множество Ξ полуокружностей назовем *совместимым с правильной круговой триангуляцией* $\mathfrak{D} = (\mathfrak{D}, \Delta, \Lambda)$, $\mathfrak{D} \subset \mathbb{H}^+$, если, во-первых, каждая дуга $\xi \in \Xi$ совместима с \mathfrak{D} в смысле определения 4 и, во-вторых, стягиваемые этими дугами полукруги $K(\xi)$ или, что эквивалентно, их диаметры $D(\xi)$, являющиеся интервалами вещественной оси, попарно не пересекаются между собой во внутренних точках.

Таким образом, система полуокружностей

$$\Xi_0 := \{\beta_1, \dots, \beta_N, \sigma_1, \dots, \sigma_N\} \tag{23}$$

является совместимой с триангуляцией \mathfrak{N}_0 в смысле определения 5. На фиг. 2 для объединения полукругов $K(\Xi_0)$ дана штриховка с наклоном вправо.

Отметим, что любое подмножество набора полуокружностей Ξ , удовлетворяющего определению 5, также является совместимым с триангуляцией \mathfrak{D} . Кроме того, если концы всех дуг $\xi \in \Xi$ лежат на отрезке I вещественной прямой, то их попарно не пересекающиеся диаметры $D(\xi)$ лежат внутри I , следовательно,

$$\sum_{\xi \in \Xi} \text{diam}(\xi) \leq |I|, \tag{24}$$

где $\text{diam}(\xi)$ – диаметр дуги ξ , $|I|$ – длина отрезка I . Свойством (24) по построению обладает набор полуокружностей (23).

Лемма 2. Пусть $\mathfrak{D}_1 = (\mathfrak{D}_1, \Delta_1, \Lambda_1)$, $\mathfrak{D}_2 = (\mathfrak{D}_2, \Delta_2, \Lambda_2)$ – правильные круговые триангуляции областей $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \subset \mathbb{H}^+$, совместимые между собой, Ξ_1, Ξ_2 – два набора полуокружностей, причем множество Ξ_j является совместимым с триангуляцией $\mathfrak{D}_j, j = 1, 2$, и пусть $v \in \Xi_1 \cap \Xi_2$ – общая дуга этих наборов. Тогда

- 1) триангуляции \mathfrak{D}_1 и $(\mathfrak{D}_2)^v$ являются совместимыми;
- 2) множество дуг

$$\Xi_3 := \Xi_1 \cup (\Xi_2)^v \setminus \{v\} \tag{25}$$

является совместимым с объединенной триангуляцией $\mathfrak{D}_3 := \mathfrak{D}_1 \cup (\mathfrak{D}_2)^v$;

- 3) справедливо неравенство

$$\sup_{\xi \in (\Xi_2)^v} \text{diam}(\xi) \leq \frac{1}{2} \text{diam}(v). \tag{26}$$

Доказательство. Согласно определению 4 найдется пара симметричных друг другу относительно общей стороны $\lambda^{(1)} \in \Lambda_1$ треугольников $P_1^{(1)}, P_2^{(1)} \in \Delta_1$, для которых полуокружность v является общей осью симметрии и содержится внутри соответствующего четырехугольника (22), который обозначим через W . Существуют также треугольники $P_1^{(2)}, P_2^{(2)} \in \Delta_2$ и дуга $\lambda^{(2)} \in \Lambda_2$ с аналогичными свойствами.

Триангуляции \mathfrak{D}_1 и \mathfrak{D}_2 совместимы, следовательно, формулой (13) определена объединенная правильная круговая триангуляция $\mathfrak{D}_1 \cup \mathfrak{D}_2$. В силу представления (5) и условия (4), если два

элемента триангуляции пересекаются по внутренней точке, то они совпадают. В данном случае элементы $P_k^{(1)}, \lambda_k^{(1)}$ пересекаются с элементами $P_k^{(2)}, \lambda_k^{(2)}, k = 1, 2$, по точкам дуги v . Отсюда следует совпадение (с точностью до переобозначений) треугольников и дуг:

$$P_1^{(1)} = P_1^{(2)}, \quad P_2^{(1)} = P_2^{(2)}, \quad \lambda^{(1)} = \lambda^{(2)},$$

составляющих правильную круговую триангуляцию \mathfrak{W} области W , причем

$$\mathfrak{W} \subset \mathfrak{D}_1, \quad \mathfrak{W} \subset \mathfrak{D}_2.$$

Множество $\mathfrak{D}_1 \setminus W$ лежит целиком снаружи полукруга $K(v)$ согласно определению 4, а множество $(\mathfrak{D}_2)^v \setminus W = (\mathfrak{D}_2 \setminus W)^v$ лежит целиком внутри $K(v)$, т.е. эти множества не пересекаются. Таким образом, определено непустое пересечение правильных круговых триангуляций

$$\mathfrak{D}_1 \cap (\mathfrak{D}_2)^v = \mathfrak{W},$$

и согласно предложению 2 триангуляции \mathfrak{D}_1 и $(\mathfrak{D}_2)^v$ являются совместимыми. Пункт 1 леммы доказан.

Семейство полуокружностей (25) состоит из двух не пересекающихся частей: во-первых, из множества $\Xi_1 \setminus \{v\}$, совместимого с \mathfrak{D}_1 и лежащего за пределами полукруга $K(v)$, во-вторых, из множества

$$(\Xi_2)^v \setminus \{v\} = (\Xi_2 \setminus \{v\})^v,$$

лежащего внутри этого полукруга и совместимого с $(\mathfrak{D}_2)^v$. Поскольку

$$K(\xi_1) \cap K(\xi_2) = \emptyset, \quad \xi_1 \in \Xi_1 \setminus \{v\}, \quad \xi_2 \in (\Xi_2 \setminus \{v\})^v,$$

то заключаем, что множество (25) образует семейство полуокружностей, совместимое с объединением $\mathfrak{D}_1 \cup (\mathfrak{D}_2)^v$. Это доказывает п. 2 леммы.

Диаметр $D(\xi)$ полуокружности $\xi \in \Xi_2$ как интервал вещественной прямой не пересекается с интервалом $D(v)$ по условию леммы. При инверсии относительно v дуга ξ переходит в другую полуокружность ξ^v , диаметр которой $D(\xi^v)$ расположен на отрезке, соединяющем центр v с соответствующим концом диаметра $D(v)$, т.е. на радиусе v . Из этого вытекает утверждение п. 3. Лемма 2 доказана.

Обозначим через $X(B)$ замкнутый круговой треугольник BB^*B_N , ограниченный дугами ω, Ω_N и отрезком B^*B_N вещественной оси, а через $X(C)$ – аналогичный треугольник CC^*C_N , ограниченный дугами ψ, Ψ_N и отрезком C^*C_N . На фиг. 2 для этих треугольников дана штриховка с наклоном влево. Замкнутое множество

$$X_0 := X(B) \cup X(C) \supset (\omega \cup \psi), \tag{27}$$

в совокупности с открытыми множествами \mathcal{N}_0 и $K(\Xi_0)$, не пересекаясь с ними, покрывает полуполосу \mathbb{S}^+ , т.е. справедливы следующие соотношения:

$$\mathbb{S}^+(L) \subset (\mathcal{N}_0 \cup K(\Xi_0)) \subset \mathbb{S}^+ \subset (\mathcal{N}_0 \cup K(\Xi_0) \cup X_0), \quad X_0 \subset \overline{\mathbb{P}},$$

$$\mathcal{N}_0 \cap X_0 = K(\Xi_0) \cap X_0 = \emptyset.$$

Лемма 3. *Существует последовательность троек*

$$(\mathfrak{N}_n, \Xi_n, X_n), \quad n = 0, 1, \dots, \tag{28}$$

где \mathfrak{N}_n – правильная круговая триангуляция вида (10)

$$\mathfrak{N}_n = (\mathcal{N}_n, \Delta_n, \Lambda_n), \quad T \subset \mathcal{N}_n \subset \mathbb{S}_+, \quad T \in \Delta_n,$$

$X_n \subset \mathbb{C}$ – замкнутое множество, Ξ_n – конечное или счетное множество полуокружностей, совместимое с \mathfrak{N}_n , при этом

$$\omega \cup \psi \subset X_n \subset \overline{\mathbb{P}}, \tag{29}$$

$$K(\Xi_n) \subset \mathbb{S}^+ \subset \mathcal{N}_n \cup K(\Xi_n) \cup X_n, \tag{30}$$

$$\mathcal{N}_n \cap X_n = K(\Xi_n) \cap X_n = \emptyset, \tag{31}$$

и последовательность (28) удовлетворяет условиям

$$\mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{N}_1 \subset \dots, \quad X_0 \subset X_1 \subset \dots \quad K(\Xi_0) \supset K(\Xi_1) \supset \dots, \tag{32}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\xi \in \Xi_n} \text{diam}(\xi) = 0. \tag{33}$$

Доказательство. Будем строить последовательность (28), члены которой удовлетворяют свойствам (29)–(31), с помощью индукции. Базу индукции при $n = 0$ составляет тройка $(\mathfrak{N}_0, \Xi_0, X_0)$, определенная формулами (20), (23), (27).

Предположим, что тройка $(\mathfrak{N}_n, \Xi_n, X_n)$ построена для некоторого $n \geq 0$, построим тогда тройку $(\mathfrak{N}_{n+1}, \Xi_{n+1}, X_{n+1})$.

Поскольку триангуляция \mathfrak{N}_n имеет вид (10), то существует ее периодическое продолжение $\tilde{\mathfrak{N}}_n$, определенное формулами (12). Определим также множество дуг $\tilde{\Xi}_n$ и замкнутое множество $\tilde{X}_n \subset \mathbb{C}$ формулами

$$\tilde{\Xi}_n := \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} S^j \Xi_n, \quad \tilde{X}_n := \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} S^j X_n, \tag{34}$$

где S^j – преобразование параллельного переноса на расстояние $2j$ вдоль горизонтальной оси, определенное выше (см. (11)). Тогда в силу условий (29), (30) справедливо включение

$$\mathbb{H}^+ \subset \tilde{\mathfrak{N}}_n \cup K(\tilde{\Xi}_n) \cup \tilde{X}_n, \tag{35}$$

причем множество дуг $\tilde{\Xi}_n$ совместимо с триангуляцией $\tilde{\mathfrak{N}}_n$ в смысле определения 5.

Значения диаметров дуг $\xi \in \Xi_n$ ограничены сверху, так как их сумма не превосходит длины отрезка I . Выберем полуокружность $v \in \Xi_n \subset \tilde{\Xi}_n$, имеющую наибольший диаметр. Применяя лемму 2 к триангуляциям $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{N}_n$ и $\mathfrak{D}_2 = \tilde{\mathfrak{N}}_n$, а также к совместимым с ними множествам полуокружностей Ξ_n и $\tilde{\Xi}_n$ и их общей дуге v , получаем правильную круговую триангуляцию

$$\mathfrak{N}_{n+1} := \mathfrak{N}_n \cup (\tilde{\mathfrak{N}}_n)^v \tag{36}$$

и совместимую с ней систему дуг

$$\Xi_{n+1} := \Xi_n \cup (\tilde{\Xi}_n)^v \setminus \{v\}. \tag{37}$$

Положим также

$$X_{n+1} := X_n \cup (\tilde{X}_n)^v. \tag{38}$$

Поскольку множество \tilde{X}_n не пересекается с полукругом $K(v)$, то симметричное ему относительно v множество $(\tilde{X}_n)^v$ лежит в замыкании $\overline{K(v)} \subset \mathbb{S}^+$. При этом каждая точка $z \in \tilde{X}_n$ переходит при симметрии относительно v в точку z_1 , лежащую на одной прямой с z и с центром дуги v , находящимся на вещественной оси. Поэтому $\text{Im } z_1 \leq \text{Im } z \leq L$, откуда следует, что $(\tilde{X}_n)^v \subset \overline{\mathbb{P}}$. С учетом определения (38) это доказывает выполнение свойства (29) для X_{n+1} .

При инверсии относительно окружности, имеющей центр на вещественной прямой, часть верхней полуплоскости, лежащая снаружи этой окружности, переходит в полукруг, заключенный между окружностью и вещественной осью. Ввиду этого и поскольку дуги из множества $\tilde{\Xi}_n \setminus \{v\}$ лежат за пределами полукруга $K(v)$, то множество

$$K((\tilde{\Xi}_n \setminus \{v\})^v) \subset K(v) \subset \mathbb{S}^+, \tag{39}$$

следовательно, в силу определения (37) справедливо включение

$$K(\Xi_{n+1}) \subset \mathbb{S}^+. \tag{40}$$

Из включения (35) и из определения 4 следует, что

$$(\mathbb{H}^+ \setminus \overline{K(v)}) \subset (\tilde{\mathfrak{N}}_n \cup K(\tilde{\Xi}_n \setminus \{v\}) \cup \tilde{X}_n),$$

откуда, применяя симметрию относительно v , находим

$$K(v) \subset ((\tilde{\mathcal{N}}_n)^v \cup K((\tilde{\Xi}_n \setminus \{v\})^v)) \cup (\tilde{X}_n)^v. \tag{41}$$

Согласно определениям (36)–(38) с учетом предположения (30) и включения (41) находим

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{n+1} \cup K(\Xi_{n+1}) \cup X_{n+1} &= (\mathcal{N}_n \cup (\tilde{\mathcal{N}}_n)^v) \cup (K(\Xi_n \setminus \{v\}) \cup K((\tilde{\Xi}_n \setminus \{v\})^v)) \cup (X_n \cup (\tilde{X}_n)^v) \supset \\ &\supset ((\mathcal{N}_n \cup K(\Xi_n) \cup X_n) \setminus K(v)) \cup ((\tilde{\mathcal{N}}_n)^v \cup K((\tilde{\Xi}_n \setminus \{v\})^v)) \cup (\tilde{X}_n)^v \supset (\mathbb{S}^+ \setminus K(v)) \cup K(v) = \mathbb{S}^+, \end{aligned}$$

что вместе с формулой (40) доказывает свойство (30) для тройки (36)–(38).

Осталось показать справедливость условий (31) для данных $(n + 1)$ -го шага индукции.

Множество (38) состоит из двух частей: из множества $(\tilde{X}_n)^v$, лежащего внутри полукруга $\overline{K(v)}$, и из множества X_n , лежащего снаружи. Область \mathcal{N}_{n+1} , в свою очередь, состоит из трех частей: из кругового четырехугольника $W(v) \supset v$, из множества $(\tilde{\mathcal{N}}_n)^v \setminus W(v)$, лежащего внутри полукруга $\overline{K(v)}$, и из множества $\mathcal{N}_n \setminus W(v)$, лежащего вне этого полукруга.

Четырехугольник $W(v)$ не пересекается с X_n по предположению (31), так как $W(v) \subset \mathcal{N}_n$, и также не пересекается с \tilde{X}_n по построению последнего. Поскольку этот четырехугольник симметричен относительно v , то он также не пересекается и с $(\tilde{X}_n)^v$. Множество $(\tilde{\mathcal{N}}_n)^v$ не пересекается с $(\tilde{X}_n)^v$, так как $\tilde{\mathcal{N}}_n \cap \tilde{X}_n = \emptyset$ по построению периодического продолжения (11), (34) и по предположению (31). Наконец, область \mathcal{N}_n не пересекается с X_n также по предположению (31). Следовательно, справедливо равенство $\mathcal{N}_{n+1} \cap X_{n+1} = \emptyset$.

Объединение полукругов $K((\tilde{\Xi}_n \setminus \{v\})^v)$, лежащее внутри $K(v)$, не пересекается с $(\tilde{X}_n)^v$, поскольку $K(\tilde{\Xi}_n) \cap \tilde{X}_n = \emptyset$, и $K(\tilde{\Xi}_n)$ не пересекается с X_n по предположению (31). Следовательно, равенство $K(\Xi_{n+1}) \cap X_{n+1} = \emptyset$ выполнено.

Таким образом, справедливость условий (31) для тройки (36)–(38) установлена, обоснование индуктивного перехода завершено, и последовательность (28) построена.

Выполнение свойств (32) этой последовательности следует из определений (36)–(38) и включения (39).

Проведем обоснование свойства (33). Обозначим через $(\epsilon^{(n)})$ упорядоченную по убыванию последовательность диаметров $(\text{diam}(\xi))_{\xi \in \Xi_n}$, тогда из неравенства (24) получаем

$$\epsilon_1^{(n)} \geq \epsilon_2^{(n)} \geq \dots, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_j^{(n)} < |I| = 2. \tag{42}$$

Из алгоритма (36) построения множества Ξ_{n+1} , а также из неравенства (26) находим, что отличие в составе последовательностей $(\epsilon^{(n+1)})$ и $(\epsilon^{(n)})$ заключается в следующем: при переходе к $(\epsilon^{(n+1)})$ из $(\epsilon^{(n)})$ вычеркивается наибольший элемент $\epsilon_1^{(n)}$ и добавляется счетное множество новых элементов, не превосходящих $(\epsilon_1^{(n)})/2$, с сохранением ограничения (42) на сумму членов последовательности. Следовательно, для каждого номера $n \in \mathbb{N}$ существует такое число $n_1 \in \mathbb{N}$, что $\epsilon_1^{(n+n_1)} \leq (\epsilon_1^{(n)})/2$: n_1 равно количеству членов последовательности $(\epsilon^{(n)})$, превышающих $(\epsilon_1^{(n)})/2$. Из этого вытекает свойство (33), лемма 3 доказана.

В обозначениях леммы 3 положим

$$\mathfrak{N} = (\mathcal{N}, \Delta_{\infty}, \Lambda_{\infty}) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{N}_n, \quad \mathcal{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_n, \quad \mathfrak{X} := \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \subset \overline{\mathbb{P}}.$$

Из предельного равенства (33) и включений (30) находим

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K(\Xi_n) = \emptyset, \quad \mathbb{S}^+ \subset \mathcal{N} \cup \mathfrak{X}.$$

Тогда отображение (1) аналитически продолжается в область

$$\mathcal{N} \supset (\mathbb{S}^+ \setminus \mathcal{L}) \supset (\mathbb{S}^+ \setminus \overline{\Pi}) = \mathbb{S}^+(L),$$

что и требовалось доказать.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем некоторые следствия из теоремы 1, касающиеся области аналитичности функции (1).

Аналитически продолженная в полуполосу $\mathbb{S}^+(L)$ функция $w = \mathcal{F}(z)$ отображает стороны Ω и Ψ треугольника T в промежутки Ω_w и Ψ_w вещественной оси на плоскости w . Продолжая эту функцию на основании принципа симметрии в смежные полуполосы через лучи Ψ и Ω , затем через их образы при взаимном отражении Ψ^Ω и Ω^Ψ и т.д., получаем аналитическое продолжение отображения (1) в полуплоскость $\mathbb{H}^+(L)$.

Поскольку функция $\mathcal{F}(z)$ отображает сторону Γ треугольника T в луч Γ_w , то эту функцию можно по принципу симметрии далее продолжить через дугу Γ в область, получаемую инверсией из полуплоскости $\mathbb{H}^+(L)$ относительно этой дуги. Такой областью является внутренность круга, описанного вокруг треугольника BCO и касающегося вещественной оси в начале координат. Таким образом, в сегмент этого круга функция $\mathcal{F}(z)$ аналитически продолжается из полуполосы $\mathbb{S}^+(L)$ через прямолинейный отрезок BC .

Рассмотрим теперь произвольно расположенный на комплексной плоскости круговой треугольник V , имеющий углы $0, \alpha, \alpha$. Дробно-линейным преобразованием треугольник V может быть переведен в T . Прообразом прямой $\{\text{Im } z = L\}$ при этом является описанная вокруг V окружность, откуда получаем следующую переформулировку теоремы 1.

Теорема 1'. *Конформное отображение на полуплоскость кругового треугольника V , имеющего один нулевой угол и два равных между собой ненулевых угла, аналитически продолжается во внутренность круга, описанного вокруг V .*

В предельном случае $\alpha = 0$ аналитическое продолжение конформного отображения треугольника V на полуплоскость, даваемое теоремой 1', является модулярной функцией (см. [6, ч. 3, гл. 7, § 4]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т. I. Начала теории. М.: Наука, 1967; Дальнейшее построение теории. Т. 2. М.: Наука, 1968.
2. Власов В.И., Скороходов С.Л. Конформное отображение L -образной области в аналитическом виде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. 12. С. 1943–1980.
3. Vlasov V.I., Skorokhodov S.L. A generalization and development of the Trefftz method // Zeitschr. Angew. Math. Mech. 1996. V. 76. Suppl. 1. P. 547–548.
4. Власов В.И., Скороходов С.Л. О развитии метода Трэффца // Докл. АН. 1994. Т. 337. 6. С. 713–717.
5. Власов В.И., Скороходов С.Л. Аналитическое решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в одном классе полигональных областей // Сообщ. прикладн. матем. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1988.
6. Гурвиц А., Курант Г. Теория функций. М.: Наука, 1968.