ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 12, с. 2043–2053

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.63

АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ДЛЯ АНАЛИЗА МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОКЕАНСКИХ ГЕОСТРОФИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ ВЕРТИКАЛЬНЫМ ПРОФИЛЕМ СКОРОСТИ ОБЩЕГО ВИДА[1)]

© 2022 г. С. Л. Скороходов[1, *], Н. П. Кузьмина[2, **]

[1] 119991 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

[2] 117997 Москва, Нахимовский пр-т, 36, Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Россия

**e-mail: sskorokhodov@gmail.com*

***e-mail: kuzmina@ocean.ru*

Поступила в редакцию 24.04.2022 г.
Переработанный вариант 27.05.2022 г.
Принята к публикации 21.06.2022 г.

Разработан аналитико-численный метод для решения задачи, основанной на уравнении эволюции потенциального вихря в квазигеострофическом приближении с учетом вертикальной диффузии массы и импульса, с целью анализа малых возмущений океанских течений конечного поперечного масштаба с параболическим вертикальным профилем скорости общего вида. Для возникающей спектральной несамосопряженной задачи построены асимптотики собственных функций и собственных значений при малых значениях волнового числа k и показано, что при малых k существуют два ограниченных и счетное множество неограниченно растущих собственных значений. Рассчитаны траектории собственных значений для различных безразмерных параметров задачи при изменении волнового числа k, что показало существенную зависимость скорости роста неустойчивых возмущений от физических параметров модели. Библ. 11. Фиг. 6.

Ключевые слова: спектральная несамосопряженная задача, асимптотические разложения, метод продолжения по параметру.

DOI: 10.31857/S0044466922120134

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1]–[9] представлены результаты исследования устойчивых и неустойчивых малых возмущений геострофических течений с линейным и параболическим вертикальными профилями скорости. Модели основывались на уравнении эволюции потенциального вихря в квазигеострофическом приближении с учетом вертикальной диффузии массы и импульса. Вывод основных уравнений модели подробно представлен в [1]–[4]. Анализ проводился для течений с боковыми границами в конечных по вертикали слоях. Для течения с параболическим вертикальным профилем скорости были рассмотрены два частных случая: а) максимум скорости течения расположен в середине слоя (см. [1]–[5]); б) максимум скорости течения достигался на верхней или нижней границах слоя (см. [9]). Однако в океане наблюдаются течения с максимумом скорости внутри слоя, а не только на его границах или в центре слоя. В связи с этим исследование динамики такого течения, т.е. течения с вертикальным параболическим профилем скорости общего вида, является актуальным. Данная работа посвящена разработке аналитико-численного метода для решения задачи динамики геострофического течения с параболическим профилем общего вида. Представлены расчеты траекторий собственных значений (СЗ) для различных параметров модели.

[1)]Работа выполнена при участии Н.П. Кузьминой при поддержке бюджетного финансирования Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН (тема FMWE -2021-0001).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Область, в которой исследуется модельное течение, является бесконечным (вдоль направления течения) горизонтальным слоем толщины $2H$ с верхней и нижней границами $z_1 = H$ и $z_0 = -H$ и боковыми границами $y_0 = 0$ и $y_1 = L$. Декартовы координаты внутри такого слоя следующие: вертикальная переменная $z \in [-H, H]$, поперечная переменная $y \in [0, L]$ и продольная переменная x направлена вдоль течения, $x \in (-\infty, \infty)$.

В соответствии с методами исследования неустойчивости течений (см. работы [1]–[5]) представим отклонения безразмерного давления в виде бегущей вдоль оси x волны:

$$p(x, y, z; t) = \sin\left(\pi n \frac{y}{L}\right) e^{ik(x-ct)} F\left(\frac{z}{H}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{0.1}$$

где k – волновое число возмущения вдоль координаты x, L/n – масштаб возмущения в поперечном направлении y, c – комплексная фазовая скорость волны, а $F(z/H)$ – искомый вертикальный профиль возмущения давления.

В безразмерных переменных задача исследования неустойчивости течения с параболическим вертикальным профилем скорости общего вида сводится к решению спектральной задачи на отрезке $z \in [-1, 1]$. (Подробное описание введения безразмерных переменных для аналогичных задач можно найти, например в [3], [4].) Отметим, что вертикальный профиль течения в безразмерном виде в этом случае будет иметь вид

$$U(z) = 1 - \alpha z^2 + \beta z, \tag{0.2}$$

где параметры α и β неотрицательны. Из стандартного условия равенства нулю скорости основного течения на нижней границе слоя следует, что

$$\alpha + \beta = 1. \tag{0.3}$$

Постановка задачи исследования устойчивости малых возмущений течения с вертикальным профилем скорости $U(z)$ проводится аналогично задачам в [3]–[9] и может быть записана в виде следующей спектральной задачи на отрезке $z \in [-1, 1]$.

Задача. Найти комплекснозначные собственные функции (СФ) $F = F(z)$ и СЗ "c", удовлетворяющие на отрезке $z \in [-1, 1]$ уравнению

$$\frac{1}{ik\mathrm{R}}(F^{(IV)} - \mathrm{Bu}\,\mathrm{Pr}(k^2 + \pi^2 n^2)F'') = (1 - \alpha z^2 + \beta z - c)(F'' - \mathrm{Bu}(k^2 + \pi^2 n^2)F) + 2\alpha F \tag{0.4}$$

с краевыми условиями

$$\frac{1}{ik\mathrm{R}} F'''(1) = (1 - \alpha + \beta - c)F'(1) - (\beta - 2\alpha)F(1), \quad F''(1) = 0, \tag{0.5}$$

$$\frac{1}{ik\mathrm{R}} F'''(-1) = -cF'(-1) - (\beta + 2\alpha)F(-1), \quad F''(-1) = 0, \tag{0.6}$$

причем неотрицательные параметры α и β удовлетворяют условию (0.3).

Здесь введены следующие обозначения: $\mathrm{R} = \mathrm{Pe}\, H/L$, где Pe – число Пекле (аналог числа Рейнольдса), n – число полуволн в поперечном направлении ($n = 1, 2, \ldots$), Pr – число Прандтля, Bu – число Бургера, i – мнимая единица.

Краевые условия в (0.5), (0.6) с участием третьих производных задают непротекание на горизонтальных границах слоя, а условия для вторых производных задают равенство нулю потоков плавучести.

Поставленная задача является несамосопряженной, сингулярно возмущенной (для реальных течений величина $k\mathrm{R}$ может быть очень большой), а спектральный параметр c входит в уравнение и в краевые условия. Задача будет иметь счетное множество СФ и соответствующих им СЗ. Неустойчивые по времени возмущения давления $p(x, y, z; t)$ возникают для тех СФ, которым соответствуют СЗ c_m с положительной мнимой частью $\mathrm{Im}(c) > 0$, что следует из представления (0.1).

1. МЕТОД РАСЧЕТА СФ И СЗ

Анализ уравнения (0.4) показывает, что СФ $F(z)$ являются целыми функциями, а их степенные разложения будут сходиться при любых конечных значениях аргумента z. Метод расчета СФ и соответствующих СЗ был разработан ранее в [5], [6] и показал свою высокую точность и быстродействие. Суть этого подхода состоит в построении степенных разложений $F(z)$ в граничных точках $z = -1$ и $z = 1$ и их гладкой сшивке в некоторой точке $z_* \in (-1,1)$.

Зафиксируем спектральный параметр c и решение $F(c;z)$ уравнения (0.4) представим в виде двух разложений в точках $z = 1$ и $z = -1$:

$$F(c;z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(c)(z-1)^m, \quad F(c;z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(c)(z+1)^m, \tag{1.1}$$

сходящихся при любых z, $|z| < \infty$, где коэффициенты $a_m(c)$ и $b_m(c)$ зависят от параметра c. Подставляя представления (1.1) в уравнение (0.4), получаем рекуррентные соотношения для коэффициентов a_m и b_m:

$$\begin{aligned} a_{m+4} = \{&(m+1)(m+2)[\mathrm{Pr}\,\mathrm{Bu}(\pi^2 n^2 + k^2) + (1-\alpha+\beta-c)ik\mathrm{R}]a_{m+2} + ik\mathrm{R}(\beta-2\alpha)m(m+1)a_{m+1} + \\ &+ ik\mathrm{R}[2\alpha - \mathrm{Bu}(\pi^2 n^2 + k^2)(1-\alpha+\beta-c) - \alpha m(m-1)]a_m - ik\mathrm{R}\,\mathrm{Bu}(\pi^2 n^2 + k^2)(\beta-2\alpha)a_{m-1} + \\ &+ ik\mathrm{R}\alpha\mathrm{Bu}(\pi^2 n^2 + k^2)a_{m-2}\}[(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)]^{-1}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} b_{m+4} = \{&(m+1)(m+2)[\mathrm{Pr}\,\mathrm{Bu}(\pi^2 n^2 + k^2) - ik\mathrm{R}c]b_{m+2} + ik\mathrm{R}m(m+1)(2\alpha+\beta)b_{m+1} + \\ &+ ik\mathrm{R}[2\alpha - \alpha m(m-1) + \mathrm{Bu}(\pi^2 n^2 + k^2)c]b_m - ik\mathrm{R}\,\mathrm{Bu}(\pi^2 n^2 + k^2)(2\alpha+\beta)b_{m-1} + \\ &+ ik\mathrm{R}\alpha\mathrm{Bu}(\pi^2 n^2 + k^2)b_{m-2}\}[(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)]^{-1}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Асимптотическое поведение коэффициентов a_m и b_m с ростом номера m может быть исследовано на основе теории Пуанкаре–Перрона анализа полученных рекуррентных уравнений (1.2) и (1.3) (см. [10]). Для наиболее медленно убывающих решений коэффициентов a_m и b_m это асимптотическое поведение зависит от параметра α следующим образом:

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} \sim \frac{t}{\sqrt{m}}, \quad \frac{b_{m+1}}{b_m} \sim \frac{t}{\sqrt{m}}, \quad m \to \infty, \quad t = (-ik\mathrm{R}\alpha)^{1/4}, \quad \alpha \neq 0,$$

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} \sim \frac{t}{m^{2/3}}, \quad \frac{b_{m+1}}{b_m} \sim \frac{t}{m^{2/3}}, \quad m \to \infty, \quad t = (ik\mathrm{R})^{1/3}, \quad \alpha = 0.$$

Такая скорость убывания коэффициентов a_m и b_m обеспечивает быструю сходимость используемых разложений (1.1) на всем отрезке $z \in [-1,1]$.

Теперь учтем краевые условия (0.5) и (0.6), дающие связь коэффициентов a_m и $b_m, m = 0,1,2,3$:

$$a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{ik\mathrm{R}}{6}[(1-\alpha+\beta-c)a_1 - (\beta-2\alpha)a_0], \tag{1.4}$$

$$b_2 = 0, \quad b_3 = -\frac{ik\mathrm{R}}{6}[cb_1 + (\beta+2\alpha)b_0]. \tag{1.5}$$

Далее построим два независимых решения $F_1(c;z)$ и $F_2(c;z)$ в виде разложений (1.1) в точке $z = 1$. Для этого зададим коэффициенты $a_0^{(1)}$ и $a_1^{(1)}$ решения $F_1(c;z)$ следующими:

$$a_0^{(1)} = 1, \quad a_1^{(1)} = 0,$$

величины $a_2^{(1)}$ и $a_3^{(1)}$ определим по (1.4), а все последующие $a_m^{(1)}$ вычислим по рекурсии (1.2), где полагаем $a_{-1}^{(1)} = a_{-2}^{(1)} = 0$.

Для второго решения $F_2(c;z)$ коэффициенты $a_0^{(2)}$ и $a_1^{(2)}$ зададим следующими:

$$a_0^{(2)} = 0, \quad a_1^{(2)} = 1,$$

а все последующие $a_m^{(2)}$ вычислим аналогично предыдущему. Два разложения $F_1(c;z)$ и $F_2(c;z)$ в точке $z = 1$ построены.

Линейная комбинация $F_1(c;z)$ и $F_2(c;z)$ является общим решением $F(c;z)$ уравнения (0.4) с краевыми условиями (0.5) в точке $z = 1$:

$$F(c;z) = t_1F_1(c;z) + t_2F_2(c;z), \tag{1.6}$$

где t_1 и t_2 — произвольные весовые коэффициенты.

Теперь построим две функции $F_3(c;z)$ и $F_4(c;z)$ в виде разложений в точке $z = -1$, задав коэффициенты $b_0^{(1)}$, $b_1^{(1)}$ и $b_0^{(2)}$, $b_1^{(2)}$ следующими:

$$b_0^{(1)} = 1, \quad b_1^{(1)} = 0, \quad b_0^{(2)} = 0, \quad b_1^{(2)} = 1,$$

положив b_2 и b_3 в соответствии с (1.5), а все последующие коэффициенты b_m для обоих разложений вычислив из соотношения (1.3).

Линейная комбинация $F_3(c;z)$ и $F_4(c;z)$ является общим решением $F(c;z)$ уравнения (0.4) с краевыми условиями (0.6) в точке $z = -1$,

$$F(c;z) = t_3F_3(c;z) + t_4F_4(c;z) \tag{1.7}$$

с произвольными весовыми коэффициентами t_3 и t_4.

Задача построения СФ и вычисления искомых СЗ теперь сводится к гладкой сшивке в некоторой точке $z_* \in (-1,1)$ комбинаций (1.6) и (1.7):

$$t_1F_1^{(p)}(c;z_*) + t_2F_2^{(p)}(c;z_*) - t_3F_3^{(p)}(c;z_*) - t_4F_4^{(p)}(c;z_*) = 0, \quad p = 0,1,2,3. \tag{1.8}$$

Нетривиальное решение системы (1.8) требует равенства нулю вронскиана $W(F_1,F_2,F_3,F_4)$:

$$W(F_1,F_2,F_3,F_4;c;z_*) = 0. \tag{1.9}$$

Решая это уравнение относительно величины c, получаем искомое СЗ — комплексную скорость бегущей волны, зависящую от всех параметров задачи (0.4)–(0.6). Найденные при этом весовые коэффициенты t_1, t_2, t_3, t_4 позволяют (с точностью до произвольного множителя) найти соответствующую СФ $F(c;z)$ в виде комбинаций (1.6) и (1.7) в точках $z = 1$ и $z = -1$ соответственно.

Решение уравнения (1.9) будем строить с помощью итерационного метода Ньютона:

$$c^{(q+1)} = c^{(q)} - W(\ldots;c^{(q)};z_*)\left[\frac{\partial W(\ldots;c^{(q)};z_*)}{\partial c}\right]^{-1}, \quad q = 0,1,\ldots, \tag{1.10}$$

а начальные приближения $c^{(0)}$ будем брать на основе метода продолжения по параметру k и из полученных далее асимптотических разложений при $k \to 0$.

Необходимая для метода Ньютона производная $\partial W(\ldots;c;z_*)/\partial c$ от вронскиана (1.9) системы (1.8) находилась с помощью явного дифференцирования по спектральному параметру c разложений для всех производных $F_1^{(p)}(c;z_*)$, $F_2^{(p)}(c;z_*)$, $F_3^{(p)}(c;z_*)$, $F_4^{(p)}(c;z_*)$ при $p = 0,1,2,3$, что позволило избежать использования конечно-разностной производной $\Delta W(\ldots;c;z_*)/\Delta c$ и связанной с ней потери точности при малых $|\Delta c|$.

2. АСИМПТОТИКА СФ И СЗ ПРИ $k \to 0$

Построим при $k \to 0$ асимптотическое разложение СФ и СЗ при ненулевых параметрах R, Bu, Pr и $n \in \mathbb{N}$. Метод такого построения описан, например, в [11].

Как и ранее в частном случае спектральной задачи [9], здесь будут возникать ограниченные и неограниченные СЗ, которые рассмотрим отдельно.

2.1. Ограниченные СЗ

Полагая, что асимптотическое разложение СЗ при $k \to 0$ имеет конечный предел c_0, запишем представление для СФ $F(k;z)$ и СЗ $c(k)$ в виде ряда по степеням $(ik\mathrm{R})^m$

$$F(k;z) = \varphi_0(z) + ik\mathrm{R}\varphi_1(z) + (ik\mathrm{R})^2\varphi_2(z) + \ldots, \tag{2.1}$$

$$c(k) = c_0 + ik\mathrm{R}c_1 + (ik\mathrm{R})^2 c_2 + \ldots, \quad k \to 0. \tag{2.2}$$

Подстановка разложений (2.1) и (2.2) в исходное уравнение (0.4) и краевые условия (0.5), (0.6) приводит к цепочке краевых задач для функций $\varphi_m(z)$ и значений c_m, $m = 0,1,\ldots$. Первая задача для $\varphi_0(z)$ имеет вид

$$\varphi_0''''(z) - \mathrm{Pr}\,\mathrm{Bu}\,\pi^2 n^2 \varphi_0''(z) = 0, \quad z \in [-1,1], \tag{2.3}$$

$$\varphi_0'''(-1) = \varphi_0''(-1) = 0, \quad \varphi_0'''(1) = \varphi_0''(1) = 0. \tag{2.4}$$

Решением (2.3), (2.4) является линейная функция

$$\varphi_0(z) = A_0 + B_0 z \quad \forall A_0, B_0. \tag{2.5}$$

Для следующей функции $\varphi_1(z)$ и величины c_0 возникает задача

$$\varphi_1''''(z) - \mathrm{Pr}\,\mathrm{Bu}\,\pi^2 n^2 \varphi_1''(z) = [(\alpha z^2 - \beta z - 1 + c_0)\,\mathrm{Bu}\,\pi^2 n^2 + 2\alpha]\varphi_0(z) \tag{2.6}$$

с краевыми условиями

$$\varphi_1'''(-1) = -c_0\varphi_0'(-1) - (\beta + 2\alpha)\varphi_0(-1), \quad \varphi_1''(-1) = 0, \tag{2.7}$$

$$\varphi_1'''(1) = (1 - \alpha + \beta - c_0)\varphi_0'(1) - (\beta - 2\alpha)\varphi_0(1), \quad \varphi_1''(1) = 0. \tag{2.8}$$

Решение $\varphi_1(z)$ уравнения (2.6) ищем в виде суммы $\varphi_h(z) + \varphi_{nh}(z)$ решений однородного и неоднородного уравнений соответственно.

Учитывая вид (2.5) функции $\varphi_0(z)$ и замечая, что в правой части (2.6) стоит полином степени 3, записываем представление для функции $\varphi_{nh}(z)$ в виде полинома степени 5:

$$\varphi_{nh}(z) = D_2 z^2 + D_3 z^3 + D_4 z^4 + D_5 z^5, \tag{2.9}$$

где для коэффициентов D_m после подстановки (2.9) в уравнение (2.6), получаем

$$\begin{gathered} D_2 = -\left(\frac{\alpha}{\lambda^2\mathrm{Pr}} + \frac{\alpha}{\lambda^2} + \frac{c_0 - 1}{2\mathrm{Pr}}\right)A_0 + \frac{\beta}{\lambda^2\mathrm{Pr}}B_0, \quad D_3 = \frac{\beta}{6\mathrm{Pr}}A_0 - \left(\frac{\alpha}{\lambda^2\mathrm{Pr}} + \frac{\alpha}{3\lambda^2} + \frac{c_0 - 1}{6\mathrm{Pr}}\right)B_0, \\ D_4 = \frac{-\alpha}{12\mathrm{Pr}}A_0 + \frac{\beta}{12\mathrm{Pr}}B_0, \quad D_5 = \frac{-\alpha}{20\mathrm{Pr}}B_0, \end{gathered} \tag{2.10}$$

а для величины λ введено обозначение

$$\lambda = \pi n\sqrt{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Bu}}. \tag{2.11}$$

Решение $\varphi_h(z)$ однородного уравнения запишем в форме

$$\varphi_h(z) = E_1 \operatorname{sh}\lambda z + E_2 \operatorname{ch}\lambda z + A_1 + B_1 z, \tag{2.12}$$

а неизвестные постоянные найдем далее. Подставляя решение $\varphi_1 = \varphi_h + \varphi_{nh}$ сначала в краевые условия (2.7), (2.8) для вторых производных, получим коэффициенты E_1 и E_2:

$$E_1 = -\frac{20D_5}{\lambda^2\operatorname{sh}\lambda} - \frac{6D_3}{\lambda^2\operatorname{sh}\lambda}, \quad E_2 = -\frac{12D_4}{\lambda^2\operatorname{ch}\lambda} - \frac{2D_2}{\lambda^2\operatorname{ch}\lambda}. \tag{2.13}$$

Теперь подставим решение $\varphi_1(z)$ в краевые условия (2.7), (2.8) для третьих производных, а затем запишем сумму и разность полученных уравнений:

$$E_1\lambda^3\operatorname{ch}\lambda + 60D_5 + 6D_3 = -\beta A_0 + (\alpha + 1 - c_0)B_0, \quad E_2\lambda^3\operatorname{sh}\lambda + 24D_4 = 2\alpha A_0. \tag{2.14}$$

Подставляя сюда значения E_1 и E_2 из (2.13), а затем соотношения (2.10) для коэффициентов D_m, получаем окончательную систему двух уравнений для величин A_0 и B_0:

$$[\operatorname{th}\lambda(2\alpha + 2\alpha\mathrm{Pr} + (c_0 - 1)\lambda^2) - 2\alpha\lambda(\mathrm{Pr} + 1) + \alpha\lambda^2 \operatorname{th}\lambda]A_0 + \beta[2\lambda - (\lambda^2 + 2)\operatorname{th}\lambda]B_0 = 0, \tag{2.15}$$

$$\begin{gathered}\beta\lambda^2[\mathrm{Pr} + 1 - \lambda\operatorname{cth}\lambda]A_0 + [(\lambda\operatorname{cth}\lambda - 1)(6\alpha + 2\alpha\mathrm{Pr} + \lambda^2(c_0 - 1)) - \\ - \alpha\lambda^2(\mathrm{Pr} + 3 - \lambda\operatorname{cth}\lambda) + (c_0 - 1)\,\mathrm{Pr}\,\lambda^2]B_0 = 0.\end{gathered} \tag{2.16}$$

Для разрешимости системы (2.15), (2.16) необходимо равенство нулю ее детерминанта, что дает уравнение для искомой величины c_0. Запишем его в виде квадратного уравнения относительно $(c_0 - 1)$:

$$Q_2(c_0 - 1)^2 + Q_1(c_0 - 1) + Q_0 = 0, \tag{2.17}$$

где обозначено

$$\begin{gathered}Q_2 = \lambda^5 + \lambda^4 \operatorname{th}\lambda(\mathrm{Pr} - 1), \\ Q_1 = \lambda^2\{\operatorname{th}\lambda[(\lambda\operatorname{cth}\lambda - 1)(6\alpha + 2\alpha\mathrm{Pr}) - \alpha\lambda^2(3 + \mathrm{Pr} - \lambda\operatorname{cth}\lambda)] + \\ + (\lambda\operatorname{cth}\lambda + \mathrm{Pr} - 1)[\operatorname{th}\lambda(2\alpha + 2\alpha\mathrm{Pr}) - \alpha\lambda(2\mathrm{Pr} + 2 - \lambda\operatorname{th}\lambda)]\}, \\ Q_0 = [\operatorname{th}\lambda(2\alpha + 2\alpha\mathrm{Pr}) - \alpha\lambda(2\mathrm{Pr} + 2 - \lambda\operatorname{th}\lambda)]\times \\ \times[(\lambda\operatorname{cth}\lambda - 1)(6\alpha + 2\alpha\mathrm{Pr}) - \alpha\lambda^2(3 + \mathrm{Pr} - \lambda\operatorname{cth}\lambda)] - \beta^2\lambda^2(2\lambda - \lambda^2\operatorname{th}\lambda - 2\operatorname{th}\lambda)(\mathrm{Pr} + 1 - \lambda\operatorname{cth}\lambda).\end{gathered} \tag{2.18}$$

Два корня c_{0_1} и c_{0_2} уравнения (2.17) следующие:

$$c_{0_{1,2}} = 1 + \frac{-Q_1 \pm \sqrt{Q_1^2 - 4Q_0Q_2}}{2Q_2}. \tag{2.19}$$

Для реальных течений в океане величина $\lambda = \pi n\sqrt{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Bu}}$ (см. (2.11)) может изменяться от малых до больших значений. Например, для широких течений при $\lambda \ll 1$ выражения для СЗ c_{0_1} и c_{0_2} можно представить в виде разложения по малому параметру λ, что дает

$$\begin{gathered}c_{0_1} = 1 + \frac{\alpha\mathrm{Pr} + \sqrt{\alpha^2(\mathrm{Pr} - 1)^2 - 3\beta^2}}{3} - \\ - \left[\frac{\alpha^2(\mathrm{Pr} - 1)(\mathrm{Pr}^2 + 2\mathrm{Pr} - 7) + 3\beta^2(\mathrm{Pr} - 5)}{45\mathrm{Pr}\sqrt{\alpha^2(\mathrm{Pr} - 1)^2 - 3\beta^2}} + \frac{\alpha(\mathrm{Pr}^2 + 7)}{45\mathrm{Pr}}\right]\lambda^2 + O(\lambda^3), \quad \lambda \to 0,\end{gathered} \tag{2.20}$$

$$\begin{gathered}c_{0_2} = 1 + \frac{\alpha\mathrm{Pr} - \sqrt{\alpha^2(\mathrm{Pr} - 1)^2 - 3\beta^2}}{3} + \\ + \left[\frac{\alpha^2(\mathrm{Pr} - 1)(\mathrm{Pr}^2 + 2\mathrm{Pr} - 7) + 3\beta^2(\mathrm{Pr} - 5)}{45\mathrm{Pr}\sqrt{\alpha^2(\mathrm{Pr} - 1)^2 - 3\beta^2}} - \frac{\alpha(\mathrm{Pr}^2 + 7)}{45\mathrm{Pr}}\right]\lambda^2 + O(\lambda^3), \quad \lambda \to 0.\end{gathered} \tag{2.21}$$

Из этих разложений видно, что при условии

$$\alpha|\mathrm{Pr} - 1| < \sqrt{3}\beta, \quad \alpha + \beta = 1, \tag{2.22}$$

подкоренное выражение отрицательно, корни становятся комплексно-сопряженными, что свидетельствует о неустойчивости длинноволновых возмущений для широких течений при $\lambda \ll 1$.

2.2. Неограниченные СЗ

Построение асимптотического разложения при $k \to 0$ для СФ и неограниченно растущих СЗ задачи (0.4)–(0.6) проводится так же, как это было сделано в [6], поэтому изложим лишь схему такого анализа и дадим результат.

Полагая величину R фиксированной, представим искомую СФ $F(z)$ и СЗ c в виде следующих разложений по степеням параметра $ik\mathrm{R}$:

$$F(z) = \varphi_0(z) + ik\mathrm{R}\varphi_1(z) + \ldots, \quad c = \frac{\chi_{-1}}{ik\mathrm{R}} + \chi_0 + ik\mathrm{R}\chi_1 + \ldots, \quad k \to 0. \tag{2.23}$$

Это приводит к цепочке краевых задач для функций $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z), \ldots$. Первая из них, для $\varphi_0(z)$ и χ_{-1}, имеет вид

$$\varphi_0''''(z) + (\chi_{-1} - \lambda^2)\varphi_0''(z) - \chi_{-1}\frac{\lambda^2}{\mathrm{Pr}}\varphi_0(z) = 0, \tag{2.24}$$

$$\varphi_0'''(-1) = -\chi_{-1}\varphi_0'(-1), \quad \varphi_0''(-1) = 0, \quad \varphi_0'''(1) = -\chi_{-1}\varphi_0'(1), \quad \varphi_0''(1) = 0, \tag{2.25}$$

где величина λ определена в (2.11). Представляя решение уравнения (2.24) в виде

$$\varphi_0(z) = A\cos(\omega z) + B\sin(\omega z), \tag{2.26}$$

получаем для ω характеристическое уравнение

$$\omega^4 - (\chi_{-1} - \lambda^2)\omega^2 - \chi_{-1}\frac{\lambda^2}{\mathrm{Pr}} = 0. \tag{2.27}$$

Некратные корни ω_1^2 и ω_2^2 этого уравнения возникают при условии неравенства нулю его дискриминанта, т.е.

$$(\chi_{-1} - \lambda^2)^2 + 4\chi_{-1}\frac{\lambda^2}{\mathrm{Pr}} \neq 0; \tag{2.28}$$

в дальнейшем рассмотрении ограничимся только этим условием.

Решение уравнения (2.27) запишем относительно величин ω_1^2 и ω_2^2:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[\chi_{-1} - \lambda^2 \pm \sqrt{\left(\chi_{-1} - \lambda^2\right)^2 + 4\chi_{-1}\frac{\lambda^2}{\mathrm{Pr}}}\right]. \tag{2.29}$$

Последующее исследование задачи (2.24), (2.25) включает поиск решения $\varphi_0(z)$ в виде четной или нечетной функции, поэтому рассмотрим два соответствующих случая.

2.2.1. Решения вида $\cos(\omega z)$. Представляя решение $\varphi_0(z)$ уравнения (2.24) в виде

$$\varphi_0(z) = A_1\cos(\omega_1 z) + A_2\cos(\omega_2 z) \tag{2.30}$$

и удовлетворяя граничным условиям (2.25), получаем для χ_{-1} трансцендентное уравнение

$$\omega_2(\omega_1^2 - \chi_{-1})\sin\omega_1\cos\omega_2 = \omega_1(\omega_2^2 - \chi_{-1})\sin\omega_2\cos\omega_1. \tag{2.31}$$

Решая (2.31) и проверяя условие некратности корней (2.28), получаем счетное множество искомых коэффициентов χ_{-1} в представлении (2.23).

В частном случае $\mathrm{Pr} = 1$ уравнение (2.31) имеет явные решения $\chi_{-1,m} = \pi^2\left(\frac{1}{2} + m\right)^2$, $m = 0,1,\ldots$, что дает для счетного множества СЗ следующую асимптотику:

$$c_m = -i\frac{\pi^2}{k\mathrm{R}}\left(\frac{1}{2} + m\right)^2 + O(1), \quad k \to 0, \quad m = 0,1,2,\ldots. \tag{2.32}$$

2.2.2. Решения вида $\sin(\omega z)$. Представляя решение $\varphi_0(z)$ уравнения (2.24) в виде

$$\varphi_0(z) = B_1\sin(\omega_1 z) + B_2\sin(\omega_2 z) \tag{2.33}$$

и удовлетворяя граничным условиям (2.25), получаем для χ_{-1} трансцендентное уравнение:

$$\omega_2(\omega_1^2 - \chi_{-1})\sin\omega_2\cos\omega_1 = \omega_1(\omega_2^2 - \chi_{-1})\sin\omega_1\cos\omega_2. \tag{2.34}$$

Решая (2.34) и проверяя условие некратности корней (2.28), получаем счетное множество искомых коэффициентов χ_{-1} в представлении (2.23).

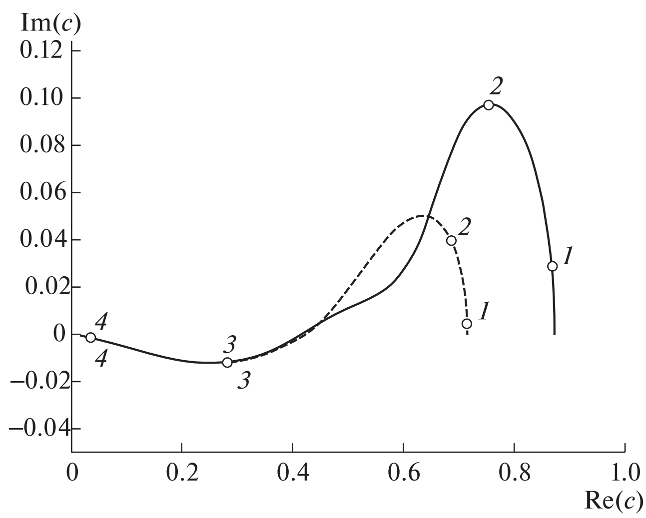
В частном случае Pr = 1 уравнение (2.34) имеет явные решения $\chi_{-1,m} = \pi^2 m^2$, $m = 1, 2, \ldots$, что дает для счетного множества СЗ следующую асимптотику:

$$c_m = -i\frac{\pi^2}{k\mathrm{R}}m^2 + O(1), \quad k \to 0, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{2.35}$$

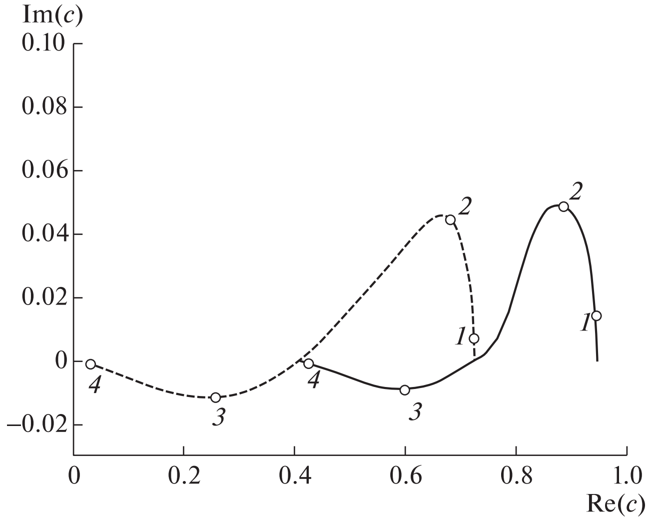
Завершая рассмотрение неограниченно растущих СЗ при $k \to 0$, отметим, что полученные асимптотики (2.32) и (2.35) имеют большие отрицательные мнимые части СЗ и соответствуют устойчивости соответствующих длинноволновых возмущений, т.е. при малых k.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

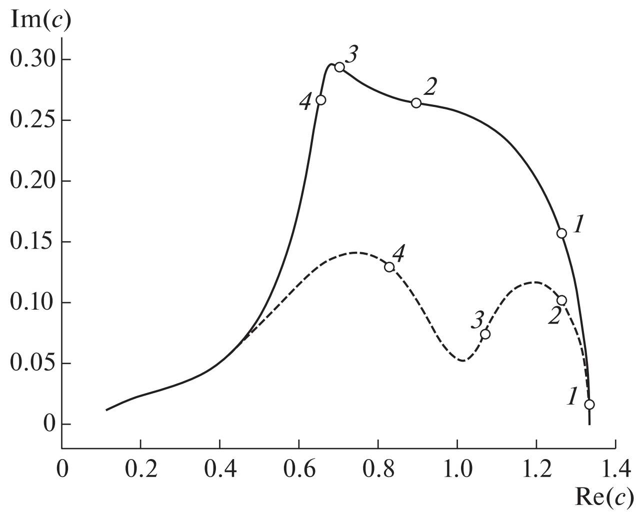
На основе полученных асимптотических разложений при $k \to 0$ для ограниченных и неограниченно растущих СЗ был разработан и тестирован алгоритм расчета с высокой точностью СЗ c_m для заданного номера m. Расчет траектории $c_m(k)$ при изменении k начинался при малых числах k, затем при непрерывном возрастании волнового числа k использовался метод продолжения по k.



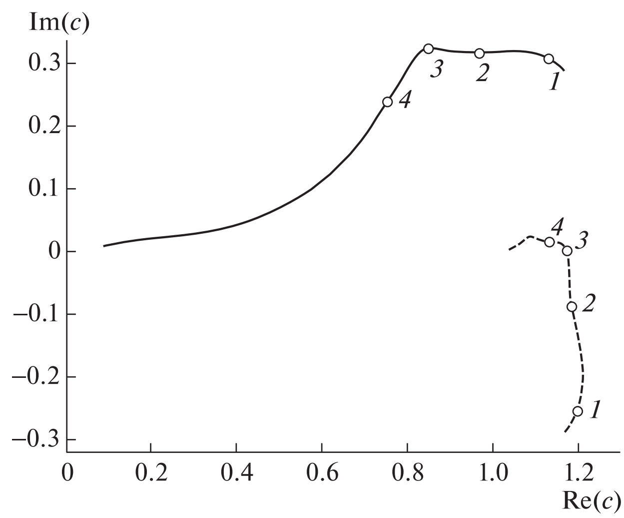
Фиг. 1. Траектории двух СЗ для параметров Pr = 1, R = 10, Bu = 1, $\alpha = 1$.



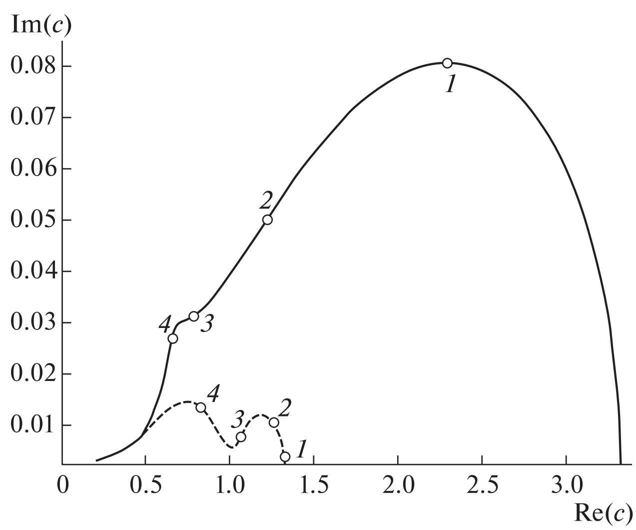
Фиг. 2. Траектории двух СЗ для параметров Pr = 1, R = 10, Bu = 1, $\alpha = 0.8$.



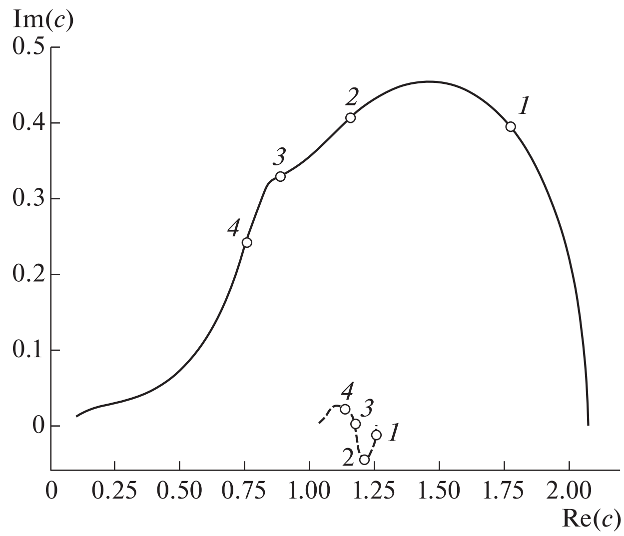
Фиг. 3. Траектории двух СЗ для параметров Pr = 1, R = 10, Bu = 0.0001, $\alpha = 1.0$.



Фиг. 4. Траектории двух СЗ для параметров Pr = 1, R = 10, Bu = 0.0001, $\alpha = 0.5$.



Фиг. 5. Траектории двух СЗ для параметров Pr = 4, R = 10, Bu = 0.0001, $\alpha = 1.0$.



Фиг. 6. Траектории двух СЗ для параметров Pr = 4, R = 10, Bu = 0.0001, $\alpha = 0.5$.

Некоторые результаты такого численного анализа приведены ниже. На фиг. 1–8 даны траектории первых двух СЗ $c_1(k)$ и $c_2(k)$ для различных физических параметров при непрерывном увеличении волнового числа $k \in (0,1000]$. Сплошные линии соответствуют траекториям $c_1(k)$, а штриховые – траекториям $c_2(k)$. Отмеченные кружочками точки с цифрами *1* соответствуют значению $k = 0.1$, цифрами *2* – значению $k = 1$, цифрами *3* – значению $k = 10$, цифрами *4* – значению $k = 100$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан аналитико-численный метод для решения задачи, позволяющей описывать малые устойчивые и неустойчивые возмущения геострофического течения с вертикальным параболическим профилем скорости общего вида. Модель основана на уравнении потенциального вихря в квазигеострофичском приближении с учетом вертикальной диффузии массы и импульса. Построен алгоритм высокоточного расчета СФ и СЗ спектральной задачи с помощью степенных разложений решения в двух граничных точках и последующей сшивки. Предложенный метод позволяет решать задачу для любых масштабов возмущений вдоль и поперек течения и любых соотношений между линейным и постоянным вертикальными сдвигами скорости течения применительно к океану.

Получены асимптотики СФ и СЗ при малых значениях волнового числа k в зависимости от параметров задачи. Показано, что при $k \to +0$ существуют два ограниченных СЗ и счетное множество неограниченно растущих СЗ с отрицательной мнимой частью и с предельной точкой $-i\infty$.

Представлены расчеты траекторий СЗ, позволяющие судить о неустойчивости, как широких, так и узких течений при типичных для океана значениях параметров задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кузьмина Н.П.* Об одной гипотезе образования крупномасштабных интрузий в Арктическом бассейне // Фундамент. и прикл. гидрофизика. 2016. Т. 9. № 2. С. 15–26.

2. *Kuzmina N.P.* Generation of large-scale intrusions at baroclinic fronts: An analytical consideration with a reference to the Arctic ocean // Ocean Sci. 2016. V. 12. P. 1269–1277. https://doi.org/10.5194/os-12-1269-2016

3. *Кузьмина Н.П., Скороходов С.Л., Журбас Н.В., Лыжков Д.А.* О неустойчивости геострофического течения с линейным вертикальным сдвигом скорости на масштабах интрузионного расслоения // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2018. Т. 54. № 1. С. 54–63.

4. *Кузьмина Н.П., Скороходов С.Л., Журбас Н.В., Лыжков Д.А.* Описание возмущений океанских геострофических течений с линейным вертикальным сдвигом скорости с учетом трения и диффузии плавучести // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2019. Т. 55. № 2. С. 73–85.
5. *Скороходов С.Л., Кузьмина Н.П.* Аналитико-численный метод решения задачи типа Орра–Зоммерфельда для анализа неустойчивости течений в океане // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 6. С. 1022–1039.
6. *Скороходов С.Л., Кузьмина Н.П.* Спектральный анализ модельных течений типа Куэтта применительно к океану // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 5. С. 867–888.
7. *Кузьмина Н.П., Скороходов С.Л., Журбас Н.В., Лыжков Д.А.* О влиянии трения и диффузии плавучести на динамику геострофических океанских течений с линейным вертикальным профилем скорости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2020. Т. 56. № 6. С. 676–688.
8. *Скороходов С.Л., Кузьмина Н.П.* Эффективный метод решения модифицированной задачи Орра–Зоммерфельда для анализа неустойчивости течений в Арктическом бассейне // Таврический вестн. информат. и матем. 2016. № 3 (32). С. 88–97.
9. *Скороходов С.Л., Кузьмина Н.П.* Спектральный анализ малых возмущений геострофических течений с параболическим вертикальным профилем скорости применительно к океану // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 12. С. 2010–2023.
10. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.
11. *Найфэ А.* Методы возмущений. М.: Наука, 1976. 474 с.