

## НАХОЖДЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ПУАЗЕЙЛЕВСКОГО ТИПА ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ПОЛИМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ УСТАНОВЛЕНИЯ<sup>1)</sup>

© 2022 г. **А. М. Блохин**<sup>1,2,\*</sup>, **Б. В. Семисалов**<sup>1,2,\*\*</sup>

<sup>1</sup> 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 1, НГУ, Россия

<sup>2</sup> 630090 Новосибирск, пр-т Коптюга, 4, ИМ СО РАН, Россия

\*e-mail: [blokhin@math.nsc.ru](mailto:blokhin@math.nsc.ru)

\*\*e-mail: [vibis@ngs.ru](mailto:vibis@ngs.ru)

Поступила в редакцию 20.08.2020 г.  
Переработанный вариант 20.08.2020 г.  
Принята к публикации 17.09.2021 г.

Проведен численный анализ процесса установления стационарных течений несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости в канале с прямоугольным сечением под действием постоянного перепада давления. Для описания течений применяется реологическая мезоскопическая модель Покровского–Виноградова. При использовании интерполяции с узлами Чебышёва по пространственным переменным и неявной схемы по времени разработан алгоритм решения начально-краевых задач для нестационарных уравнений модели. Аналитически показано, что в стационарном случае модель допускает три решения высокой гладкости. Вопрос о том, какое из этих решений реализуется на практике, исследован с помощью расчетов предельного решения нестационарных уравнений. Установлено, что предельное решение с высокой точностью совпадает с одним из трех решений стационарной задачи, и рассчитаны значения параметров, при которых происходит переключение с одного решения на другое. Библ. 11. Фиг. 6. Табл. 3.

**Ключевые слова:** полимерная жидкость, мезоскопическая реологическая модель, устойчивое течение Пуазейля, метод без насыщения, переключение установившегося решения.

DOI: 10.31857/S0044466922020065

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена численному исследованию устойчивости стационарных режимов течения несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости в канале с прямоугольным поперечным сечением. Такие течения по своим качественным особенностям схожи с решениями Пуазейля уравнений Навье–Стокса, для которых в некоторых простых случаях (например, течение в цилиндрической трубе) известны строгие результаты об экспоненциальной сходимости нестационарных решений к стационарным (см. [1]), что гарантирует устойчивость последних.

В отличие от ньютоновской жидкости течения растворов и расплавов полимерных материалов демонстрируют сложную градиентную зависимость элонгационной и сдвиговой вязкостей от скоростей деформации, эффекты запаздывания и зависимость потока от ориентации и размеров макромолекул (см. [2]–[4]). Вследствие этого получить в аналитическом виде решения уравнений, описывающих течения полимерной жидкости типа Пуазейля, и исследовать их устойчивость не представляется возможным. Далее для описания таких течений использована реологическая мезоскопическая модель Покровского–Виноградова (см. [2], [5]). Анализ квазилинейного уравнения, полученного в [6] для расчета стационарных течений в каналах под действием постоянного перепада давления, показал, что его коэффициенты и правая часть определяются неоднозначно. При определенных условиях это приводит к возникновению трех качественно различных решений высокой гладкости. В данной работе численно исследуется вопрос о том, какое из этих решений является предельным для исходной нестационарной постановки, т.е. какое из них может быть реализовано на практике.

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (соглашение № 20-11-20036).

Для этого в статье разработан алгоритм, основанный на приближениях без насыщения и подходе к аппроксимации двумерных краевых задач для уравнений эллиптического типа, предложенном в [7]. При использовании этого алгоритма в совокупности с неявной схемой по временной переменной и задании начальных данных определенного вида получено предельное решение нестационарного уравнения, которое с высокой точностью совпадает с одним из трех решений стационарной задачи. Причем при определенных значениях параметров реализуется “переключение” предельного течения с одного решения стационарной задачи на другое. Таким образом, удалось прояснить структуру коэффициентов и правой части уравнения, описывающего устойчивые стационарные течения.

Отметим, что выход на полученный стационарный режим существенно зависит от начальных данных — распределения скорости течения в канале и его согласованности с граничными условиями. Если начальные значения скорости слишком велики или не согласованы с граничными условиями, стационарное течение не реализуется.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Следуя монографиям [1]–[3], [8], [9] и статье [5], запишем уравнения *реологической мезоскопической модели Покровского–Виноградова*, которая описывает течения несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости. Эти уравнения в безразмерной форме в прямоугольной декартовой системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$  выглядят следующим образом:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla P = \frac{1}{\operatorname{Re}} \operatorname{div}(\Pi), \quad (2)$$

$$\frac{da_{ij}}{dt} - \sum_{l=1}^3 \frac{\partial u_l}{\partial x_l} a_{ij} - \sum_{l=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_l} a_{li} - \frac{1}{W} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \mathcal{L}_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = i, \dots, 3. \quad (3)$$

Здесь  $t$  — время;  $u_1, u_2, u_3$  — компоненты вектора скорости  $\mathbf{u}$ ;

—  $P$  — давление;

—  $a_{ij}, i, j = 1, 2, 3$ , — компоненты симметрического тензора анизотропии  $\Pi$  второго ранга;

—  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  — столбцы симметрической матрицы  $\Pi = (a_{ij}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ ;

—  $\|\mathbf{a}_i\|^2 = (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i), i = 1, 2, 3$ ;

—  $\operatorname{div}(\Pi) = (\operatorname{div}(\mathbf{a}_1), \operatorname{div}(\mathbf{a}_2), \operatorname{div}(\mathbf{a}_3))^T$ ;

—  $\mathcal{L}_{ij} = \left( \frac{a_{ij}}{W} + \frac{\bar{k}(a_{11} + a_{22} + a_{33})}{3} a_{ij} + \beta(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) \right), i, j = 1, 2, 3$ ;

—  $\bar{k} = k - \beta, k, \beta (0 < \beta < 1)$  — феноменологические параметры модели, характеризующие вклады, связанные с анизотропией (величина  $\beta$  учитывает ориентацию макромолекулярного клубка, число  $k$  — его размеры, см. [5], [10]);

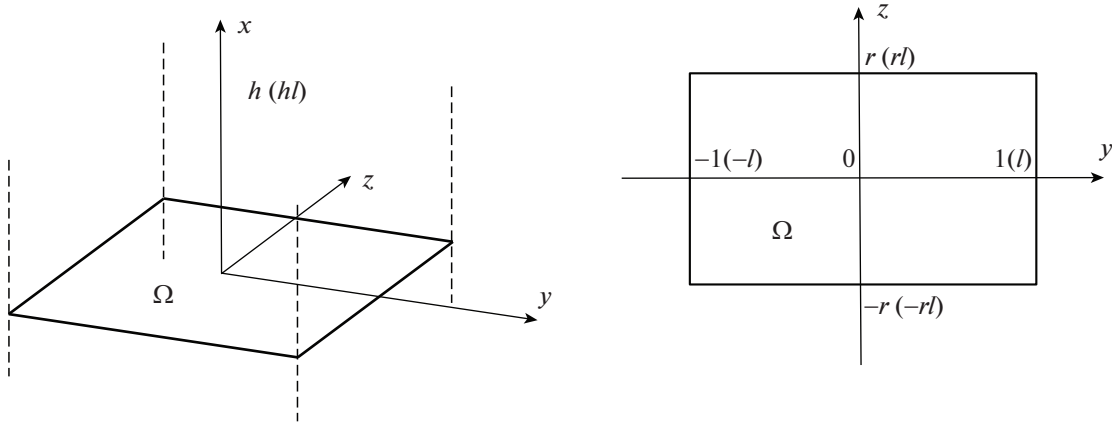
—  $\operatorname{Re} = \frac{\rho u_H l}{\eta_0^*}$  — число Рейнольдса;  $\rho (= \text{const})$  — плотность среды;

—  $W = \frac{\tau_0^* u_H}{l}$  — число Вейсенберга;

—  $\eta_0^*, \tau_0^*$  — начальные значения сдвиговой вязкости и времени релаксации при  $T = T_0$ , где  $T_0$  — температура окружающей среды.

Далее для координат будем использовать обозначения  $x, y, z$  ( $x = x_1, y = x_2, z = x_3$ ).

**Замечание 1.** В [5], [10] рассмотрены случаи  $k = \beta, k = 1.2\beta$ . В настоящей работе исследуется более общий случай:  $k = c_k \beta$ , где  $c_k > 0$  — новый феноменологический параметр.



Фиг. 1. Канал с прямоугольным сечением  $\Omega$ .

Система (1)–(3) записана в безразмерном виде: время  $t$ ; координаты  $x, y, z$ ; компоненты вектора скорости  $u_1, u_2, u_3$ ; давление  $P$ ; компоненты тензора анизотропии  $a_{ij}$  отнесены к  $\frac{l}{u_H}$ ;  $l$ ;  $u_H$ ;  $\rho u_H^2$ ;  $W/3$  соответственно, где  $l$  – характерная длина,  $u_H$  – характерная скорость.

Пусть полимерная жидкость течет в канале  $\Omega$  с прямоугольным поперечным сечением, лежащим в плоскости  $(y, z)$  (фиг. 1):

$$\Omega = \{(y, z) : -1 \leq y \leq 1, -r \leq z \leq r\}.$$

В канале вдоль оси  $x$  действует перепад давления  $\Delta P(t)$ . Будем искать *частное решение* исходной системы (1)–(3) следующего вида:

$$\begin{aligned} u_2 = u_3 &\equiv 0, & u_1 &= u(t, y, z), \\ P &= \mathcal{P}(t, y, z) - A(t)x, \\ a_{ij} &= a_{ij}(t, y, z), & i, j &= 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{4}$$

Величина  $A(t) = \frac{\Delta P(t)}{\rho u_H^2 h}$  есть безразмерный перепад давления на отрезке по  $x$  длины  $h$ ,  $\mathcal{P}(t, y, z)$  – компонента давления, зависящая только от времени и от координаты точки сечения.

Пусть

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \frac{a_{ij}}{\text{Re}}, & i, j &= 1, 2, 3, & \alpha_i &= \alpha_{ii} + \alpha^2, & \alpha^2 &= \frac{1}{W \text{Re}}; \\ K_I &= \text{Re} \left( \alpha^2 + \frac{\bar{k}}{3} I \right), & I &= \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}, & \tilde{K}_I &= K_I + \beta \text{Re} I. \end{aligned}$$

Тогда с учетом (4) запишем систему (1)–(3) в виде двух систем:

$$\begin{aligned} u_t - (\alpha_{12})_y - (\alpha_{13})_z &= A(t), \\ (\alpha_{12})_t - \alpha_2 u_y - \alpha_{23} u_z + \tilde{K}_I \alpha_{12} + \beta \text{Re}(\alpha_{13} \alpha_{23} - \alpha_{12} \alpha_{33}) &= 0, \\ (\alpha_{13})_t - \alpha_3 u_y - \alpha_3 u_z + \tilde{K}_I \alpha_{13} + \beta \text{Re}(\alpha_{12} \alpha_{23} - \alpha_{13} \alpha_{22}) &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} (\alpha_{11})_t - 2(\alpha_{12} u_y + \alpha_{13} u_z) + K_I \alpha_{11} + \beta \text{Re}(\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2) &= 0, \\ (\alpha_{22})_t + \tilde{K}_I \alpha_{22} + \beta \text{Re}(\alpha_{12}^2 - \alpha_{11} \alpha_{22} + \alpha_{23}^2 - \alpha_{22} \alpha_{33}) &= 0, \\ (\alpha_{33})_t + \tilde{K}_I \alpha_{33} + \beta \text{Re}(\alpha_{13}^2 - \alpha_{11} \alpha_{33} + \alpha_{23}^2 - \alpha_{22} \alpha_{33}) &= 0, \\ (\alpha_{23})_t + \tilde{K}_I \alpha_{23} + \beta \text{Re}(\alpha_{12} \alpha_{13} - \alpha_{11} \alpha_{23}) &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Для определения давления получаем следующие выражения:

$$\mathcal{P}_y = (\alpha_{22})_y + (\alpha_{23})_z, \quad \mathcal{P}_z = (\alpha_{23})_y + (\alpha_{33})_z.$$

Дифференцируя первое уравнение (5) по  $t$ , второе уравнение по  $y$  и третье уравнение по  $z$ , а затем складывая их, приходим к уравнению второго порядка для функции  $u(t, y, z)$ :

$$u_{tt} - \tilde{\Delta}u - \tilde{A}(t, y, z)u_y - \tilde{B}(t, y, z)u_z + \tilde{K}_I[u_t - A(t)] + F(t, y, z) = A'(t), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}u &= \alpha_2 u_{yy} + 2\alpha_{23} u_{yz} + \alpha_3 u_{zz}, & \tilde{A}(t, y, z) &= (\alpha_2)_y + (\alpha_{23})_z, & \tilde{B}(t, y, z) &= (\alpha_{23})_y + (\alpha_3)_z, \\ F(t, y, z) &= (\tilde{K}_I)_y \alpha_{12} + (\tilde{K}_I)_z \alpha_{13} + \beta \operatorname{Re}[(l_{22})_z + (l_{33})_y], \\ l_{22} &= \alpha_{12} \alpha_{23} - \alpha_{13} \alpha_{22}, & l_{33} &= \alpha_{13} \alpha_{23} - \alpha_{12} \alpha_{33}. \end{aligned}$$

Дополним уравнения (5)–(7) граничными условиями (условиями прилипания жидкости для скорости)

$$u(t, y, z) = 0 \quad \text{при} \quad t \geq 0, \quad (y, z) \in \partial\Omega, \quad (8)$$

и начальными данными в предположении, что в начальный момент времени  $t = 0$  жидкость в канале покоится:

$$\alpha_{ij}(0, y, z) = 0, \quad u(0, y, z) = 0, \quad u_t(0, y, z) = 0 \quad \forall (y, z) \in \Omega. \quad (9)$$

### 3. СТАЦИОНАРНЫЙ СЛУЧАЙ

Следуя [5] (см. также [6]), заметим, что при реализации условий (4) в стационарном случае, когда переменные задачи не зависят от времени:  $u = u(y, z)$ ,  $a_{ij} = a_{ij}(y, z)$ ,  $i, j = \overline{1, 3}$ ,  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(y, z)$ ,  $A = \text{const}$ , система уравнений (1)–(3) в канале с прямоугольным сечением сводится к одному разрешающему уравнению для определения продольной скорости течения:

$$\hat{a}u_{yy} - 2\hat{b}u_{yz} + \hat{c}u_{zz} = -\operatorname{Re} A \tilde{\mathcal{K}}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{a} &= 1 - u_y^2 \mathcal{L}, & \hat{c} &= 1 - u_z^2 \mathcal{L}, & \hat{b} &= u_y u_z \mathcal{L}, \\ \mathcal{L} &= \frac{1 - \Delta}{\lambda^2}, & \Delta &= \frac{\lambda}{\mu(\tilde{\mathcal{K}}_\mu \mu + \tilde{\mathcal{K}})}, & \lambda &= \sqrt{u_y^2 + u_z^2}, \\ \tilde{\mathcal{K}} &= \frac{1 + W\sigma + 2W(\bar{k}/3 + \beta)(\sigma(1 + W\sigma) + W\mu^2)}{(1 + W\sigma)^2}, & \sigma &= a_{22} + a_{33}, & \mu &= \sqrt{a_{12}^2 + a_{13}^2}, \\ \tilde{\mathcal{K}}_\mu &= \frac{W\sigma_\mu}{(1 + W\sigma)^2} [2(\bar{k}/3 + \beta) - 1] + \frac{4W^2\mu}{(1 + W\sigma)^3} (\bar{k}/3 + \beta) [W\sigma - W\mu\sigma_\mu + 1]. \end{aligned}$$

Используя формулы для  $\tilde{\mathcal{K}}$  и выражение  $\sigma(\mu)$ , величину  $\mu$  можно определить как решение нелинейного уравнения

$$\tilde{\mathcal{K}}(\mu)\mu = \lambda.$$

Функция  $\sigma = \sigma(\mu)$  является решением кубического уравнения

$$\begin{aligned} a\sigma^3 + b\sigma^2 + c\sigma + d &= 0, & \sigma &\neq -1/W, \\ a &= \tilde{\beta}W, & b &= \tilde{\beta} + 1, & c &= W^{-1} + W\mu^2 \tilde{\beta}, & d &= \beta\mu^2, & \tilde{\beta} &= \frac{2\bar{k}}{3} + \beta. \end{aligned} \quad (11)$$

Анализ этого уравнения, проведенный в [6], привел к заключению, что в прямоугольной области при достаточно малых градиентах давления  $A$  это уравнение имеет три действительных ре-

шения – функции  $\sigma_1(\mu)$ ,  $\sigma_2(\mu)$ ,  $\sigma_3(\mu)$ . Приведем далее выражения для этих решений. Следуя формулам Кардано для решения кубических уравнений, введем обозначения

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}, \quad q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}, \quad Q = (p/3)^3 + (q/2)^2.$$

После преобразований получаем  $p = \mu^2 - \mathbb{A}$ ,  $q = \mathbb{B}\mu^2 + \mathbb{C}$ , где

$$\mathbb{A} = \frac{1 - \tilde{\beta} + \tilde{\beta}^2}{3\tilde{\beta}^2 W^2}, \quad \mathbb{B} = \frac{3\beta - \tilde{\beta} - 1}{3W\tilde{\beta}}, \quad \mathbb{C} = \frac{(1 + \tilde{\beta})(\tilde{\beta} - 2)(2\tilde{\beta} - 1)}{27W^3\tilde{\beta}^3}.$$

Указанные три решения имеют вид

$$\sigma_1 = 2 \cos \alpha \left| \sqrt[6]{\frac{q^2}{4} - Q} \right| - \frac{b}{3a}, \quad \sigma_{2,3} = - \left| \sqrt[6]{\frac{q^2}{4} - Q} \right| (-\cos \alpha \pm \sqrt{3} \sin \alpha) - \frac{b}{3a}, \quad \alpha = \frac{\arctan(2\sqrt{-Q}/q)}{3}.$$

При этом выражения для производных  $\frac{d\sigma_{1,2,3}}{d\mu}$ , фигурирующих в формуле для  $\tilde{\mathcal{K}}_\mu$ , имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \mu} = \sigma'_1 &= \frac{2^{2/3}}{3\sqrt{-Q} |(q^2 - 4Q)^{5/6}} ((q \sin \alpha - 2\sqrt{-Q} \cos \alpha)Q' + (q\sqrt{-Q} \cos \alpha - 2Q \sin \alpha)q'), \\ \frac{\partial \sigma_{2,3}}{\partial \mu} = \sigma'_{2,3} &= \frac{-1}{3^3 \sqrt{2} \sqrt{-Q} |(q^2 - 4Q)^{5/6}} (\pm(\sqrt{3} \cos \alpha \pm \sin \alpha)(2Qq' - qQ') + \\ &+ (\cos \alpha \mp \sqrt{3} \sin \alpha)(2Q' - qq')\sqrt{-Q}), \end{aligned}$$

где для  $\sigma_2$  выбираем верхний из знаков “ $\pm$ ”, “ $\mp$ ”, для  $\sigma_3$  – нижний;

$$q' = \frac{\partial q}{\partial \mu} = -2\mu \frac{1 - 3\beta + \tilde{\beta}}{3\tilde{\beta}W},$$

$$\begin{aligned} Q' = \frac{\partial Q}{\partial \mu} &= \frac{\mu}{27\tilde{\beta}^4 W^4} \{ 27\beta^2 \tilde{\beta}^2 \mu^2 W^2 + \tilde{\beta}(1 + \tilde{\beta} \mu^2 W^2) [\tilde{\beta}(\tilde{\beta}(6\mu^2 W^2 - 1) + 4) - 1] - \\ &- \beta(1 + \tilde{\beta}) [\tilde{\beta}(2\tilde{\beta}(9\mu^2 W^2 - 1) + 5) - 2] \}. \end{aligned}$$

Стационарное уравнение (10) дополняется граничными условиями

$$u(y, z) = 0 \quad \text{при} \quad (y, z) \in \partial\Omega. \tag{12}$$

В [5] описан алгоритм решения краевой задачи (10), (12), основанный на методе установления, приближениях без насыщения и методе коллокаций (см. также [7]). Этот алгоритм использован в настоящей работе для поиска решений стационарной задачи.

Возникает естественный вопрос: какое из трех возможных решений задачи (10), (12) реализуется на практике? Нестационарная формулировка модели, полученная в разд. 2, имеет целью исследование этого вопроса. Для этого в модели будет задан постоянный градиент давления и реализованы вычисления вплоть до выхода на стационарный режим течения при некотором  $t = t_s$ . Сопоставление скорости  $u(t_s, y, z)$  нестационарного течения в момент времени  $t = t_s$  и решения задачи (10), (12), полученного при использовании разных зависимостей  $\sigma(\mu)$ , покажет, какой режим реализуется на практике.

#### 4. ОПИСАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА

Для реализации расчетов введем сетку по времени с шагом  $\tau$  и узлами  $t_n = n\tau$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Обозначим  $u^n = u^n(y, z) = u(t_n, y, z)$ ,  $\alpha^n_{ij} = \alpha^n_{ij}(y, z) = \alpha_{ij}(t_n, y, z)$  и аппроксимируем в уравнениях (5)–(7) производные по времени разностными отношениями вида

$$u_t \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau}, \quad u_{tt} \approx \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

## 4.1. Линеаризация уравнений модели

Для реализации вычислений необходимо линеаризовать по Ньютону уравнения (5)–(7) относительно неизвестных функций  $\alpha_{ij}$  и  $u$  и на каждом шаге по времени осуществлять итерации по нелинейности. В расчетах невязка итераций по нелинейности была установлена равной  $10^{-10}$ . Запишем линеаризованные уравнения для функций  $\alpha_{ij}$  в виде

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{11}^{n+1} - \alpha_{11}^n}{\tau} &= -\operatorname{Re} \left[ \left( \frac{\bar{k}}{3} + 2\beta \right) \alpha_{11}^n + \frac{\bar{k}}{3} I^n + \alpha^2 \right] \alpha_{11}^{n+1} + \\ &+ 2(\alpha_{12}^n u_y^n + \alpha_{13}^n u_z^n) + \frac{\operatorname{Re} \bar{k}}{3} (\alpha_{11}^n)^2 - \beta \operatorname{Re} [(\alpha_{12}^n)^2 + (\alpha_{13}^n)^2 - (\alpha_{11}^n)^2], \\ \frac{\alpha_{22}^{n+1} - \alpha_{22}^n}{\tau} &= - \left[ K_I^n + \operatorname{Re} \left( \frac{\bar{k}}{3} + 2\beta \right) \alpha_{22}^n \right] \alpha_{22}^{n+1} + \operatorname{Re} \left( \frac{\bar{k}}{3} (\alpha_{22}^n)^2 + \beta [(\alpha_{22}^n)^2 - (\alpha_{12}^n)^2 - (\alpha_{23}^n)^2] \right), \\ \frac{\alpha_{33}^{n+1} - \alpha_{33}^n}{\tau} &= - \left[ K_I^n + \operatorname{Re} \left( \frac{\bar{k}}{3} + 2\beta \right) \alpha_{33}^n \right] \alpha_{33}^{n+1} + \operatorname{Re} \left( \frac{\bar{k}}{3} (\alpha_{33}^n)^2 + \beta [(\alpha_{33}^n)^2 - (\alpha_{13}^n)^2 - (\alpha_{23}^n)^2] \right), \\ \frac{\alpha_{12}^{n+1} - \alpha_{12}^n}{\tau} &= [\beta \operatorname{Re} \alpha_{33}^n - \tilde{K}_I^n] \alpha_{12}^{n+1} + \alpha_{2y}^n u_y^n + \alpha_{2z}^n u_z^n - \beta \operatorname{Re} \alpha_{13}^n \alpha_{23}^n, \\ \frac{\alpha_{13}^{n+1} - \alpha_{13}^n}{\tau} &= [\beta \operatorname{Re} \alpha_{22}^n - \tilde{K}_I^n] \alpha_{13}^{n+1} + \alpha_{2y}^n u_y^n + \alpha_{3z}^n u_z^n - \beta \operatorname{Re} \alpha_{12}^n \alpha_{23}^n, \\ \frac{\alpha_{23}^{n+1} - \alpha_{23}^n}{\tau} &= [\beta \operatorname{Re} \alpha_{11}^n - \tilde{K}_I^n] \alpha_{23}^{n+1} - \beta \operatorname{Re} \alpha_{12}^n \alpha_{13}^n, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $I^n = a_{11}^n + a_{22}^n + a_{33}^n$ ,  $K_I^n = \operatorname{Re} \left( \alpha^2 + \frac{\bar{k}}{3} I^n \right)$ ,  $\tilde{K}_I^n = K_I^n + \beta \operatorname{Re} I^n$ ,  $\alpha_i^n = \alpha_{ii}^n + \alpha^2$ ,  $i = 2, 3$ ,  $u_y^n, u_z^n$  – производные функции  $u(t, y, z)$  при  $t = t_n$ .

Для поиска функции  $u^{n+1}(y, z)$  из (7) несложно вывести следующее линеаризованное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} + \operatorname{Re} \alpha^2 \left( \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \right) - \alpha^2 (u_{yy}^{n+1} + u_{zz}^{n+1}) &= \alpha_{22}^n u_{yy}^n + \alpha_{33}^n u_{zz}^n + \\ &+ 2\alpha_{23}^n u_{yz}^n - \operatorname{Re} \left( \frac{\bar{k}}{3} + \beta \right) I^n \left( \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} \right) + \tilde{K}_I^n A(t_n) + F^n, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$F^n = [(\alpha_{12}^n)_y + (\alpha_{23}^n)_z] u_y^n + [(\alpha_{23}^n)_y + (\alpha_{13}^n)_z] u_z^n - \operatorname{Re} \left( \frac{\bar{k}}{3} + \beta \right) [I_y^n \alpha_{12}^n + I_z^n \alpha_{13}^n] - \beta \operatorname{Re} [(I_{22}^n)_z + (I_{33}^n)_y] + A'(t_n),$$

$I_{y,z}^n = (\alpha_{11}^n)_{y,z} + (\alpha_{22}^n)_{y,z} + (\alpha_{33}^n)_{y,z}$  – производные от функции  $I^n$ ,  $(I_{22}^n)_z = (\alpha_{12}^n \alpha_{23}^n - \alpha_{13}^n \alpha_{22}^n)_z$ ,  $(I_{33}^n)_y = (\alpha_{13}^n \alpha_{23}^n - \alpha_{12}^n \alpha_{33}^n)_y$ ,  $A'(t_n) = \left. \frac{dA(t)}{dt} \right|_{t=t_n}$ . Отметим также, что при записи (14) использована аппроксимация

$$\tilde{K}_I u_t = \operatorname{Re} \alpha^2 u_t + \operatorname{Re} \left( \frac{\bar{k}}{3} + \beta \right) I^n u_t \approx \operatorname{Re} \alpha^2 \left( \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \right) + \operatorname{Re} \left( \frac{\bar{k}}{3} + \beta \right) I^n \left( \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} \right).$$

## 4.2. Аппроксимация неизвестных функций и их производных

На каждом шаге итерационной схемы по времени будем искать решения уравнений (13), (14) с граничными условиями (8) в классе достаточно гладких в области  $\Omega$  функций. Далее для записи вычислительной схемы необходимо аппроксимировать в уравнениях (13), (14) функции  $u^n(y, z)$  и  $\alpha_{ij}^n(y, z)$  и их производные по переменным  $y$  и  $z$  элементами конечномерных функциональных

пространств. В качестве таких пространств используем пространства алгебраических полиномов, а в качестве способа аппроксимации – интерполяционные полиномы в форме Лагранжа с узлами в нулях многочленов Чебышёва. Конкретно, для приближения  $u^n(y, z)$  и  $\alpha_{ij}^n(y, z)$  будем использовать прямые (тензорные) произведения таких полиномов в области  $\Omega$ . Свойства таких приближений, а именно отсутствие их насыщения, логарифмический рост констант Лебега, а также оценки погрешности подробно обсуждаются в [11, гл. 3].

Введем в области  $\Omega$  сетку с узлами  $(y_k, z_m)$ , где

$$y_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2K}, \quad z_m = r \cos \frac{(2m-1)\pi}{2M}, \quad k = \overline{1, K}, \quad m = \overline{1, M}.$$

Сделаем для удобства преобразование координаты  $z$ :  $\tilde{z} = z/r$ ,  $\tilde{z}_m = z_m/r$ , где  $\tilde{z}, \tilde{z}_m \in [-1, 1]$ .

Пусть  $(\alpha_{ij}^n)_{km} = \alpha_{ij}^n(y_k, z_m)$ ,  $u_{km}^n = u^n(y_k, z_m)$ , тогда

$$\alpha_{ij}^n(y, z) \approx P(\alpha_{ij}^n, y, z) = \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M l_{kK}(y) l_{mM}(\tilde{z}) (\alpha_{ij}^n)_{km}, \tag{15}$$

$$u^n(y, z) \approx P_\omega(u^n, y, z) = \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M \frac{\omega(y, \tilde{z})}{\omega(y_k, \tilde{z}_m)} l_{kK}(y) l_{mM}(\tilde{z}) u_{km}^n, \tag{16}$$

где

$$l_{kK}(y) = \frac{T_K(y)}{(y - y_k) T_K'(y_k)}, \quad l_{mM}(\tilde{z}) = \frac{T_M(\tilde{z})}{(\tilde{z} - \tilde{z}_m) T_M'(\tilde{z}_m)}$$

суть фундаментальные многочлены интерполяции,  $T_K(y)$ ,  $T_M(\tilde{z})$  – многочлены Чебышёва степени  $K$  и  $M$  соответственно, множитель  $\omega(y, \tilde{z}) = (1 - y^2)(1 - \tilde{z}^2)$  в формуле (16) обеспечивает автоматическое выполнение граничных условий (8) (см. также [11, гл. 9, § 5]).

Для аппроксимации уравнений (13), (14) далее будет использован метод коллокаций с узлами  $(y_k, z_m)$ , поэтому нам потребуются значения производных полиномов (15), (16) в этих узлах. Приведем формулы дифференцирования по переменной  $y$  (по переменной  $z$  формулы строятся аналогично):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M S_{kK}(y) s_k^2 \left\{ \frac{T_K(y)}{y - y_k} - T_K'(y) \right\} l_{mM}(\tilde{z}) (\alpha_{ij}^n)_{km}, \tag{17}$$

$$\frac{\partial P_\omega}{\partial y} = \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M (-1)^{K-1} S_{kK}(y) \lambda_{mM}(\tilde{z}) \left\{ \frac{2yy_k - y^2 - 1}{y - y_k} T_K(y) + (1 - y^2) T_K'(y) \right\} u_{km}^n. \tag{18}$$

Поскольку уравнение (14) имеет второй порядок, потребуются также аппроксимации второй производной от функции  $u(y, z)$ :

$$\frac{\partial^2 P_\omega}{\partial y^2} = \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M (-1)^{K-1} S_{kK}(y) \lambda_{mM}(\tilde{z}) \left\{ \frac{2s_k^2 - K^2(y - y_k)^2}{(y - y_k)^2} T_K(y) - \frac{y^2 - 3yy_k + 2}{y - y_k} T_K'(y) \right\} u_{km}^n, \tag{19}$$

где

$$s_k = \sqrt{1 - y_k^2}, \quad S_{kK}(y) = \frac{(-1)^k}{K(y - y_k) s_k}, \quad \lambda_{mM}(\tilde{z}) = \frac{(1 - \tilde{z}^2)}{1 - \tilde{z}_m^2} l_{mM}(\tilde{z}).$$

Переходя в (17)–(19) к пределу при  $y \rightarrow y_l$ ,  $z \rightarrow z_q$ ,  $l = \overline{1, K}$ ,  $q = \overline{1, M}$ , используя свойство фундаментальных многочленов  $l_{mM}(\tilde{z}_q) = \delta_{mq}$  – символ Кронекера и правило Лопиталья, находим

$$\frac{\partial \alpha_{ij}^n}{\partial y}(y_l, z_q) \approx \lim_{(y,z) \rightarrow (y_l, z_q)} \frac{\partial P(y, z)}{\partial y} = \sum_{k=1, k \neq l}^K \frac{(-1)^{l+k} s_k}{s_l(y_l - y_k)} (\alpha_{ij}^n)_{kq} - \frac{y_l}{2s_l^2} (\alpha_{ij}^n)_{lq}, \tag{20}$$

$$\frac{\partial u^n}{\partial y}(y_l, z_q) \approx \lim_{(y,z) \rightarrow (y_l, z_q)} \frac{\partial P_\omega(y, z)}{\partial y} = \sum_{k=1, k \neq l}^K (-1)^{k+l} \frac{s_l}{s_k(y_l - y_k)} u_{kq}^n - \frac{3y_l}{2s_l^2} u_{lq}^n, \tag{21}$$

$$\frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2}(y_l, z_q) \approx \lim_{(y,z) \rightarrow (y_l, z_q)} \frac{\partial^2 P_\omega(y, z)}{\partial y^2} = \sum_{k=1, k \neq l}^K (-1)^{k+l-1} \frac{2s_l^2 + 3y_l(y_l - y_k)}{s_k s_l (y_l - y_k)^2} u_{kq}^n - \frac{(K^2 + 5)s_l^2 + 3y_l^2}{3s_l^4} u_{lq}^n. \quad (22)$$

Пусть

$$\xi_{lk} = \frac{(-1)^{l+k} s_k}{s_l (y_l - y_k)}, \quad \eta_{lk} = \frac{(-1)^{l+k} s_l}{s_k (y_l - y_k)}, \quad \zeta_{lk} = (-1)^{l+k-1} \frac{2s_l^2 + 3y_l(y_l - y_k)}{s_k s_l (y_l - y_k)^2},$$

где  $l, k = \overline{1, K}, l \neq k$ ,

$$v_l = -\frac{y_l}{2s_l^2}, \quad \hat{v}_l = -\frac{3y_l}{2s_l^2}, \quad \tilde{v}_l = -\frac{(K^2 + 5)s_l^2 + 3y_l^2}{3s_l^4}, \quad l = \overline{1, K},$$

$\Upsilon_{ij}^n, (\Gamma_{ij}^n)_y$  суть  $K \times M$ -матрицы с элементами  $\alpha_{ij}^n(y_k, z_m)$  и  $\frac{\partial \alpha_{ij}^n}{\partial y}(y_k, z_m)$ ,

$U^n, U_y^n, U_{yy}^n$  суть  $K \times M$ -матрицы с элементами  $u^n(y_k, z_m), \frac{\partial u^n}{\partial y}(y_k, z_m), \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2}(y_k, z_m)$ .

Сформируем  $K \times K$ -матрицы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} v_1 & \xi_{12} & \dots & \xi_{1K} \\ \xi_{21} & v_2 & \dots & \xi_{2K} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \xi_{K1} & \xi_{K2} & \dots & v_K \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} \hat{v}_1 & \eta_{12} & \dots & \eta_{1K} \\ \eta_{21} & \hat{v}_2 & \dots & \eta_{2K} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \eta_{K1} & \eta_{K2} & \dots & \hat{v}_K \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 & \zeta_{12} & \dots & \zeta_{1K} \\ \zeta_{21} & \tilde{v}_2 & \dots & \zeta_{2K} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \zeta_{K1} & \zeta_{K2} & \dots & \tilde{v}_K \end{pmatrix}.$$

Переписывая линейные комбинации в правых частях (20)–(22) в виде произведений матриц, для аппроксимации производных по  $y$  в уравнениях (13), (14) получим формулы

$$(\Upsilon_{ij}^n)_y \approx A_1 \Upsilon_{ij}^n, \quad U_y^n \approx \mathcal{A}_1 U^n, \quad U_{yy}^n \approx \mathcal{A}_2 U^n.$$

Дифференцируя приближения (15), (16) по переменной  $z$  и проводя выкладки, аналогичные описанным выше, сформируем  $M \times M$ -матрицы  $B_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  для аппроксимации производных по переменной  $z$ :

$$(\Upsilon_{ij}^n)_z \approx \Upsilon_{ij}^n B_1^T, \quad U_z^n \approx U^n \mathcal{B}_1^T, \quad U_{zz}^n \approx U^n \mathcal{B}_2^T, \quad (\Upsilon_{ij}^n)_{yz} \approx A_1 \Upsilon_{ij}^n B_1^T, \quad U_{yz}^n \approx \mathcal{A}_1 U^n \mathcal{B}_1^T.$$

Здесь  $K \times M$ -матрицы  $(\Upsilon_{ij}^n)_z, U_z^n, U_{zz}^n, (\Upsilon_{ij}^n)_{yz}, U_{yz}^n$  определяются аналогично  $(\Upsilon_{ij}^n)_y, U_y^n$ .

Далее для построения алгоритмов воспользуемся спектральным разложением матриц  $\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2$ , аппроксимирующих вторые производные:

$$\mathcal{A}_2 = R_{\mathcal{A}} D_{\mathcal{A}} R_{\mathcal{A}}^{-1}, \quad \mathcal{B}_2 = R_{\mathcal{B}} D_{\mathcal{B}} R_{\mathcal{B}}^{-1}, \quad (23)$$

где  $R_{\mathcal{A}}, R_{\mathcal{B}}$  – матрицы собственных векторов  $\mathcal{A}_2$  и  $\mathcal{B}_2$ ;  $D_{\mathcal{A}}, D_{\mathcal{B}}$  – диагональные матрицы собственных значений  $\mathcal{A}_2$  и  $\mathcal{B}_2$  –  $d_{\mathcal{A}}^k, d_{\mathcal{B}}^m$ .

**Замечание 2.** Строго говоря, при наличии у матриц  $\mathcal{A}_2$  и  $\mathcal{B}_2$  пар комплексно-сопряженных собственных чисел, матрицы  $D_{\mathcal{A}}, D_{\mathcal{B}}$  являются блочно-диагональными, содержащими на диагонали блоки размера  $2 \times 2$ . Однако, как показали численные эксперименты, выбранный базис исключает такую возможность. Важным обстоятельством является также медленный рост обусловленностей матриц  $R_{\mathcal{A}}, R_{\mathcal{B}}$  с ростом  $K, M$ , обеспечивающий устойчивость алгоритма к погрешностям округления (см. [7]).

#### 4.3. Решение задачи линейной алгебры на каждом временном шаге

После подстановки описанных аппроксимаций в уравнения (13), (14) и отбрасывания погрешности приходим к линейным матричным уравнениям для выражения матриц  $\Upsilon_{ij}^{n+1}, U^{n+1}$  че-



рез матрицы  $\Upsilon_{ij}^n, U^n$ . Запишем для примера одно из уравнений для выражения  $\Upsilon_{11}^n$  (см. первое уравнение в системе (13)):

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{11} \cdot \Upsilon_{11}^{n+1} &= \left\{ \frac{1}{\tau} + \operatorname{Re} \left[ \left( \frac{\bar{k}}{3} + 2\beta \right) \Upsilon_{11}^n + \frac{\bar{k}}{3} (\Upsilon_{11}^n + \Upsilon_{22}^n + \Upsilon_{33}^n) + \alpha^2 E_I \right] \right\} \cdot \Upsilon_{11}^{n+1} = \\ &= \frac{1}{\tau} \Upsilon_{11}^n + 2(\Upsilon_{12}^n \cdot (\mathcal{A}_1 U^n) + \Upsilon_{13}^n \cdot (U^n \mathcal{B}_1^T)) + \frac{\operatorname{Re} \bar{k}}{3} (\Upsilon_{11}^n \cdot \Upsilon_{11}^n) - \beta \operatorname{Re} (\Upsilon_{12}^n \cdot \Upsilon_{12}^n + \Upsilon_{13}^n \cdot \Upsilon_{13}^n - \Upsilon_{11}^n \cdot \Upsilon_{11}^n). \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь точка означает поэлементное произведение матриц,  $E_I$  – матрица размера  $K \times M$ , все элементы которой равны единице, начальные данные задаются в соответствии с (9):  $\Upsilon_{11}^0 = (0)_{K \times M}$  – нулевая матрица. Аппроксимации остальных пяти уравнений из системы (13) записываются аналогично, при этом в левой части составляются матрицы  $\mathfrak{M}_{ij}$ .

Аппроксимация уравнения (14) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\tau^2} + \frac{\operatorname{Re} \alpha^2}{\tau} \right) U^{n+1} - \alpha^2 \mathcal{A}_2 U^{n+1} - \alpha^2 U^{n+1} \mathcal{B}_2^T = \mathfrak{F}_U^n := \frac{1}{\tau^2} (2U^n - U^{n-1}) + \frac{\operatorname{Re} \alpha^2}{\tau} U^n + \Upsilon_{22}^n \cdot (\mathcal{A}_2 U^n) + \\ + \Upsilon_{33}^n \cdot (U^n \mathcal{B}_2^T) + 2\Upsilon_{23}^n \cdot (\mathcal{A}_1 U^n \mathcal{B}_1^T) - \frac{\operatorname{Re} \left( \frac{\bar{k}}{3} + \beta \right)}{\tau} (\Upsilon_{11}^n + \Upsilon_{22}^n + \Upsilon_{33}^n) \cdot (U^n - U^{n-1}) + \tilde{\mathcal{H}}_I^n(t_n) + \mathfrak{F}^n, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_I^n &= \operatorname{Re} \alpha^2 E_I + \operatorname{Re} \left( \frac{\bar{k}}{3} + \beta \right) (\Upsilon_{11}^n + \Upsilon_{22}^n + \Upsilon_{33}^n), \\ \mathfrak{F}^n &= [A_1 \Upsilon_{22}^n + \Upsilon_{23}^n \mathcal{B}_1^T] \cdot (\mathcal{A}_1 U^n) + [A_1 \Upsilon_{23}^n + \Upsilon_{33}^n \mathcal{B}_1^T] \cdot (U^n \mathcal{B}_1^T) - \\ &- \operatorname{Re} \left( \frac{\bar{k}}{3} + \beta \right) [(A_1 (\Upsilon_{11}^n + \Upsilon_{22}^n + \Upsilon_{33}^n)) \cdot \Upsilon_{12}^n + ((\Upsilon_{11}^n + \Upsilon_{22}^n + \Upsilon_{33}^n) \mathcal{B}_1^T) \cdot \Upsilon_{13}^n] - \\ &- \beta \operatorname{Re} [(\Upsilon_{12}^n \cdot \Upsilon_{23}^n - \Upsilon_{13}^n \cdot \Upsilon_{22}^n) \mathcal{B}_1^T + A_1 (\Upsilon_{13}^n \cdot \Upsilon_{23}^n - \Upsilon_{12}^n \cdot \Upsilon_{33}^n)] + A'(t_n) \end{aligned}$$

суть  $K \times N$ -матрицы.

Для решения матричного уравнения (24) на каждом шаге по времени необходимо выполнять деления элементов матрицы в правой части на элементы матрицы  $\mathfrak{M}_{11}$ . Составляя по аналогии с (24) матричные уравнения для остальных пяти уравнений системы (13) и осуществляя поэлементные деления их правых и левых частей, получаем приближенные значения решений  $\alpha_{ij}^{n+1}$  в узлах коллокации.

Для решения (25) используем спектральные разложения (23) матриц  $\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2^T$ , стоящих в левых частях. Умножим (25) на матрицу  $R_{\mathcal{A}}^{-1}$  слева и на матрицу  $R_{\mathcal{B}}^{-1}$  справа, обозначим  $V^{n+1} = R_{\mathcal{A}}^{-1} U^{n+1} R_{\mathcal{B}}^{-1}$ ,  $\mathcal{G}^n = R_{\mathcal{A}}^{-1} \mathfrak{F}_U^n R_{\mathcal{B}}^{-1}$ ,  $p_\tau = \frac{1}{\tau^2} + \frac{\operatorname{Re} \alpha^2}{\tau}$  и получим матричное уравнение:

$$p_\tau V^{n+1} - \alpha^2 D_{\mathcal{A}} V^{n+1} - \alpha^2 V^{n+1} D_{\mathcal{B}} = \mathcal{G}^n,$$

решение которого относительно элементов  $v_{km}^{n+1}$  матрицы  $V^{n+1}$  дается элементарными формулами

$$v_{km}^{n+1} = \frac{g_{km}^n}{p_\tau - \alpha^2 (d_{\mathcal{A}}^k + d_{\mathcal{B}}^m)}, \quad k = \overline{1, K}, \quad m = \overline{1, M},$$

где  $g_{km}^n$  – элементы матрицы  $\mathcal{G}^n$ . В данном случае шаг сетки по времени  $\tau$  нужно выбирать, исходя из условия  $p_\tau \neq \alpha^2 (d_{\mathcal{A}}^k + d_{\mathcal{B}}^m) \forall k, m$  или учитывая, что  $\alpha^2 = (W \operatorname{Re})^{-1}$ ,

$$\tau \neq \frac{\operatorname{Re} \pm \sqrt{\operatorname{Re}^2 + 4W \operatorname{Re} (d_{\mathcal{A}}^k + d_{\mathcal{B}}^m)}}{2(d_{\mathcal{A}}^k + d_{\mathcal{B}}^m)} \quad \forall k, m.$$

Зная элементы матрицы  $V^{n+1}$ , несложно восстановить значения решения в узлах коллокации:  $U^{n+1} = R_{\mathcal{A}} V^{n+1} R_{\mathcal{B}}$ .

Отметим, что в силу нелинейности исходных уравнений для перехода от предыдущего шага по времени к следующему решению линеаризованных матричных уравнений (24), (25) ищется с помощью итераций по нелинейности. Иначе говоря, при фиксированном  $t = t_n$  реализуется цикл, на каждом шаге  $s$  которого решения  $\Upsilon_{ij}^{n,s}$ ,  $U^{n,s}$  выражаются через решения  $\Upsilon_{ij}^{n,s-1}$ ,  $U^{n,s-1}$  в соответствии с формулами, описанными выше, и начальными условиями  $\Upsilon_{ij}^{n,0} = \Upsilon_{ij}^n$ ,  $U^{n,0} = U^n$ . При этом итерации останавливаются при реализации условия

$$\frac{\|U^{n,s} - U^{n,s-1}\|}{\|U^{n,s}\|} \leq \varepsilon_{NI}, \quad \frac{\|\Upsilon_{ij}^{n,s} - \Upsilon_{ij}^{n,s-1}\|}{\|\Upsilon_{ij}^{n,s}\|} \leq \varepsilon_{NI}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = i, \dots, 3.$$

Номер  $s$  в таком случае обозначим  $\sigma$  и положим  $\Upsilon_{ij}^{n+1} = \Upsilon_{ij}^{n,\sigma}$ ,  $U^{n+1} = U^{n,\sigma}$ . Здесь и далее норма обозначает максимальный элемент матрицы. В наших расчетах задано  $\varepsilon_{NI} = 10^{-10}$ . При переходе на следующий шаг по времени меняются значения функций  $A(t_n)$ ,  $A'(t_n)$ , стоящих в правой части (25) и описывающих зависимость градиента давления в канале от времени.

Отметим, что предложенная аппроксимация уравнений модели в сравнении с классической схемой метода коллокаций приводит к существенному сокращению вычислительных затрат.

Действительно, для вычисления  $\Upsilon_{ij}^{n+1}$  в соответствии с (24) необходимо совершить порядка  $KM$  операций (деления элементов матрицы в правой части на элементы матрицы в левой части).

Для расчета  $U^{n+1}$  по (25) наиболее затратными являются операции произведения матриц  $\mathcal{G}^n = R_{sd}^{-1} \mathcal{F}_U^n R_{sb}^{-1}$ ,  $U^{n+1} = R_{sd} V^{n+1} R_{sb}$ . Порядок числа операций, необходимых для этого, есть  $O(MK(M+K))$ . Здесь предполагается, что спектральные разложения (23) сделаны заранее, и матрицы этих разложений для различных  $K$ ,  $M$  занесены в базу данных. Классическая же схема метода коллокаций в данной задаче ведет к системам с большими разреженными матрицами размера  $KM \times KM$ , решение которых требует порядка  $O((KM)^3)$  операций.

Отметим также, что указанные операции поэлементного деления матриц и произведения матриц относительно небольшого размера во многих современных вычислительных средах выполняются с повышенной скоростью за счет векторизации, что обеспечивает высокую вычислительную эффективность предложенного алгоритма.

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Разработанный метод использован для решения нестационарной задачи (5)–(9). При этом градиент давления был задан постоянным  $A(t) \equiv A_0$ . Наряду с нестационарной методом установления решалась также стационарная задача (10), (12) при  $A = A_0$ . При этом использован алгоритм, предложенный в [7]. Отметим, что сходимость метода установления достигается только при использовании определенных ветвей решения  $\sigma(\mu)$  уравнения (11). Какие именно ветви обеспечивают сходимость, и какая ветвь соответствует предельному решению нестационарной задачи (5)–(9), зависит от значений параметров модели.

В табл. 1 приведены описание и диапазоны значений основных параметров модели и алгоритма, использованные в расчетах. Обозначим время выхода течения на стационарный режим величиной  $t^*$ , т.е.  $t^* = n^* \tau$ , где  $n^*$  – номер итерации, на которой впервые реализуются условия стабилизации течения:

$$\frac{\|U^{n^*} - U^{n^*-1}\|}{\tau} \leq \varepsilon_S, \quad \frac{\|\Upsilon_{ij}^{n^*} - \Upsilon_{ij}^{n^*-1}\|}{\tau} \leq \varepsilon_S, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, \dots, i,$$

$\varepsilon_S$  – малое число. В проведенных экспериментах установлено, что  $t^*$  практически не зависит от параметров  $K$ ,  $M$  и  $\tau$ . Относительное отклонение нестационарной скорости течения в момент времени  $t^*$  от решения стационарной задачи (10), (12) обозначим через  $D_u(y, z)$ . В экспериментах эта величина рассчитывалась как относительная разность двух массивов, содержащих значения соответствующих скоростей в узлах  $(y_k, z_m)$  (см. п. 4.2).

В численных экспериментах установлено, что в случае  $c_k = 1$  и  $\beta < 0.5$  (именно такие значения использованы в [2], [10]) сходимость метода установления в стационарной задаче имеет место

**Таблица 1.** Параметры модели и численного метода

Параметр	Описание	Значение
$\beta$	Феноменологический параметр	0.01–0.9
$c_k$	Феноменологический параметр, $k = c_k \beta$	0.5–20
$A_0$	Безразмерный градиент давления	1–330
$W$	Число Вайсенберга	0.01–3
$2r$	Безразмерная ширина канала	0.02–2
$K, M$	Число узлов сетки вдоль осей $y$ и $z$	21–31
$\tau$	Шаг сетки по времени	0.0015–0.1
$\varepsilon_S$	Погрешность стабилизации течения	$10^{-8}$

**Таблица 2.** Значения  $t^*$  и  $\|D_u(y, z)\|$  при  $\beta = 0.1, c_k = 1$  и вариации параметров  $W, A_0, r$

Вариация $W$ при $A_0 = 1, r = 1$			Вариация градиента $A_0$ при $W = 0.01, r = 1$			Вариация $r$ при $A_0 = 200, W = 0.05$		
$W$	$t^*$	$\ D_u(y, z)\ $	$A_0$	$t^*$	$\ D_u(y, z)\ $	$r$	$t^*$	$\ D_u(y, z)\ $
1.5	41.75	$6.23 \times 10^{-9}$	200	9.1	$1.32 \times 10^{-8}$	0.025	1.446	$4.49 \times 10^{-6}$
2.5	61.95	$2.62 \times 10^{-8}$	300	14.88	$4.62 \times 10^{-8}$	0.05	1.434	$1.1 \times 10^{-5}$
3	108.65	$4.64 \times 10^{-8}$	330	19.09	$5.31 \times 10^{-8}$	0.1	1.584	$1.32 \times 10^{-6}$
$W^{\lim} \approx 3.4$			$A_0^{\lim} \approx 335$			$r^{\lim} \approx 0.115$		

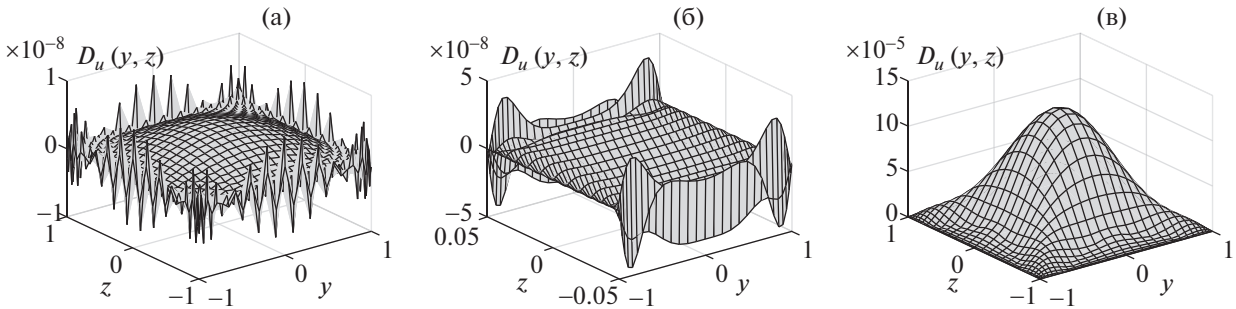
**Таблица 3.** Значения  $t^*$  и  $\|D_u(y, z)\|$  при  $W = 0.01, r = 1, A_0 = 20, 200$  и вариации параметров  $\beta, c_k$

Вариация $\beta$ при $A_0 = 200, c_k = 1$			Вариация $c_k$ при $A_0 = 20, \beta = 0.37$		
$\beta$	$t^*$	$\ D_u(y, z)\ $	$c_k$	$t^*$	$\ D_u(y, z)\ $
0.15	10.4	$2.58 \times 10^{-8}$	1	5.1	$3.32 \times 10^{-10}$
0.2	13.32	$4.39 \times 10^{-8}$	1.52	5.1	$9.91 \times 10^{-5}$
0.26	18.12	$6.69 \times 10^{-8}$	2	5.15	$3.35 \times 10^{-10}$
$\beta^{\lim} \approx 0.267$			неограничено		

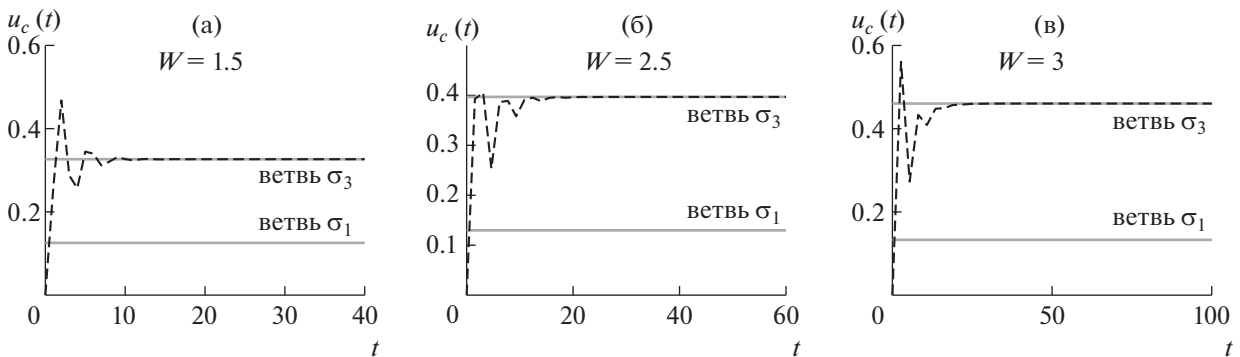
только при  $\sigma = \sigma_{1,3}$ , причем предельное решение нестационарной задачи соответствует ветви  $\sigma = \sigma_3$ . В табл. 2 для этого случая приведены значения  $t^*$  и  $\|D_u(y, z)\|$  при вариации параметров  $W, A_0, r$  в некоторой окрестности предельных значений этих параметров. Под предельными здесь понимаются значения, при переходе через которые стационарный режим течения перестает существовать. Эти значения найдены приближенно в расчетах и приведены в последних строках табл. 2, 3 с индексом  $\lim$ . В табл. 3 указаны значения  $t^*$  и  $\|D_u(y, z)\|$  при вариации  $c_k$  и  $\beta$ .

Видно, что при значениях параметров  $W$  и  $A_0$ , близких к предельным, зависимость  $t^*$  от этих значений носит нелинейный характер. Время выхода на стационарный режим наиболее чувствительно к значению  $W$ . При  $W$ , близких к  $W^{\lim}$ , и малых  $t$  имеют место колебания значений скорости, и для установления течения требуется достаточно много времени (см. также фиг. 5). При уменьшении ширины канала  $r$  течение устанавливается намного быстрее и для больших значений  $W$  и  $A_0$ , однако относительное отклонение  $\|D_u(y, z)\|$  при этом возрастает (см. также фиг. 2б). При вариации  $r$  в окрестности малых значений ( $r < 0.05$ ) время  $t^*$  практически не зависит от  $r$ .

Отметим, что зависимость  $t^*$  от  $\beta$  близка к линейной, и отклонение  $\|D_u(y, z)\|$  при приближении  $\beta$  к  $\beta^{\lim}$  мало меняется. Интересная картина наблюдается при вариации  $c_k$  (табл. 3): отклоне-



**Фиг. 2.** Относительные отклонения  $D_u(y, z)$  при (а)  $A_0 = 1$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $c_k = 1$ ,  $r = 1$ ,  $W = 1.5$  (стандартная ситуация); (б)  $A_0 = 200$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $c_k = 1$ ,  $W = 0.05$ ,  $r = 0.05$  (узкий канал); (в)  $A_0 = 20$ ,  $W = 0.01$ ,  $r = 1$ ,  $\beta = 0.37$ ,  $c_k = 1.52$  (переключение  $3 \rightarrow 1$  установившегося решения нестационарной задачи).

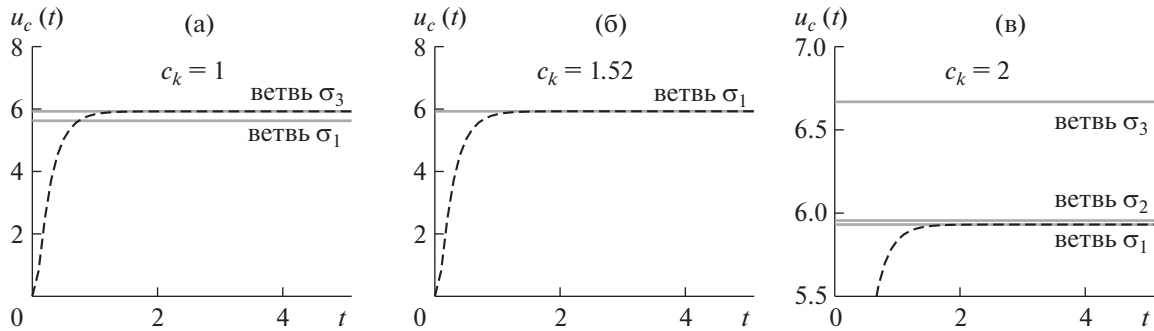


**Фиг. 3.** Значения скорости  $u_c(t)$ , полученные при решении нестационарной задачи (штрихи), и соответствующие значения решений стационарной задачи в точке  $y = 0$ ,  $z = 0$  (серые линии) при  $A_0 = 1$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $c_k = 1$ ,  $r = 1$  и различных  $W$ : (а)  $W = 1.5$ , (б)  $W = 2.5$ , (в)  $W = 3$ .

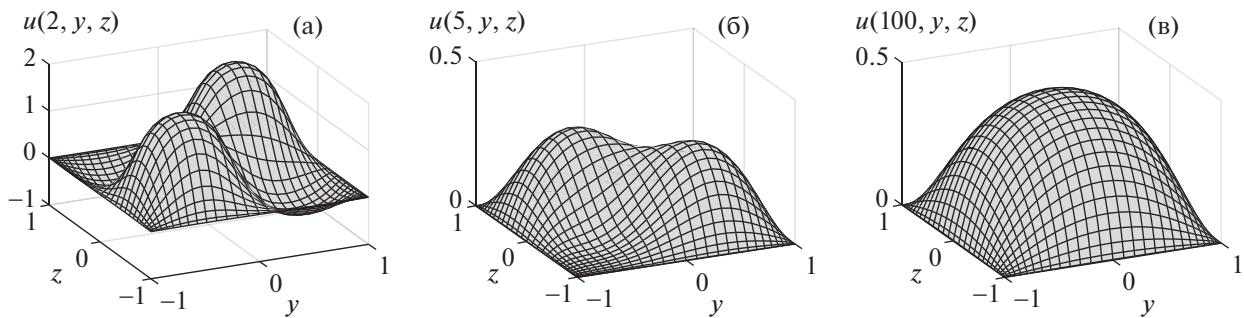
ния  $\|D_u(y, z)\|$  при изменении  $c_k$  в широких диапазонах остаются малыми за исключением окрестности некоторой точки (в данном случае точки  $c_k \approx 1.52$ ), где они резко возрастают (фиг. 2в). Такая особенность связана с *переключением установившегося решения нестационарной задачи с решения, соответствующего ветви  $\sigma_3$ , на решение, соответствующее ветви  $\sigma_1$ , стационарной задачи*. Этот важный эффект, который далее будем именовать “переключение  $3 \rightarrow 1$ ”, обсудим чуть ниже.

На фиг. 2 для некоторых режимов течения показаны значения относительных отклонений  $D_u(y, z)$  предельных решений нестационарной задачи от решений стационарной задачи. В большинстве случаев отклонения имеют высокочастотные колебания, амплитуда которых возрастает в окрестности границ, достигая значений порядка  $10^{-10}$ – $10^{-8}$  (фиг. 2а). Проведенные эксперименты позволяют заключить, что такой характер поведения  $D_u(y, z)$  связан с вычислительной погрешностью и значениями  $K$ ,  $M$  и  $\varepsilon_s$ . Однако в некоторых случаях наблюдаются конкретные тенденции в поведении  $D_u(y, z)$ : например, рост этих значений при уменьшении ширины канала в окрестности стенок, имеющих большую длину (фиг. 2б); или рост отклонений в центре канала при переключении  $3 \rightarrow 1$  (фиг. 2в).

На фиг. 3, 4 показаны зависимости скорости течения в центре канала от времени  $u_c(t) = u(t, 0, 0)$  (штрихи), полученные при решении нестационарной задачи (5)–(9) с вариацией значений  $W$  и  $c_k$ . На этих же графиках серыми линиями отмечены значения решений стационарных уравнений (10), (12) в точке  $y = 0$ ,  $z = 0$ , полученные при использовании тех ветвей функции  $\sigma(\mu)$ , которые обеспечивают сходимость метода установления. Значения параметров рассмотренных режимов соответствуют указанным в табл. 2, 3.



**Фиг. 4.** Значения скорости  $u_c(t)$ , полученные при решении нестационарной задачи (штрихи), и соответствующие значения решений стационарной задачи в точке  $y = 0, z = 0$  (серые линии) при  $W = 0.01, \beta = 0.37, A_0 = 20, r = 1$  и различных  $c_k$ : (а)  $c_k = 1$ , (б)  $c_k = 1.52$ , (в)  $c_k = 2$ .

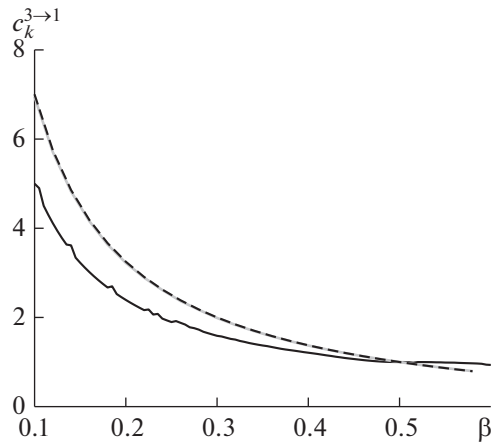


**Фиг. 5.** Значения скорости  $u(t, y, z)$ , рассчитанные при  $A_0 = 1, \beta = 0.1, c_k = 1, r = 1$  и  $W = 3$  в различные моменты времени: (а)  $t = 2$ , (б)  $t = 5$ , (в)  $t = 100$ .

Отметим, что колебания значений на фиг. 3 характеризуют сложный процесс установления течения при достаточно больших  $W$ . Более подробно этот процесс прослеживается на фиг. 5, где приведены распределения скорости  $u(t, y, z)$  в различные моменты времени  $t$ . Видно, что на начальных этапах (при малых  $t$ ) имеют место сильные колебания решения, а также течения в направлении, противоположном градиенту давления (области отрицательных значений скорости видны на фиг. 5а). При  $t \approx 8$  сильные колебания затухают и течение плавно выходит на стационарный режим.

На фиг. 4 показано, что количество решений стационарной задачи (10), (12), которые удается получить с помощью метода установления, меняется в зависимости от параметров задачи. Существенное влияние при этом оказывают параметры  $\beta$  и  $c_k$ . Причем при определенном соотношении этих параметров происходит переключение  $3 \rightarrow 1$ .

Более конкретно, при значениях параметров  $A_0 = 20, W = 0.01, r = 1, \beta = 0.37$  и  $c_k < 1.515$  методом установления удастся получить два стационарных решения, соответствующих ветвям  $\sigma_1, \sigma_3$ , при этом устойчивое решение соответствует ветви  $\sigma_3$  (фиг. 4а). При  $c_k \approx 1.515$  метод установления перестает сходиться для  $\sigma = \sigma_3$ , и происходит переключение  $3 \rightarrow 1$ . В диапазоне  $1.515 < c_k < 1.528$  удастся получить единственное решение стационарной задачи для  $\sigma = \sigma_1$  (фиг. 4б). В диапазоне  $1.528 < c_k < 1.532$  – два решения для  $\sigma = \sigma_{1,2}$ . При  $c_k > 1.532$  – три решения для всех  $\sigma = \sigma_{1,2,3}$  (фиг. 4в). При этом для  $c_k > 1.515$  устойчивым остается решение, соответствующее ветви  $\sigma_1$ . Подчеркнем, что неравенства, указанные в этом примере, были получены в расчетах и являются приближенными. Заметим, что описанный характер исчезновения и возникновения численных решений стационарной задачи при увеличении  $c_k$ , а также переключения  $3 \rightarrow 1$  сохраняется при вариации других параметров задачи.



Фиг. 6. Кривые  $c_k^{3 \rightarrow 1}(\beta)$  при  $A_0 = 1$ ,  $r = 1$  и различных  $W$ :  $W = 0.01$  (штрихи),  $W = 0.1$  (серая линия),  $W = 1$  (черная линия).

Обозначим  $c_k^{3 \rightarrow 1}$  значение  $c_k$ , при котором происходит переключение  $3 \rightarrow 1$ . На фиг. 6 показан график зависимости  $c_k^{3 \rightarrow 1}$  от  $\beta$  при различных значениях параметра  $W$ . Из фиг. 6 следует, что при малых значениях  $W$  кривые  $c_k^{3 \rightarrow 1}(\beta)$  практически совпадают (серая и штриховая линии), однако при увеличении  $W$  кривая меняется. Аналогичная картина наблюдается при увеличении  $A_0$ .

Обозначим символом  $c_k^{1,2,3}$  минимальное значение параметра  $c_k$ , при котором стационарная задача имеет три решения, соответствующие ветвям  $\sigma_{1,2,3}$ , и рассмотрим зависимость  $c_k^{1,2,3}(\beta)$ . Из примера, приведенного выше, можно заключить, что  $c_k^{1,2,3}(0.37) \approx 1.532$ . При проведении вычислений установлено, что линия  $c_k^{1,2,3}(\beta)$  практически не меняется при вариации других параметров задачи и с высокой точностью аппроксимируется гиперболой  $c_k^{1,2,3}(\beta) \approx 3/(4\beta) - 0.5$ . График этой гиперболы визуально неотличим от штриховой линии на фиг. 6. При уменьшении параметров  $W$  и  $A_0$  кривые перехода  $c_k^{3 \rightarrow 1}(\beta)$  стремятся к этой гиперболе снизу. При приближении значений  $W$  и  $A_0$  к предельным, кривая  $c_k^{3 \rightarrow 1}(\beta)$  существенно отдалается от  $c_k^{1,2,3}(\beta)$  и меняет форму. При малых значениях  $W$  и  $A_0$  и вариации  $r$  в широких диапазонах кривые  $c_k^{3 \rightarrow 1}(\beta)$  остаются в окрестности  $c_k^{1,2,3}(\beta)$ .

В заключение отметим, что реализуемость стационарного течения существенно зависит от начальных данных. При проведении экспериментов здесь использованы нулевые начальные данные (9). Однако, если задать начальную функцию для скорости с достаточно большими значениями в центре канала, либо функцию, несогласованную с граничными условиями, стационарное течение типа Пуазейля не реализуется.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978 [Loitsyanskii L.G. Mechanics of liquids and gases. Oxford: Stewartson Pergamon Press; Moscow: Nauka, 1978].
2. Алтухов Ю.А., Гусев А.С., Пышнограй Г.В. Введение в мезоскопическую теорию текучести полимерных систем. Барнаул: АлтГПА, 2012 [Altukhov Yu.A., Gusev A.S., Pyshnograï G.V. Introduction to the mesoscopic theory of flowing polymer systems. Barnaul: AltGPA, 2012].
3. Pokrovskii V.N. The mesoscopic theory of polymer dynamics. 2nd ed. Berlin: Springer, 2010.
4. Vinogradov G.V., Pokrovskii V.N., Yanovsky Yu.G. Theory of viscoelastic behavior of concentrated polymer solutions and melts in one-molecular approximation and its experimental verification // Rheol. Acta. 1972. V. 7. P. 258–274.
5. Блохин А.М., Семисалов Б.В. Стационарное течение несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости в канале с эллиптическим сечением // Сиб. журн. индустриал. матем. 2014. Т. XVII. № 4 (60). С. 38–47

- [*Blokhin A.M., Semisalov B.V.* A stationary flow of an incompressible viscoelastic fluid in a channel with elliptic cross section // *J. Appl. Industr. Math.* 2015. V. 9. 1. P. 18–26].
6. *Блохин А.М., Семисалов Б.В.* Расчет стационарных неізотермических МГД течений полимерной жидкости в каналах с внутренними нагревательными элементами // *Сиб. журн. индустриал. матем.* 2020. Т. 23. № 2. С. 17–40 [*Blokhin A.M., Semisalov B.V.* Simulation of the stationary nonisothermal MHD flows of polymeric fluids in channels with interior heating elements // *J. Appl. Industr. Math.* 2020. V. 14. № 2. P. 222–241].
  7. *Семисалов Б.В.* Быстрый нелокальный алгоритм решения краевых задач Неймана–Дирихле с контролем погрешности // *Вычисл. методы и программирование.* 2016. Т. 17. № 4. С. 500–522 [*Semisalov B.V.* A fast nonlocal algorithm for solving Neumann-Dirichlet boundary value problems with error control // *Vych. Metody Programm.* 2016. V. 17. Is. 4. P. 500–522].
  8. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970 [*Sedov L.I.* Mechanics of continuous media. V. 1. Singapore: World Sci., 1997].
  9. *Pai Shih-I.* Introduction to the theory of compressible flow. Literary Licensing, LLC. 2013.
  10. *Зинович С.А., Головичёва И.Э., Пышнограй Г.В.* Влияние молекулярной массы на сдвиговую и продольную вязкость линейных полимеров // *Прикладн. механ. и техн. физ.* 2000. Т. 41. № 2. С. 154–160 [*Golovicheva S.A., Zinovich G.V., Pyshnograï G.V.* Effect of the molecular mass on the shear and longitudinal viscosity of linear polymers // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2000. V. 41. P. 347–352].
  11. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2002 [*Babenko K.I.* Fundamentals of numerical analysis. Moscow–Izhevsk: Sci. Publ. Center “Regular and chaotic dynamics”, 2002].