ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 2, с. 217–231

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ДВУХСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ С РАЗЛИЧНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ НА УЧАСТКАХ ГРАНИЦЫ

© 2022 г.

А. Р. Данилин

620990 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Россия

e-mail: dar@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 24.03.2021 г.
Переработанный вариант 24.03.2021 г.
Принята к публикации 12.10.2021 г.

Рассматривается задача оптимального граничного управления решениями уравнения эллиптического типа в ограниченной области с гладкой границей с малым коэффициентом при операторе Лапласа и интегральными ограничениями на управление. На каждой из компонент границы интенсивность управления своя. Получено полное асимптотическое разложение по степеням малого параметра решения рассматриваемой задачи. Библ. 15.

Ключевые слова: сингулярные задачи, оптимальное управление, краевые задачи для систем уравнений в частных производных, асимптотические разложения.

DOI: 10.31857/S0044466922020077

ВВЕДЕНИЕ

Задачи оптимального управления, описывающиеся уравнениями в частных производных, особенно в постановках [1], давно привлекают внимание исследователей. Исследование этих задач не теряет своей актуальности и в настояще время (см., например, [2]–[4] и библиографию в них). Однако исследований таких задач, содержащих малый параметр, очень мало, особенно, когда ищется полное асимптотическое разложение по малому параметру их решений. Одними из первых работ, где строилась такая асимптотика, были работы [5], [6], в которых на управление накладывались геометрические ограничения.

В научной школе А.М. Ильина по асимптотическому анализу исследованы некоторые задачи оптимального управления, описывающиеся краевыми задачами для линейных уравнений эллиптического типа с интегрально квадратичным критерием качества (как с распределенным управлением (см. [7], [8]), так и с граничным (см. [9], [10])) и с различного рода сингулярностями (малый параметр при старших производных, малые полости в области определения уравнения, наличие угловых точек на границе). Условия оптимальности в таких задачах описываются краевыми задачами для систем двух уравнений эллиптического типа с дополнительным параметром (когда ограничения на управление по существу) и дополнительным соотношением на этот параметр. В ряде случаев такие задачи являются бисингулярными и для построения полного асимптотического разложения применяется метод согласования (см. [11]).

Данная работа является обобщением работы [12] на случай управления потоком через границу двухсвязной области с различной интенсивностью управления на каждой из частей границы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\Omega := \Omega_1 \backslash \overline{\Omega}_2 \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ – ограниченная двухсвязная область $(\overline{\Omega}_2 \subset \Omega_1)$ с границей $\Gamma := \partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 =: \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, удовлетворяющей условию: граница Γ области Ω есть бесконечно дифференцируемое многообразие размерности $n - 1$, расположенное локально по одну сторону от Γ (иными словами, мы рассматриваем $\overline{\Omega}$ как многообразие с краем Γ класса C^∞).

Рассматривается следующая задача граничного оптимального управления (см. [1, гл. 2, соотношения (2.41), (2.9)]):

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon := -\varepsilon^2 \Delta z_\varepsilon + a(x) z_\varepsilon = f(x), \quad x \in \Omega, \quad z_\varepsilon \in H^1(\Omega),\\
&\varepsilon^2 \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial n} = g_1(x) + \mu_1 u_\varepsilon(x), \quad x \in \Gamma_1, \quad u_\varepsilon \in \mathcal{U},\\
&\varepsilon^2 \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial n} = g_2(x) + \mu_2 u_\varepsilon(x), \quad x \in \Gamma_2,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

$$
\mathcal{U} := \mathcal{U}_1, \quad \text{где} \quad \mathcal{U}_r := \{u(\cdot) \in L_2(\Gamma) : |||u||| \le r\}, \tag{1.2}
$$

$$
J(u_\varepsilon) := \|z_\varepsilon - z_d\|^2 + \nu^{-1} |||u_\varepsilon(\cdot)|||^2 \to \inf, \quad u \in \mathcal{U}. \tag{1.3}
$$

Здесь $\nu > 0$, $H^1(\Omega)$ – соболевское пространство функций, $\partial/\partial n$ – производная по внешней нормали к Γ, а через $\|\cdot\|$, $|||\cdot|||$, $|||\cdot|||_i$, $i = 1, 2$, обозначены нормы в пространствах $L_2(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$ и $L_2(\Gamma_i)$ соответственно. Скалярные произведения в этих пространствах будем обозначать через $(\cdot,\cdot)$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_i$ соответственно.

Для функций, определенных на границе области, будем использовать следующие обозначения: если $g \in L_2(\Gamma)$, то $g_i := g|_{\Gamma_i} \in L_2(\Gamma_i)$, $i = 1, 2$. И наоборот, если $g_i \in L_2(\Gamma_i)$, $i = 1, 2$, то через $g \in L_2(\Gamma)$ будем обозначать функцию такую, что $g_i := g|_{\Gamma_i} \in L_2(\Gamma_i)$, $i = 1, 2$.

Предполагается, что выполнены следующие условия:

$$
\begin{gathered}
a(\cdot), f(\cdot), z_d(\cdot) \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad g_1(\cdot) \in C^\infty(\Gamma_1), \quad g_2(\cdot) \in C^\infty(\Gamma_1),\\
\forall x \in \overline{\Omega} \quad a(x) \ge \alpha^2, \quad \alpha > 0 \quad \mu_1 > 0, \quad \mu_2 > 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1,
\end{gathered}
\tag{1.4}
$$

а решение краевой задачи (1.1) понимается в обобщенном смысле (см., например, [1, гл. 1, § 3, п. 3.4]): для любого $\varphi \in H^1(\Omega)$ (с учетом (1.2) и (1.4)) справедливо равенство

$$
\varepsilon^2(\nabla z_\varepsilon, \nabla\varphi) + (a(\cdot) z_\varepsilon, \varphi) - \langle g_1 + \mu_1 u_\varepsilon, \varphi\rangle_1 - \langle g_2 + \mu_2 u_\varepsilon, \varphi\rangle_2 = (f, \varphi). \tag{1.5}
$$

2. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ И АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ

В этом случае единственное оптимальное управление $u_\varepsilon(\cdot)$ и соответствующее ему $z_\varepsilon(\cdot)$ находятся как решение следующей задачи (см. [1, гл. 2, соотношения (2.41), (2.36), (2.49)]):

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon = f(x), \quad \mathcal{L}_\varepsilon p_\varepsilon - z_\varepsilon = -z_d, \quad x \in \Omega, \quad z_\varepsilon, p_\varepsilon \in H^1(\Omega),\\
&\varepsilon^2 \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial n} = g_1(x) + \mu_1 u_\varepsilon(x), \quad \varepsilon^2 \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_1,\\
&\varepsilon^2 \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial n} = g_2(x) + \mu_2 u_\varepsilon(x), \quad \varepsilon^2 \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_2,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

$$
\forall v(\cdot) \in \mathcal{U} \quad \left\langle p_\varepsilon + \nu^{-1}\mu u_\varepsilon, \mu v - \mu u_\varepsilon \right\rangle \ge 0. \tag{2.2}
$$

Здесь

$$
\mu(x) := \begin{cases} \mu_1, & x \in \Gamma_1,\\ \mu_2, & x \in \Gamma_2. \end{cases} \tag{2.3}
$$

Лемма 1. *Пусть* $p \in L_2(\Gamma)$, $u \in \mathcal{U}_r$, $\mu \in L_2(\Gamma)$ *и* $\mu(x) \ne 0$ *почти всюду на* Γ. *Тогда условие*

$$
\forall v(\cdot) \in \mathcal{U} \quad \left\langle p + \nu^{-1}\mu u, \mu v - \mu u \right\rangle \ge 0 \tag{2.4}
$$

эквивалентно следующему:

$$
\exists \lambda \ge 0 \quad \left(|||\hat\lambda(\cdot;\lambda) p||| \le r\right) \wedge \left(\lambda\left(r - |||\hat\lambda(\cdot;\lambda) p|||\right) = 0\right), \quad \hat\lambda(x;\lambda) := \frac{\nu\mu(x)}{\nu\lambda + \mu^2(x)}. \tag{2.5}
$$

При этом

$$u = -\hat{\lambda}(\cdot;\lambda)\, p\big|_{\Gamma} \quad \text{и} \quad |||u||| < r \Leftrightarrow \lambda = 0. \tag{2.6}$$

Доказательство. Поскольку

$$0 \le \left\langle p + \nu^{-1}\mu u, \mu v - \mu u \right\rangle = \left\langle \mu p + \nu^{-1}\mu^2 u, v - u \right\rangle = \left\langle \mu p + \nu^{-1}\mu^2 u, v \right\rangle - \left\langle \mu p + \nu^{-1}\mu^2 u, u \right\rangle,$$

то, взяв минимум по $v \in \mathcal{U}_r$ — шару радиуса r с центром в нуле, получим

$$-r\left|\left|\left|\mu p + \nu^{-1}\mu^2 u\right|\right|\right| \ge \left\langle \mu p + \nu^{-1}\mu^2 u, u \right\rangle,$$

что в силу неравенства Коши—Буняковского дает

$$-r\left|\left|\left|\mu p + \nu^{-1}\mu^2 u\right|\right|\right| = \left\langle \mu p + \nu^{-1}\mu^2 u, u \right\rangle. \tag{2.7}$$

Тем самым (2.4) эквивалентно равенству (2.7).

Если $\mu p + \nu^{-1}\mu^2 u = 0$, то (2.7) выполняется и $u = -\nu p/\mu$. В противном случае

$$u = -\frac{(\mu p + \nu^{-1}\mu^2 u) r}{\left|\left|\left|\mu p + \nu^{-1}\mu^2 u\right|\right|\right|}.$$

Пусть $\lambda := \left|\left|\left|\mu p + \nu^{-1}\mu^2 u\right|\right|\right|/r$. Тогда $u = -\lambda p$, откуда находим

$$u = -\frac{\nu\mu(x)}{\nu\lambda + \mu^2(x)}\, p,$$

т.е. (2.5) выполняется и, если $|||u||| < r$, то $\lambda = 0$.

Пусть теперь $\lambda \ge 0$ и удовлетворяет (2.5). Положим

$$u_\lambda := -\hat{\lambda}(x;\lambda) p = -\frac{\nu\mu(x)}{\nu\lambda + \mu^2(x)}\, p.$$

В этом случае

$$p = -\frac{\nu\lambda + \mu^2(x)}{\nu\mu(x)}\, p, \quad \text{а} \quad \mu p + \nu^{-1}\mu^2 u = -\lambda u_\lambda.$$

Таким образом, вектора $\mu p + \nu^{-1}\mu^2$ и u_λ противоположно направлены и поэтому

$$\left\langle \mu p + \nu^{-1}\mu^2 u_\lambda, u_\lambda \right\rangle = -\lambda |||u_\lambda|||^2 - |||u_\lambda||| \cdot \left|\left|\left|\mu p + \nu^{-1}\mu^2 u_\lambda\right|\right|\right|.$$

Отметим, что если $\mu p + \nu^{-1}\mu^2 u_\lambda \ne 0$, то $\lambda \ne 0$ и в силу (2.5) $|||u_\lambda||| = r$, т.е. (2.7) выполнено.

В силу леммы 1 задача (2.1)—(2.3) (а значит, и задача (1.1)—(1.3)) эквивалентна краевой задаче

$$\begin{gathered}
\mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon = f(x), \quad \mathcal{L}_\varepsilon p_\varepsilon - z_\varepsilon = -z_d, \quad x \in \Omega, \quad z_\varepsilon, p_\varepsilon \in H^1(\Omega), \\
\varepsilon^2 \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial n} + \hat{\lambda}_{1,\varepsilon} p_\varepsilon(x) = g_1(x), \quad \varepsilon^2 \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_1, \\
\varepsilon^2 \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial n} + \hat{\lambda}_{2,\varepsilon} p_\varepsilon(x) = g_2(x), \quad \varepsilon^2 \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_2, \\
\hat{\lambda}_{1,\varepsilon} = \frac{\nu\mu_1}{\nu\lambda_\varepsilon + \mu_1^2}, \quad \hat{\lambda}_{2,\varepsilon} = \frac{\nu\mu_2}{\nu\lambda_\varepsilon + \mu_2^2}, \quad \lambda_\varepsilon \ge 0,
\end{gathered} \tag{2.8}$$

зависящей от скалярного параметра $\lambda_\varepsilon \ge 0$ с дополнительным соотношением (2.5) при $r = 1$. Оптимальное управление u_ε определяется функцией p_ε по формуле (2.6), принимающей вид $u_\varepsilon = -\hat{\lambda}(\cdot;\lambda) p\big|_\Gamma$.

При этом, если в задаче (1.1)–(1.3) ограничение на управление не по существу, то

$$\lambda_\varepsilon = 0, \quad \hat\lambda_{1,\varepsilon} = \frac{\nu}{\mu_1} =: \hat\lambda_{1,\nu}, \quad \hat\lambda_{2,\varepsilon} = \frac{\nu}{\mu_2} =: \hat\lambda_{2,\nu}. \tag{2.9}$$

Отметим, что в любом случае

$$0 < \hat\lambda_{1,\varepsilon} \le \frac{\nu}{\mu_1}, \quad 0 < \hat\lambda_{2,\varepsilon} \le \frac{\nu}{\mu_2}. \tag{2.10}$$

Цель работы – изучить поведение z_ε, p_ε и λ_ε при $\varepsilon \to 0$.

В дальнейшем различные положительные константы, зависящие только от области Ω и коэффициента $a(\cdot)$, часто будем обозначать одной и той же буквой K (возможно с индексами).

В [9, лемма 2] доказано, что если выполнено условие (1.4), $f \in L_2(\Omega)$, $q \in L_2(\Gamma)$ и y_ε есть решение задачи

$$\mathcal{L}_\varepsilon y_\varepsilon = f(x), \quad x \in \Omega, \quad y_\varepsilon \in H^1(\Omega), \quad \varepsilon^2 \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial n} = q(x), \quad x \in \Gamma, \tag{2.11}$$

то существует $K > 0$ такое, что

$$\max\{\varepsilon^{1/2}\|y\|, \varepsilon|\!|\!|y|\!|\!|, \varepsilon^{3/2}\|\nabla y\|\} \le K(|\!|\!|q|\!|\!| + \varepsilon^{1/2}\|f\|) =: KD(f,q). \tag{2.12}$$

Поскольку z_ε – решение задачи (1.1), (1.2) есть решение задачи (2.11) с функцией q такой, что $q|_{\Gamma_i} = g_i + \mu_i u_\varepsilon$, $i = 1,2$, то

$$|\!|\!|g + u|\!|\!| \le \mu + |\!|\!|g|\!|\!|, \quad \mu := \mu_1 + \mu_2, \quad |\!|\!|g|\!|\!| := |\!|\!|g_1|\!|\!|_1^2 + |\!|\!|g_2|\!|\!|_2^2.$$

Применяя (2.12), получаем, что

$$\varepsilon^{1/2}\|z_\varepsilon\| \le K(|\!|\!|g|\!|\!| + \mu + \varepsilon^{1/2}\|f\|). \tag{2.13}$$

Но p_ε удовлетворяет (2.11) с $f = -z_d$ и $q = 0$, поэтому в силу (2.12) получим, что

$$D(-z_d, 0) = \varepsilon^{1/2}\|z_\varepsilon + z_d\| \le \varepsilon^{1/2}\|z_\varepsilon\| + \varepsilon^{1/2}\|z_d\| \overset{(2.13)}{\le} K(|\!|\!|g|\!|\!| + \mu + \varepsilon^{1/2}\|f\|) + \varepsilon^{1/2}\|z_d\|.$$

Таким образом, если $\{z_\varepsilon, p_\varepsilon\}$ – решение задачи (2.8), (1.1)–(1.3), то существует $K > 0$ такое, что

$$\max\{\varepsilon^{1/2}\|z_\varepsilon\|, \varepsilon|\!|\!|z_\varepsilon|\!|\!|, \varepsilon^{3/2}\|\nabla z_\varepsilon\|\} \le K(|\!|\!|g|\!|\!| + \mu + \varepsilon^{1/2}\|f\| + \varepsilon^{1/2}\|z_d\|),$$
$$\max\{\varepsilon^{1/2}\|p_\varepsilon\|, \varepsilon|\!|\!|p_\varepsilon|\!|\!|, \varepsilon^{3/2}\|\nabla p_\varepsilon\|\} \le K(|\!|\!|g|\!|\!| + \mu + \varepsilon^{1/2}\|f\| + \varepsilon^{1/2}\|z_d\|).$$

Тем самым, для z_ε – решения задачи (1.1)–(1.3), получим следующие асимптотические оценки:

$$\|z_\varepsilon\| = O(\varepsilon^{-1/2}), \quad \|p_\varepsilon\| = O(\varepsilon^{-1/2}), \quad |\!|\!|z_\varepsilon|\!|\!| = O(\varepsilon^{-1}), \quad |\!|\!|p_\varepsilon|\!|\!| = O(\varepsilon^{-1}), \quad \varepsilon \to 0.$$

В [10, теорема 1] показано, что если

$$f_j \in L_2(\Omega), \quad g_{j,i} \in H^{1/2}(\Gamma_i), \quad j,i = 1,2, \tag{2.14}$$

то при любых $\hat\lambda_1 > 0$ и $\hat\lambda_2 > 0$ задача

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_\varepsilon z = f_1(x), \quad \mathcal{L}_\varepsilon p - z = f_2(x), \quad x \in \Omega, \quad z, p \in H^1(\Omega), \\ &\varepsilon^2 \frac{\partial z}{\partial n} + \hat\lambda_1 p = g_{1,1}(x), \quad \varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial n} = g_{2,1}(x), \quad x \in \Gamma_1, \\ &\varepsilon^2 \frac{\partial z}{\partial n} + \hat\lambda_2 p = g_{1,2}(x), \quad \varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial n} = g_{2,2}(x), \quad x \in \Gamma_2, \end{aligned} \tag{2.15}$$

разрешима единственным образом и функции $\{z, p\}$ – ее решение, удовлетворяют соотношению $z, p \in H^2(\Omega)$.

При этом, если $f_j \in C^\infty(\bar\Omega)$, а $g_{j,i} \in C^\infty(\Gamma_i)$, $j,i = 1,2$, то $z, p \in C^\infty(\bar\Omega)$.

Лемма 2. *Пусть* $\{z, p\}$ *— решение задачи* (2.15). *Тогда*

$$\|z\|^2 + \hat{\lambda}_1 \| p \|_1^2 + \hat{\lambda}_2 \| p \|_2^2 = (f_1, p) - (f_2, z) + \langle g_{1,1}, p\rangle_1 - \langle g_{2,1}, z\rangle_1 + \langle g_{1,2}, p\rangle_2 - \langle g_{2,2}, z\rangle_2 . \tag{2.16}$$

Доказательство. В силу определения обобщенного решения задачи (2.15) (см. (1.5)) для любых $\varphi, \psi \in H^1(\Omega)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2(\nabla z, \nabla\varphi) + (a(\cdot)z, \varphi) + \langle \hat{\lambda}_1 p - g_{1,1}, \varphi\rangle_1 + \langle \hat{\lambda}_2 p - g_{1,2}, \varphi\rangle_2 = (f_1, \varphi), \\ &\varepsilon^2(\nabla p, \nabla\psi) + (a(\cdot)p, \psi) - (z, \psi) - \langle g_{2,1}, \psi\rangle_1 - \langle g_{2,2}, \psi\rangle_2 = (f_2, \psi). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Положив $\varphi = p$ в (2.17), а $\psi = z$, и вычитая из первого получившегося равенства второе, получим (2.16).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1.4) *и* (2.14). *Если* $\{z, p\}$ *— решение задачи* (2.15), *то существует* $K > 0$ *такое, что справедливы оценки*

$$\max\{\varepsilon^{3/2}\|z\|, \varepsilon^2 \| z \|, \varepsilon^{5/2}\|\nabla z\|\} \le K(\varepsilon + \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2)D_1(f, g),$$
$$\max\{\varepsilon\|p\|, \varepsilon^{3/2} \| p \|, \varepsilon^2\|\nabla p\|\} \le K(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\hat{\lambda}_1} + \sqrt{\hat{\lambda}_2})D_1(f, g),$$

где $D_1(f, g) := \varepsilon^{1/2}(\|f\|_1 + \|f_2\|) + \| g_1 \| + \| g_2 \|$.

Доказательство. Сначала рассмотрим z_1 и p_1 — решение задачи

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_\varepsilon z_1 = f_1(x), \quad \mathcal{L}_\varepsilon p_1 - z_1 = f_2(x), \quad x \in \Omega, \quad z, p \in H^1(\Omega), \\ &\varepsilon^2 \frac{\partial z}{\partial n} = g_{1,1}(x), \quad \varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial n} = g_{2,1}(x), \quad x \in \Gamma_1, \\ &\varepsilon^2 \frac{\partial z}{\partial n} = g_{1,2}(x), \quad \varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial n} = g_{2,2}(x), \quad x \in \Gamma_2. \end{aligned}$$

Тогда в силу (2.12)

$$\max\{\varepsilon^{1/2}\|z_1\|, \varepsilon \| z_1 \|, \varepsilon^{3/2}\|\nabla z_1\|\} \le K(\| g_1 \| + \varepsilon^{1/2}\|f_1\|) \le KD_1(f, g). \tag{2.18}$$

Так как p_1 удовлетворяет (2.11) с $f = f_2 + z_1$ и $q = g_2$, то

$$D(f_2 + z_1, g_2) \le \| g_2 \| + \varepsilon^{1/2}\|f_2\| + \varepsilon^{1/2}\|z_1\| \overset{(2.18)}{\le} \| g_2 \| + \varepsilon^{1/2}\|f_1\| + KD(f_1, g_1).$$

Таким образом, в силу (2.12) для функции p_1 тоже справедливы оценки вида (2.18):

$$\max\{\varepsilon^{1/2}\|p_1\|, \varepsilon \| p_1 \|, \varepsilon^{3/2}\|\nabla p_1\|\} \le K_1 D_1(f, g). \tag{2.19}$$

Теперь функции $z_2 := z - z_1$ и $p_2 := p - p_1$ удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_\varepsilon z_2 = 0, \quad \mathcal{L}_\varepsilon p_2 - z_2 = 0, \quad x \in \Omega, \quad z, p \in H^1(\Omega), \\ &\varepsilon^2 \frac{\partial z}{\partial n} + \hat{\lambda}_1 p_2 = -\hat{\lambda}_1 p_1, \quad \varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_1, \\ &\varepsilon^2 \frac{\partial z}{\partial n} + \hat{\lambda}_2 p_2 = -\hat{\lambda}_2 p_1, \quad \varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_2. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Соотношение (2.16), примененное к z_2 и p_2, с учетом вида системы (2.20) дает неравенство

$$\|z_2\|^2 + \hat{\lambda}_1 \| p_2 \|_1^2 + \hat{\lambda}_2 \| p_1 \|_2^2 \le \hat{\lambda}_1 \| p_2 \|_1 \cdot \| p_1 \|_1 + \hat{\lambda}_2 \| p_2 \|_2 \cdot \| p_1 \|_2 . \tag{2.21}$$

Отсюда следует, что

$$\hat{\lambda}_1 \| p_2 \|_1^2 + \hat{\lambda}_2 \| p_2 \|_2^2 \le \hat{\lambda}_1 \| p_2 \|_1 \cdot \| p_1 \| + \hat{\lambda}_2 \| p_2 \|_2 \cdot \| p_1 \| .$$

Последнее неравенство есть квадратичное неравенство относительно $|||p_2|||_1$ и $|||p_2|||_2$. Применяя элементарную оценку решения таких неравенств (получающуюся методом выделения полных квадратов), получаем

$$|||p_2|||_1 \le \left(1 + \frac{\sqrt{\hat\lambda_2}}{2\sqrt{\hat\lambda_1}}\right)|||p_1|||, \quad |||p_2|||_2 \le \left(1 + \frac{\sqrt{\hat\lambda_1}}{2\sqrt{\hat\lambda_2}}\right)|||p_1|||.$$

Отсюда получим

$$\hat\lambda_1\,|||p_2|||_1 + \hat\lambda_2\,|||p_2|||_2 \le (\hat\lambda_1 + \sqrt{\hat\lambda_1\hat\lambda_2} + \hat\lambda_2)\,|||p_1||| \le \left(\sqrt{\hat\lambda_1} + \sqrt{\hat\lambda_2}\right)^2 |||p_1|||. \tag{2.22}$$

Из (2.21) и (2.22) следует, что

$$\|z_2\| \le \left(\sqrt{\hat\lambda_1} + \sqrt{\hat\lambda_2}\right)|||p_1|||. \tag{2.23}$$

Задача для p_2 есть задача (2.11) с $f = z_2$ и $q = 0$. Применив оценки (2.12) (с учетом (2.23) и (2.18)) для p_2, получим

$$D(z_2, 0) = \varepsilon^{1/2}\,\|z_2\| \le \left(\sqrt{\hat\lambda_1} + \sqrt{\hat\lambda_2}\right)\varepsilon^{-1/2} K D_1(f, g).$$

Тем самым,

$$\max\{\varepsilon\|p_2\|, \varepsilon^{3/2}\,|||p_2|||, \varepsilon^2\,\|\nabla p_2\|\} \le K\left(\sqrt{\hat\lambda_1} + \sqrt{\hat\lambda_2}\right) D_1(f, g).$$

Аналогично, задача для z_2 есть задача (2.11) с $f = 0$ и q: $q|_{\Gamma_i} = -\hat\lambda_i(p_1 + p_2)$, $i = 1, 2$. При этом в силу (2.22) и (2.19)

$$\begin{aligned}|||q||| &\le \hat\lambda_1\,|||p_1|||_1 + \hat\lambda_1\,|||p_2|||_1 + \hat\lambda_2\,|||p_1|||_1 + \hat\lambda_2\,|||p_2|||_2 \le 2(\hat\lambda_1 + \hat\lambda_2) + \left(\sqrt{\hat\lambda_1} + \sqrt{\hat\lambda_2}\right)^2 |||p_1||| \le \\ &\le 4(\hat\lambda_1 + \hat\lambda_1)\,|||p_1||| \le 4(\hat\lambda_1 + \hat\lambda_1)\,|||p_1|||\,\varepsilon^{-1} K_1 D_1.\end{aligned}$$

Применив оценки (2.12) для z_2, получим

$$\max\{\varepsilon^{3/2}\,\|z_2\|, \varepsilon^2\,|||z_2|||, \varepsilon^{5/2}\,\|\nabla z_2\|\} \le K_2(\hat\lambda_1 + \hat\lambda_1) D_1(f, g).$$

Теперь для получения итоговых оценок осталось применить неравенство треугольника для норм функций $z = z_1 + z_2$ и $p = p_1 + p_2$.

3. АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ

Для обоснования асимптотических разложений решений задачи (2.8), (2.5) при $r = 1$ нужны теоремы об оценке уклонения точного решения $\{z_\varepsilon, p_\varepsilon, \lambda_\varepsilon\}$ этой задачи от решений аппроксимационной задачи

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_\varepsilon z_{\varepsilon,\gamma} = f(x) + f_{1,\varepsilon,\gamma}(x), \quad \mathcal{L}_\varepsilon p_{\varepsilon,\gamma} - z_{\varepsilon,\gamma} = -z_d + f_{2,\varepsilon,\gamma}(x), \quad x \in \Omega,\\ &\varepsilon^2\frac{\partial z_{\varepsilon,\gamma}}{\partial n} + \hat\lambda_{1,\varepsilon,\gamma} p_{\varepsilon,\gamma} = g_{1,1,\varepsilon,\gamma}(x), \quad \varepsilon^2\frac{\partial p_{\varepsilon,\gamma}}{\partial n} = g_{2,1,\varepsilon,\gamma}(x), \quad x \in \Gamma_1,\\ &\varepsilon^2\frac{\partial z_{\varepsilon,\gamma}}{\partial n} + \hat\lambda_{2,\varepsilon,\gamma} p_{\varepsilon,\gamma} = g_{1,2,\varepsilon,\gamma}(x), \quad \varepsilon^2\frac{\partial p_{\varepsilon,\gamma}}{\partial n} = g_{2,2,\varepsilon,\gamma}(x), \quad x \in \Gamma_2,\end{aligned} \tag{3.1}$$

в случае, когда при $\varepsilon \to 0$

$$\begin{gathered}f_{j,\varepsilon,\gamma} \in C^\infty(\bar\Omega), \quad g_{j,i,\varepsilon,\gamma} \in C^\infty(\Gamma_i), \quad \|f_{j,\varepsilon,\gamma}\| = O(\varepsilon^\gamma),\\ |||g_{j,i,\varepsilon,\gamma}|||_j = O(\varepsilon^\gamma), \quad j, i = 1, 2,\end{gathered} \tag{3.2}$$

и аппроксимации условия (2.5) при $r = 1$.

Отметим, что если при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$|||\hat\lambda(\cdot;\lambda_\varepsilon)p_\varepsilon||| < 1, \tag{3.3}$$

то в этом случае условие (2.5) при $r = 1$ переходит в условие (2.9).

При выполнении (3.3) теорема 1 дает необходимые оценки погрешности аппроксимаций.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (1.4), (3.2) *и* (3.3). *Если* $\{z_\varepsilon, p_\varepsilon, \lambda_\varepsilon\}$ – *решение задачи* (2.8), (2.5) *при* $r = 1$, *а* $\{z_{\varepsilon,\gamma,\nu}, p_{\varepsilon,\gamma,\nu}\}$ – *решение задачи* (3.1) *с* $\lambda_{\varepsilon,\gamma} = 0$, *т.е.* $\hat\lambda_{i,\varepsilon,\gamma} = \hat\lambda_{i,\nu}$, $i = 1,2$, *то*

$$\max\{\varepsilon^{3/2}\|z_\varepsilon - z_{\varepsilon,\gamma,\nu}\|, \varepsilon^2 |||z_\varepsilon - z_{\varepsilon,\gamma,\nu}|||, \varepsilon^{5/2}\|\nabla(z_{\varepsilon,\gamma} - z_{\varepsilon,\gamma,\nu})\|\} = O(\varepsilon^\gamma),$$

$$\max\{\varepsilon\|p_\varepsilon - p_{\varepsilon,\gamma,\nu}\|, \varepsilon^{3/2} |||p_\varepsilon - p_{\varepsilon,\gamma,\nu}|||, \varepsilon^2\|\nabla(p_\varepsilon - p_{\varepsilon,\gamma,\nu})\|\} = O(\varepsilon^\gamma)$$

при $\varepsilon \to 0$.

В случае, когда при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ ограничения на управление по существу, т.е.

$$|||\hat\lambda(\cdot;\lambda_\varepsilon)p_\varepsilon||| = 1, \tag{3.4}$$

аппроксимация условия (2.5) при $r = 1$ имеет вид

$$|||\hat\lambda(\cdot;\lambda_{\varepsilon,\gamma})p_{\varepsilon,\gamma}||| = 1 + O(\varepsilon^\gamma), \tag{3.5}$$

и для получения доказательства аппроксимационной теоремы требуется вспомогательное утверждение о зависимости от r оптимального $u_{\varepsilon,r}$ в задаче (1.1)–(1.3) при условии $|||u_{\varepsilon,r}||| = r$.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* (1.4), *а* $u_{\varepsilon,r}$ — *решение задачи* (1.1)–(1.3) *с* $\mathcal{U} = \mathcal{U}_r$ *и* $|||u_{\varepsilon,r}||| = r$ *при всех* $r \in [r_*; r^*]$. *Тогда при некоторых* $K > 0$ *и* $\varepsilon_0 > 0$

$$\forall r, r' \in [r_*; r^*], \quad \forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_0] \quad |||u_r - u_{r'}||| \le K\varepsilon^{-3}|r - r'|. \tag{3.6}$$

Доказательство. Пусть $z_{\varepsilon,0}$ – решение задачи (1.1) с $u = 0$, а оператор $A : L_2(\Gamma_1) \to L_2(\Omega)$ ставит в соответствие функции u_ε решение задачи (1.1) с $f = 0$ и $g = 0$. Тогда $z_\varepsilon = z_{\varepsilon,0} + Au_\varepsilon$ и функционал качества примет вид

$$J(u_\varepsilon) = \|Au_\varepsilon + v_0\|^2 + \nu^{-1}|||u_\varepsilon|||,$$

где $v_0 := z_{\varepsilon,0} - z_d$. По теореме 3 из [12]

$$|||u_r - u_{r'}||| \le K \cdot |r - r'| \cdot \|A\|^2 \cdot (\|A\| + \|v_0\|)^4.$$

По определению $\|A\|$ в силу оценок (2.13) получим $\|A\| \le K(\varepsilon^{-1/2}(1 + \mu) + 0) \le K_1\varepsilon^{-1/2}$. При этом $\|v_0\| \le \|z_{\varepsilon,0}\| + \|z_d\| \overset{(2.12)}{\le} K(\varepsilon^{-1/2}(|||g||| + \mu) + \|f\|) + \|z_d\|$. Тем самым

$$|||u_r - u_{r'}||| \le K_2\varepsilon^{-3}|r - r'|$$

при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (1.4), (3.2) *и* (3.4). *Если* $\{z_\varepsilon, p_\varepsilon, \lambda_\varepsilon\}$ – *решение задачи* (2.8), (2.5) *при* $r = 1$, *а* $\{z_{\varepsilon,\gamma}, p_{\varepsilon,\gamma}\}$ – *решение задачи* (3.1) *с* (3.2), (3.5), *то*

$$\mathrm{ma}\{\varepsilon^{3/2}\|z_\varepsilon - z_{\varepsilon,\gamma}\|, \varepsilon^2 |||z_\varepsilon - z_{\varepsilon,\gamma}|||, \varepsilon^{5/2}\|\nabla z_\varepsilon - z_{\varepsilon,\gamma}\|\} = O(\varepsilon^{\gamma-3}),$$

$$\max\left\{\varepsilon\|p_\varepsilon - p_{\varepsilon,\gamma}\|, \varepsilon^{3/2}|||p_\varepsilon - p_{\varepsilon,\gamma}|||, \varepsilon^2\|\nabla p_\varepsilon - p_{\varepsilon,\gamma}\|, \|\hat\lambda(\cdot;\lambda_\varepsilon) - \hat\lambda(\cdot;\lambda_{\varepsilon,\gamma})\|_{C(\Gamma)}\right\} = O(\varepsilon^{\gamma-9/2})$$

при $\varepsilon \to 0$, *и* $\gamma > 4$.

Доказательство. Функции $\hat z_{\varepsilon,\gamma} := z_{\varepsilon,\gamma} - z_\varepsilon$ и $\hat p_{\varepsilon,\gamma} := p_{\varepsilon,\gamma} - p_\varepsilon$ являются решением системы

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_\varepsilon \hat z_{\varepsilon,\gamma} = f_{1,\varepsilon,\gamma}(x), \quad \mathcal{L}_\varepsilon \hat p_{\varepsilon,\gamma} - \hat z_{\varepsilon,\gamma} = f_{2,\varepsilon,\gamma}(x), \quad x \in \Omega, \\ &\varepsilon^2\frac{\partial \hat z_{\varepsilon,\gamma}}{\partial n} = g_{1,\varepsilon,\gamma}(x) + \hat\lambda(x;\lambda_\varepsilon)p_\varepsilon - \hat\lambda(x;\lambda_{\varepsilon,\gamma})p_{\varepsilon,\gamma}, \quad \varepsilon^2\frac{\partial p}{\partial n} = g_{2,\varepsilon,\gamma}(x), \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Поскольку

$$|||\hat\lambda(x;\lambda_\varepsilon)p_\varepsilon - \hat\lambda(x;\lambda_{\varepsilon,\gamma})p_{\varepsilon,\gamma}||| \overset{(3.6)}{\le} K\varepsilon^{-3}\Big|\,|||\hat\lambda(\cdot;\lambda_\varepsilon)p_\varepsilon||| - |||\hat\lambda(\cdot;\lambda_{\varepsilon,\gamma})p_{\varepsilon,\gamma}|||\,\Big| \overset{(3.4),(3.5)}{=} O(\varepsilon^{\gamma-3})$$

при $\varepsilon \to 0$, то, применяя к решению системы (3.7) оценки (2.18) и (2.19), получаем все оценки доказываемой теоремы, кроме оценки величины $\left\|\hat{\lambda}(\cdot;\lambda_\varepsilon) - \hat{\lambda}(\cdot;\lambda_{\varepsilon,\gamma})\right\|_{C(\Gamma)}$.

Так как

$$1 \overset{(3.4)}{=} \left\|\hat{\lambda}(\cdot;\lambda_\varepsilon)p_\varepsilon\right\| \overset{(2.10)}{\leq} \frac{\nu}{\tilde{\mu}}\|p_\varepsilon\|, \quad \tilde{\mu} := \min\{\mu_1, \mu_2\} > 0,$$

то

$$\|p_\varepsilon\| \geq \tilde{\mu}/\nu. \tag{3.8}$$

Из (2.10), (3.8) и уже полученных оценок следует, что

$$\frac{\tilde{\mu}}{\nu}\|p_\varepsilon\| \leq \left\|\hat{\lambda}(\cdot;\lambda_\varepsilon) - \hat{\lambda}(\cdot;\lambda_{\varepsilon,\gamma})\right\|_{C(\Gamma)} \cdot \|p_\varepsilon\| \leq \left\|\hat{\lambda}(\cdot;\lambda_\varepsilon)p_\varepsilon - \hat{\lambda}(\cdot;\lambda_{\varepsilon,\gamma})p_{\varepsilon,\gamma}\right\| + \left\|\hat{\lambda}(\cdot;\lambda_{\varepsilon,\gamma})(p_\varepsilon - p_{\varepsilon,\gamma})\right\| = O(\varepsilon^{\gamma-9/2})$$

при $\varepsilon \to 0$.

4. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИКИ

В силу теорем 2 и 3 для построения асимптотического разложения рассматриваемой задачи нужно построить ее *формальное асимптотическое решение* (см., например, [11]). Его построение осуществляется аналогично тому, как это делается в случае одного уравнения (см., например, [14], [15]).

Внешнее разложение ищем в виде рядов

$$z_{\text{out}}(x,\varepsilon) := \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k}z_{2k}(x), \quad p_{\text{out}}(x,\varepsilon) := \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k}p_{2k}(x), \quad \varepsilon \to 0, \tag{4.1}$$

коэффициенты которых находятся из соответствующей рекуррентной системы

$$z_0(x) = \frac{f(x)}{a(x)}, \quad p_0(x) = \frac{z_0 - z_d}{a(x)}, \quad z_{2k}(x) = \frac{\Delta z_{2k-2}}{a(x)}, \quad p_{2k} = \frac{\Delta p_{2k-2}}{a(x)}, \quad k \geq 1. \tag{4.2}$$

В силу (1.4) все $z_{2k}, p_{2k} \in C^\infty(\bar{\Omega})$ и ряды (4.1) хорошо аппроксимируют уравнения из (2.8), но, вообще говоря, не аппроксимируют граничных условий (и дополнительного условия (2.5) в случае (3.4)).

Для аппроксимации граничных условий (и дополнительного условия (2.5)) в малых окрестностях границ Γ_i (пограничные слои) вводятся новые переменные (это можно сделать в силу гладкости границ) (s_i, τ_i), где s_i – координата на многообразии Γ_i, а τ_i – расстояние по нормали к Γ_i, исходящей из точки на Γ_i с координатой s_i.

В пограничных слоях стандартно (см., например, [14], [11, с. 31–34]) перейдем к растянутым переменным $\xi_i := \tau_i\varepsilon^{-1}$ и к следующему виду внутреннего разложения:

$$Z_{i,\text{in}}(s_i, \tau_i\varepsilon) := \varepsilon^{m_0}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m Z_{i,m}(s_i), \quad P_{i,\text{in}}(s_i, \tau_i\varepsilon) := \varepsilon^{m_0}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m P_{i,m}(s_i), \quad i = 1, 2, \tag{4.3}$$

аппроксимирующему однородную систему из (2.8) и подправляющему граничные условия.

При переходе к новым координатам (s_i, ξ_i) оператор $\mathscr{L}_\varepsilon$ перейдет в оператор

$$\tilde{\mathscr{L}}_{\varepsilon,i}Y_i = -\frac{\partial^2 Y_i}{\partial\xi_i^2} + \varepsilon L_{i,1}\frac{\partial Y_i}{\partial\xi_i} + \varepsilon^2 L_{i,2}Y_i + \tilde{a}_i(s_i, \varepsilon\xi_1)Y_i, \quad i = 1, 2.$$

Здесь $L_{i,1}$ и $L_{i,2}$ – дифференциальные операторы 1-го и 2-го порядков, содержащие лишь дифференцирование по переменной s_i, с гладкими коэффициентами от s_i и $\tau_i = \varepsilon\xi_i$, а волна над функцией, определенной в переменных x, означает выражение этой функции в переменных s_i и τ_i.

Подставляя в однородную систему, соответствующую системе из (2.8), ряды (4.3) и разлагая коэффициенты в уравнениях системы и операторов $\tilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon,i}$ в ряды Тейлора по переменной $\tau_i = \varepsilon\xi_i$, получим следующую систему:

$$\begin{gathered}\tilde{\mathcal{L}}_{0,i}Z_{i,0} := -\frac{\partial^2}{\partial\xi_i^2}Z_{i,0} + \tilde{a}_{i,0}(s_i)Z_{i,0} = 0, \quad \tilde{\mathcal{L}}_{0,i}P_{i,0} - Z_{i,0} = 0,\\ \tilde{\mathcal{L}}_{0,i}Z_{i,m} = F_{i,m}(s_i,\xi_i), \quad \tilde{\mathcal{L}}_{0,i}P_{i,m} - Z_{i,m} = G_{i,m}(s_i,\xi_i), \quad m \ge 1, \quad i = 1,2,\end{gathered} \tag{4.4}$$

где $F_{i,m}(s_i,\xi_i)$ и $G_{i,m}(s_i,\xi_i)$ линейно выражаются через предыдущие $Z_{i,m}$, $P_{i,m}$ и их производные и полиномиально зависят от ξ_i и гладко от s_i, а функция

$$a(x) = \tilde{a}_i(s_i,\varepsilon\xi_i) = \sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m\xi_i^m\tilde{a}_{i,m}(s_i)$$

разложена в ряд по степеням малого параметра ε в окрестности границы Γ_i, $i = 1,2$.

Сначала рассмотрим построение асимптотики решения задачи (2.8), (2.9).

Отметим, что в данном случае задача для главных членов внутреннего разложения имеет вид

$$\begin{gathered}\tilde{\mathcal{L}}_{0,i}Z_{i,0} = 0, \quad \tilde{\mathcal{L}}_{0,i}P_{i,0} - Z_{i,0} = 0,\\ -\varepsilon^{1+m_0}\frac{\partial}{\partial\xi_i}Z_{i,0}(s_i,0) + \varepsilon^2\left(\widetilde{\frac{\partial z_0}{\partial n}}\right)_i(s_i,0) + \hat{\lambda}_{i,\nu}(\varepsilon^{m_0}P_{i,0}(s_i,0) + \tilde{p}_{0i}(s_i,0)) = \tilde{g}_i(s_i),\\ -\varepsilon^{1+m_0}\frac{\partial}{\partial\xi_i}P_{i,0}(s,0) + \varepsilon^2\left(\widetilde{\frac{\partial p_0}{\partial n}}\right)_i(s_i,0) = 0, \quad i = 1,2.\end{gathered} \tag{4.5}$$

Отсюда следует, что $m_0 = 0$ и, тем самым, граничные условия в (4.5) имеют вид

$$\hat{\lambda}_{i,\nu}P_{i,0}(s_i,0) = \tilde{g}_i(s_i) - \hat{\lambda}_{i,\nu}\tilde{p}_{0i}(s_i,0), \quad \frac{\partial}{\partial\xi_i}P_{i,0}(s,0) = 0. \tag{4.6}$$

В классе экспоненциально убывающих при $\xi_i \to +\infty$ функций система (4.5) имеет единственное решение

$$\begin{gathered}Z_{i,0}(s_i,\xi_i) = \frac{2\tilde{a}_{i,0}(s_1)(\tilde{g}_i(s_i) - \hat{\lambda}_{i,\nu}\tilde{p}_{0i}(s_i,0))}{\hat{\lambda}_{i,\nu}}e^{-\sqrt{\tilde{a}_{i,0}(s_i)}\xi_i},\\ P_{i,0}(s,\xi) = \frac{\tilde{g}_i(s_i) - \hat{\lambda}_{i,\nu}\tilde{p}_{0i}(s_i,0)}{\hat{\lambda}_{i,\nu}}e^{-\sqrt{\tilde{a}_{i,0}(s_i)}\xi_i} + \frac{\sqrt{\tilde{a}_{i,0}(s_i)}(\tilde{g}_i(s_i) - \hat{\lambda}_{i,\nu}\tilde{p}_{0i}(s_i,0))}{\hat{\lambda}_{i,\nu}}\xi_i e^{-\sqrt{\tilde{a}_{i,0}(s_i)}\xi_i},\end{gathered} \tag{4.7}$$

и, тем самым,

$$\hat{\lambda}(x;0)(P_{i,0}(s,\xi) + \tilde{p}_{0i}(s_i,0)) = \tilde{g}_i(s_i), \quad i = 1,2. \tag{4.8}$$

Граничные условия в рассматриваемом случае таким образом имеют вид

$$\hat{\lambda}_{i,\nu}P_{i,m}(s_i,0) = \hat{F}_{i,m}(s_i), \quad \frac{\partial}{\partial\xi}P_{i,m}(s,0) = \hat{G}_{i,m}(s_i), \tag{4.9}$$

где $\hat{F}_{i,m}(s_i)$ и $\hat{G}_{i,m}(s_i)$ однозначно определяются предыдущими коэффициентами внешнего и соответствующего внутреннего разложений.

Задачи (4.4), (4.9) в классе экспоненциально убывающих при $\xi_i \to +\infty$ функций имеют единственное решение. Каждая из функций $Z_{i,m}$ и $P_{i,m}$ с учетом (4.7) имеет вид $Q(\xi_i : s_i)e^{-\sqrt{\tilde{a}_{i,0}(s_i)}\xi_i}$, где $Q(\xi_i : s_i)$ – полином по ξ_i с коэффициентами, гладко зависящими от s_i.

Таким образом, в рассматриваемом случае все коэффициенты рядов (4.3) однозначно находятся и в силу теоремы 2 ряды

$$\begin{gathered}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k}z_{2k}(x)+\sum_{i=1}^{2}\eta_i(s_i,\tau_i)\varepsilon^{m_0}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m Z_{i,m}(s_i,\tau_i/\varepsilon),\\ \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k}p_{2k}(x)+\sum_{i=1}^{2}\eta_i(s_i,\tau_i)\varepsilon^{m_0}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m P_{i,m}(s_i,\tau_i/\varepsilon)\end{gathered}\tag{4.10}$$

при $\varepsilon\to 0$ суть асимптотические разложения компонент $\{z_{\varepsilon,\nu},p_{\varepsilon,\nu}\}$ решения задачи (2.15) с $\lambda=0$, $f_1=f$, $f_2=-z_d$, $g_{1,1}=g$ и $g_{j,i}=0$ для остальных пар j,i.

Здесь $\eta_i(s_i,\tau_i)$ – срезающие функции пограничных слоев, т.е. бесконечно дифференцируемые функции, равные 1 в некоторой окрестности границ Γ_i и равные 0 вне чуть больших окрестностей границ Γ_i. Тем самым доказана теорема.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (1.4). *Тогда ряды* (4.10) *с* $m_0=0$ *и коэффициентами, однозначно определенными из* (4.2) *для внешнего разложения, и как решения задач* (4.4), (4.6) *и* (4.9) *для внутреннего разложения, при* $\varepsilon\to 0$ *суть асимптотические разложения компонент* $\{z_{\varepsilon,\nu},p_{\varepsilon,\nu}\}$ – *решения задачи* (2.8), (2.9) *при* $r=1$.

В частности, в силу (4.8)

$$\left\|\hat\lambda(\cdot,0)p_{\varepsilon,\nu}1\right\|\to\|g\|,\quad \varepsilon\to 0.\tag{4.11}$$

Таким образом, при выполнении неравенства

$$\|g\|<1\tag{4.12}$$

при всех достаточно малых $\varepsilon>0$ выполняется неравенство $\left\|\hat\lambda(\cdot,0)p_{\varepsilon,\nu}\right\|<1$ и, тем самым, $z_{\varepsilon,\nu}=z_\varepsilon$, а $p_{\varepsilon,\nu}=p_\varepsilon$. Поэтому при выполнении (4.12) теорема 4 есть теорема об асимптотическом разложении решений задачи (2.8), (2.5) при $r=1$.

Пусть теперь выполнено неравенство

$$\|g\|>1.\tag{4.13}$$

Тогда в силу (4.11) при всех достаточно малых $\varepsilon>0$ справедливо следующее неравенство: $\left\|\hat\lambda(\cdot,0)p_{\varepsilon,\nu}\right\|>1$, и поэтому реализуется случай (3.4).

Пусть $\hat\lambda_{i,\varepsilon}=\varepsilon^{m_\lambda}\hat\lambda_{i,0}$, $i=1,2$. Тогда задача для главных членов внутреннего разложения имеет вид

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathcal{L}}_{0,i}Z_{i,0}=0,\quad \tilde{\mathcal{L}}_{0,i}P_{i,0}-Z_{i,0}=0,\\ &-\varepsilon^{1+m_0}\frac{\partial}{\partial\xi_i}Z_{i,0}(s_i,0)+\varepsilon^2\left(\widetilde{\frac{\partial z_0}{\partial n}}\right)_i(s_i,0)+\varepsilon^{m_\lambda}\hat\lambda_{i,0}(\varepsilon^{m_0}P_{i,0}(s_i,0)+\tilde p_{0i}(s_i,0))=\tilde g_i(s_i),\\ &-\varepsilon^{1+m_0}\frac{\partial}{\partial\xi}P_{i,0}(s,0)+\varepsilon^2\left(\widetilde{\frac{\partial p_0}{\partial n}}\right)_i(s_i,0)=0,\quad i=1,2.\end{aligned}$$

В предыдущем случае слагаемое $\dfrac{\partial}{\partial\xi_i}Z_{i,0}(s_i,0)$ не использовалось, поэтому теперь естественно взять $m_0=-1$, что влечет $m_\lambda=1$, т.е. $\hat\lambda_{i,\varepsilon}=O(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to+0$. Поэтому в рассматриваемом случае удобно в определении $\hat\lambda(x;\lambda_\varepsilon)$ взять вместо параметра λ_ε параметр $\Lambda_\varepsilon:=\lambda_\varepsilon^{-1}$ и, тем самым,

$$\hat\lambda(x;\Lambda_\varepsilon^{-1})=\frac{\nu\mu(x)\Lambda_\varepsilon}{\nu+\mu^2(x)\Lambda_\varepsilon},\quad x\in\Gamma.\tag{4.14}$$

При этом асимптотическое разложение $\hat{\lambda}_{i,\varepsilon}$ будем искать в виде

$$\hat{\lambda}(i,\varepsilon) \sim \varepsilon\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m\hat{\lambda}_{i,m}, \quad \varepsilon \to 0, \quad i = 1,2. \tag{4.15}$$

В силу (4.14) величины $\hat{\lambda}(i,\varepsilon)$ и коэффициенты $\hat{\lambda}_{i,m}$ их разложений связаны соотношениями

$$\begin{aligned} &\mu_2\hat{\lambda}(1,\varepsilon) = \mu_1\hat{\lambda}(2,\varepsilon) + \frac{\mu_2^2-\mu_1^2}{\nu}\hat{\lambda}(1,\varepsilon)\hat{\lambda}(2,\varepsilon),\\ &\mu_2\hat{\lambda}_{1,0} = \mu_1\hat{\lambda}_{2,0},\\ &\mu_2\hat{\lambda}_{1,m} = \mu_1\hat{\lambda}_{2,m} + q_m, \quad m > 0, \end{aligned} \tag{4.16}$$

где q_m однозначно определяются предыдущими $\hat{\lambda}_{i,\tilde{m}}$ $(\tilde{m} < m)$.

Исходя из (3.4), естественно взять в качестве $\hat{\lambda}_{i,0}$ решение уравнения

$$1 = \left\|\hat{\lambda}_0P_0(\cdot,0)\right\|^2 = \left\|\hat{\lambda}_{1,0}P_{1,0}(\cdot,0)\right\|^2 + \left\|\hat{\lambda}_{2,0}P_{2,0}(\cdot,0)\right\|^2. \tag{4.17}$$

Решая систему

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathcal{L}}_{0,i}Z_{i,0} = 0, \quad \tilde{\mathcal{L}}_{0,i}P_{i,0} - Z_{i,0} = 0,\\ &-\frac{\partial}{\partial\xi_i}Z_{i,0}(s_i,0) + \hat{\lambda}_{i,0}P_{i,0}(s_i,0) = \tilde{g}_i(s_i),\\ &-\frac{\partial}{\partial\xi}P_{i,0}(s_i,0) = 0, \quad i = 1,2, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} Z_{i,0}(s_i,\xi_i) &= \frac{2\tilde{a}_{i,0}(s_1)\tilde{g}_i(s_i)}{2\tilde{a}_{i,0}^{2/3}(s_1) + \hat{\lambda}_{i,0}}e^{-\sqrt{\tilde{a}_{i,0}(s_i)}\xi_i},\\ P_{i,0}(s_i,\xi_i) &= \frac{\tilde{g}_i(s_i)}{2\tilde{a}_{i,0}^{2/3}(s_i) + \hat{\lambda}_{i,0}}e^{-\sqrt{\tilde{a}_{i,0}(s_i)}\xi_i} + \frac{\sqrt{\tilde{a}_{i,0}(s_i)}\tilde{g}_i(s_i)}{2\tilde{a}_{i,0}^{2/3}(s_1) + \hat{\lambda}_{i,0}}\xi_ie^{-\sqrt{\tilde{a}_{i,0}(s_i)}\xi_i}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

и, тем самым, уравнение (4.17) принимает вид

$$1 = \left\|\frac{\hat{\lambda}_{1,0}\tilde{g}_1(s_1)}{2\tilde{a}_{i,0}^{2/3}s_1) + \hat{\lambda}_{1,0}}\right\|^2 + \left\|\frac{\hat{\lambda}_{2,0}\tilde{g}_2(s_2)}{2\tilde{a}_{i,0}^{2/3}(s_2) + \hat{\lambda}_{2,0}}\right\|^2 =: \mathcal{F}(\hat{\lambda}_{1,0},\hat{\lambda}_{2,0}). \tag{4.19}$$

С учетом (4.16) рассмотрим функцию $\mathcal{F}_1(\hat{\lambda}) := \mathcal{F}(\hat{\lambda},\mu_2\mu_1^{-1}\hat{\lambda})$. Она непрерывна, строго возрастает, $\mathcal{F}_1(0) = 0$ и $\mathcal{F}_1(+\infty) = \|\tilde{g}\| > 1$. Поэтому существует единственное $\hat{\lambda}_0 > 0$ такое, что $\mathcal{F}_1(\hat{\lambda}_0) = 1$. Положим

$$\hat{\lambda}_{1,0} = \hat{\lambda}_0, \quad \hat{\lambda}_{2,0} = \mu_2\mu_1^{-1}\hat{\lambda}_0. \tag{4.20}$$

Для таких $\hat{\lambda}_{1,0}$, $\hat{\lambda}_{2,0}$ равенство (4.19) выполнено.

При $m > 0$ граничные условия в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial}{\partial\xi_i}Z_{i,m}(s_i,0) + \hat{\lambda}_{i,0}P_{i,m}(s_i,0) + \hat{\lambda}_{i,m}P_{i,0}(s_i,0) = \hat{F}_{i,m}(s_i),\\ &-\frac{\partial}{\partial\xi}P_{i,m}(s_i,0) = \hat{G}_{i,m}(s_i), \quad i = 1,2. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Здесь $\hat{F}_{i,m}$ и $\hat{G}_{i,m}$ однозначно определяются коэффициентами разложений (4.3), (4.15) с меньшими индексами и являюся гладкими функциями на Γ_i.

При известных $\hat{\lambda}_{i,m}$ задачи (4.4), (4.21) в классе экспоненциально убывающих при $\xi_i \to +\infty$ функций имеют единственное решение. Каждая из функций $Z_{i,m}$ и $P_{i,m}$ в силу (4.18) имеет вид $Q(\xi_i : s_i)e^{-\sqrt{\tilde{a}_{i,0}(s_i)}\xi_i}$, где $Q(\xi_i : s_i)$ — полином по ξ_i с коэффициентами, гладко зависящими от s_i.

Для нахождения $\hat{\lambda}_{i,m}$ при $m > 0$ используется асимптотическое равенство, соответствующее (3.4):

$$1 = \sum_{i=1}^{2} \lambda_{i,\varepsilon}^2 \| p_\varepsilon \|_i^2 \sim \sum_{i=1}^{2} \left\| \left(\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \lambda_{i,m} \right)^2 \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \hat{P}_{i,m} \right) \right\|_i^2, \tag{4.22}$$

где $\hat{P}_{i,m} = P_{i,m} + \widetilde{p_{i,m-1}}$.

Уравнение для $\lambda_{i,m}$ при $m > 0$ из (4.22) с учетом (4.20) – выбора $\lambda_{i,0}$, имеет вид

$$\sum_{i=1}^{2} (\lambda_{i,0}^2 \langle P_{i,0}, P_{i,m} \rangle_i + \lambda_{i,0}\lambda_{i,m} \| P_{i,0} \|_i^2) = h_m, \tag{4.23}$$

где константы h_m однозначно определяются предыдущими членами разложений.

Функции $Z_{i,m}$ и $P_{i,m}$ удобно представить в виде

$$Z_{i,m} = Z_{i,m,1} + \lambda_m \tilde{Z}_i, \quad P_{i,m} = P_{i,m,1} + \lambda_m \tilde{P}_i, \tag{4.24}$$

где $\{Z_{i,m,1}, P_{i,m,1}\}$ – решение задачи

$$\begin{gathered} \tilde{\mathscr{L}}_{0,i} Z_{i,m,1} = F_{i,m}(s_i, \xi_i), \quad \tilde{\mathscr{L}}_{0,i} P_{i,m,1} - Z_{i,m,1} = G_m(s_i, \xi_i), \\ -\frac{\partial}{\partial \xi_i} Z_{i,m,1}(s, 0) + \lambda_{i,0} P_{i,m,1}(s, 0) = \hat{F}_{i,m}(s_i), \quad \frac{\partial}{\partial \xi} P_{i,m,1}(s, 0) = \hat{G}_{i,m}(s_i), \end{gathered} \tag{4.25}$$

а $\{\tilde{Z}_i, \tilde{P}_i\}$ – решение задачи

$$\begin{gathered} \tilde{\mathscr{L}}_0 \tilde{Z}_i = 0, \quad \tilde{\mathscr{L}}_0 \tilde{P}_i - \tilde{Z}_i = 0, \\ -\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{Z}_i(s_i, 0) + \lambda_{i,0} \tilde{P}_i(s_i, 0) + P_{i,0}(s_i, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{P}_i(s_i, 0) = 0. \end{gathered} \tag{4.26}$$

Отметим, что $Z_{i,m,1}$ и $P_{i,m,1}$ однозначно определяются предыдущими членами разложений, а $\tilde{P}_i(s_i, 0)$ находится по формуле (4.18):

$$\tilde{P}_i(s_i, 0) = -\frac{P_{i,0}(s_i, 0)}{2\tilde{a}_{i,0}^{2/3}(s_i) + \hat{\lambda}_{i,0}}. \tag{4.27}$$

С учетом (4.24) уравнение (4.23) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{2} (\lambda_{i,0}^2 \lambda_{i,m} \langle P_{i,0}, P_{i,m} \rangle_i + \lambda_{i,0}\lambda_{i,m} \| P_{i,0} \|_i^2) = h_{m,1}, \tag{4.28}$$

где константы $h_{m,1}$ однозначно определяются предыдущими членами разложений.

Выражая $\lambda_{2,m}$ в силу (4.16) через $\lambda_{1,m}$ и подставляя это выражение в (4.28), приходим к уравнению для нахождения $\lambda_{1,m}$, а следовательно, и $\lambda_{2,m}$:

$$\lambda_{1,0}^2 \lambda_{1,m} \langle P_{1,0}, \tilde{P}_1 \rangle_1 + \lambda_{1,0}\lambda_{1,m} \| P_{1,0} \|_1^2 + \mu_2^3 \mu_1^{-3} \lambda_{1,0}^2 \lambda_{1,m} \langle P_{2,0}, \tilde{P}_2 \rangle_2 + \mu_2^2 \mu_1^{-2} \lambda_{1,0} \lambda_{1,m} \| P_{2,0} \|_2^2 = h_{m,2}, \tag{4.29}$$

где константы $h_{m,2}$ однозначно определяются предыдущими членами разложений.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* (1.4). *Тогда*

$$C := \lambda_{1,0}^2 \langle P_{1,0}, \tilde{P}_1 \rangle_1 + \lambda_{1,0} \| P_{1,0} \|_1^2 + \mu_2^3 \mu_1^{-3} \lambda_{1,0}^2 \langle P_{2,0}, \tilde{P}_2 \rangle_2 + \mu_2^2 \mu_1^{-2} \lambda_{1,0} \| P_{2,0} \|_2^2 \neq 0.$$

Доказательство. В силу (4.16) и (4.27) имеем

$$C = \sum_{i=1}^{2}\left(-\left\langle \frac{\hat{\lambda}_{i,0}}{2\tilde{a}_{i,0}^{2/3}(s_i)+\hat{\lambda}_{i,0}}, \hat{\lambda}_{i,0}P_{i,0}^2 \right\rangle_i + \left\langle 1, \hat{\lambda}_{i,0}P_{i,0}^2 \right\rangle_i \right) = \sum_{i=1}^{2}\left\langle \frac{2\tilde{a}_{i,0}^{2/3}(s_i)}{2\tilde{a}_{i,0}^{2/3}(s_i)+\hat{\lambda}_{i,0}}, \hat{\lambda}_{i,0}P_{i,0}^2 \right\rangle_i .$$

Поскольку $\dfrac{2\tilde{a}_{i,0}^{2/3}(s_i)}{2\tilde{a}_{i,0}^{2/3}(s_i)+\hat{\lambda}_{i,0}}$ и $P_{i,0}^2$ непрерывны, $\dfrac{2\tilde{a}_{i,0}^{2/3}(s_i)}{2\tilde{a}_{i,0}^{2/3}(s_i)+\hat{\lambda}_{i,0}}$ положительна, а $\hat{\lambda}_{i,0}P_{i,0}^2$ неотрицательна на Γ_i, то равенство $C = 0$ равносильно соотношению $P_{i,0} \equiv 0$, что в силу (4.17) невозможно.

В силу леммы 4 из (4.29) находятся однозначно $\hat{\lambda}_{i,m}$ и все коэффициенты рядов (4.3) и (4.15). Таким образом, справедлива

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (1.4) *и* (4.13). *Тогда ряды* (4.10) *с* $m_0 = -1$ *и коэффициентами, однозначно определенными из* (4.2) *для внешнего разложения, и как решения задач* (4.4), (4.21), (4.23)–(4.26) *и* (4.29) *для внутреннего разложения, при* $\varepsilon \to 0$ *суть асимптотические разложения компонент* $\{z_\varepsilon, p_\varepsilon\}$ *— решения задачи* (2.8) *при* $r = 1$*, а ряды из* (4.15) *есть асимптотические разложения величин* $\hat{\lambda}_{i,\varepsilon}$, $i = 1, 2$.

5. ПРИМЕР

Проиллюстрируем описанные конструкции на следующем примере:

$$\mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon := -\varepsilon^2\Delta z_\varepsilon + z_\varepsilon = x_1, \quad x \in \Omega, \quad z_\varepsilon \in H^1(\Omega),$$
$$\varepsilon^2\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial n} = q + 2u_\varepsilon(x), \quad |x| = 1, \quad u_\varepsilon \in \mathcal{U},$$
$$\varepsilon^2\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial n} = u_\varepsilon(x), \quad |x| = 2,$$

где

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x| < 2\}, \quad |x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$
$$J(u_\varepsilon) := \|z_\varepsilon\|^2 + \|u_\varepsilon(\cdot)\|^2 \to \inf, \quad u \in \mathcal{U},$$

т.е. $a = 1$, $f(x_1, x_2) = x_1$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$, $g_1 = q$ – const, $g_2 = 0$ и $\nu = 1$.

В этом случае внешнее разложение имеет только одно слагаемое:

$$z_0(x_1, x_2) = x_1, \quad p_0(x_1, x_2) = x_1, \quad z_{2k} = 0, \quad p_{2k} = 0, \quad k > 0,$$

и, тем самым, вне малой окрестности границы $z_\varepsilon = x_1 + O(\varepsilon^{+\infty})$ при $\varepsilon \to +0$.

Координаты s_i — это полярный угол по модулю 2π, $\tau_1 = \rho - 1$, $\tau_2 = 2 - \rho$, где ρ — полярный радиус. Поэтому в силу вида оператора Лапласа в полярных координатах получим

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon,1}Y_1 = -\frac{\partial^2 Y_1}{\partial\xi_1^2} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\xi_1}\frac{\partial Y_1}{\partial\xi_1} + \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon\xi_1)^2}\frac{\partial^2 Y_1}{\partial\varphi_1^2} + Y_1,$$
$$\tilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon,1}Y_2 = -\frac{\partial^2 Y_1}{\partial\xi_2^2} - \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon\xi_2}\frac{\partial Y_2}{\partial\xi_2} + \frac{\varepsilon^2}{(2-\varepsilon\xi_2)^2}\frac{\partial^2 Y_2}{\partial\varphi_1^2} + Y_2.$$

Раскладывая $(1+\varepsilon\xi_1)^{-1}$, $(1+\varepsilon\xi_1)^{-2}$, $(2-\varepsilon\xi_1)^{-1}$ и $(2-\varepsilon\xi_1)^{-2}$ в степенные ряды по ε, получаем степенные разложения операторов $\tilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon,i}$, в частности,

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon,1}Y_1 = -\frac{\partial^2 Y_1}{\partial\xi_1^2} + Y_1 + \varepsilon\frac{\partial Y_1}{\partial\xi_1} - \varepsilon^2\xi_1\frac{\partial Y_1}{\partial\xi_1} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 Y_1}{\partial\varphi_1^2} + \ldots,$$
$$\tilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon,1}Y_2 = -\frac{\partial^2 Y_1}{\partial\xi_2^2} + Y_2 - \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial Y_2}{\partial\xi_2} - \frac{\varepsilon^2\xi_2}{4}\frac{\partial Y_2}{\partial\xi_2} + \frac{\varepsilon^2}{4}\frac{\partial^2 Y_2}{\partial\varphi_1^2} + \ldots .$$

Поскольку z_0 и p_0 в полярных координатах имеют вид $\rho\cos\phi$, то

$$\left(\widetilde{\frac{\partial z_0}{\partial n}}\right)_i(\varphi,0) = (-1)^i\cos\varphi, \quad \left(\widetilde{\frac{\partial p_0}{\partial n}}\right)_i(\varphi,0) = (-1)^i\cos\varphi,$$

$$\tilde{p}_{0_1}(\varphi,0) = \cos\varphi, \quad \tilde{p}_{0_2}(\varphi,0) = 2\cos\varphi.$$

Отметим, что $\|g\| = \sqrt{2\pi}q$ и, если $\sqrt{2\pi}q < 1$, то ограничения на управления не по существу, $\hat{\lambda}_{1,\nu} = 1/2$, $\hat{\lambda}_{2,\nu} = 1$ и граничные условия (4.6) имеют вид

$$P_{1,0}(\varphi,0) = 2q - \cos\varphi, \quad P_{2,0}(\varphi,0) = -\cos\varphi, \quad \frac{\partial}{\partial\xi_i}P_{i,0}(\varphi,0) = 0$$

и, тем самым,

$$Z_{1,0}(\varphi,\xi_1) = 2(2q-\cos\varphi)e^{-\xi_1}, \quad P_{1,0}(\varphi,\xi_1) = (2q-\cos\varphi)e^{-\xi_1} + (2q-\cos\varphi)\xi_1 e^{-\xi_1},$$

$$Z_{2,0}(\varphi,\xi_2) = -2\cos\varphi e^{-\xi_2}, \quad P_{2,0}(\varphi,\xi_2) = -2\cos\varphi e^{-\xi_2} - 2\cos\varphi\xi_2 e^{-\xi_2}.$$

Таким образом, в полярных координатах z_ε (в малой окрестности границы Γ) и u_ε имеют при $\varepsilon \to +0$ следующее асимптотическое представление:

$$z_\varepsilon = \rho\cos\varphi + 2(2q-\cos\varphi)e^{-(\rho-1)/\varepsilon} - 2\cos\varphi e^{-(2-\rho)/\varepsilon} + O(\varepsilon),$$

$$u_{1,\varepsilon} = -q + \frac{1}{2}\cos\varphi + O(\varepsilon), \quad u_{2,\varepsilon} = \cos\varphi + O(\varepsilon).$$

Заметим, что в рассматриваемой области срезающие функции при внутреннем разложении можно опустить.

Если $\sqrt{2\pi}q > 1$, то ограничения на управление по существу и уравнение (4.19) примут вид

$$1 = \left\|\frac{\hat{\lambda}_{1,0}\cdot q}{2+\hat{\lambda}_{1,0}}\right\|^2 = 2\pi\left(\frac{\hat{\lambda}_{1,0}\cdot q}{2+\hat{\lambda}_{1,0}}\right)^2.$$

Поэтому $\hat{\lambda}_{1,0} = 2/(\sqrt{2\pi}q - 1)$, а в силу (4.16) имеем $\hat{\lambda}_{2,0} = 1/(\sqrt{2\pi}q - 1)$. Таким образом, в силу (4.18)

$$Z_{1,0}(\varphi,\xi_1) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\xi_1}, \quad P_{1,0}(\varphi,\xi_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\xi_1} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\xi_1 e^{-\xi_1}, \quad Z_{2,0}(\varphi,\xi_2) = 0, \quad P_{2,0}(\varphi,\xi_2) = 0$$

и в полярных координатах z_ε (в малой окрестности границы Γ) и u_ε имеют при $\varepsilon \to +0$ следующее асимптотическое представление:

$$z_\varepsilon = \varepsilon^{-1}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\rho-1)/\varepsilon} + O(1), \quad u_{1,\varepsilon} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + O(\varepsilon), \quad u_{2,\varepsilon} = O(\varepsilon).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
2. *Casas E.* A review on sparse solutions in optimal control of partial differential equations // SeMA J. 2017. V. 74. P. 319–344.
3. *Lou H., Yong J.* Second-order necessary conditions for optimal control of semilinear elliptic equations with leading term containing controls // Math. Control Relat. Fields. 2018. V. 8. № 1. P. 57–88. https://doi.org/10.3934/mcrf.2018003
4. *Betz L.M.* Second-order sufficient optimality conditions for optimal control of nonsmooth, semilinear parabolic equations // SIAM J. Control Optim. 2019. V. 57. № 6. P. 4033–4062.
5. *Капустян В.Е.* Асимптотика ограниченных управлений в оптимальных эллиптических задачах // Докл. АН Украины. Сер. Матем., естествозн., техн. науки. 1992. № 2. С. 70–74.
6. *Капустян В.Е.* Оптимальные бисингулярные эллиптические задачи с ограниченным управлением // ДАН Украины. 1993. № 6. С. 81–85.
7. *Данилин А.Р.* Асимптотика ограниченных управлений для сингулярной эллиптической задачи в области с малой полостью // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 11. С. 27–60.

8. *Данилин А.Р.* Аппроксимация сингулярно возмущенной эллиптической задачи оптимального управления // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 10. С. 3–12.
9. *Данилин А.Р., Зорин А.П.* Асимптотика решения задачи оптимального граничного управления // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 95–107.
10. *Данилин А.Р.* Оптимальное граничное управление в области с малой полостью // Уфимский матем. ж. 2012. Т. 4. № 2. С. 87–100.
11. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
12. *Данилин А.Р.* Асимптотика решения задачи оптимального граничного управления потоком через часть границы // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20. № 4. С. 116–127.
13. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа М.: Наука, 1965. 520 с.
14. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи матем. наук. 1957. Т. 12. Вып. 5. С. 3–122.
15. *Ильин А.М.* Пограничный слой // Современ. проблемы матем. Фундамент. направления. Т. 34. М.: ВНИТИ, 1988. С. 175–214. (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР.)