ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 2, с. 320–329

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.958

К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ III РОДА

© 2022 г. Н. С. Габбасов[1,*], З. Х. Галимова[2,**]

[1] 423810 Набережные Челны, пр-т Мира, 68/19, Набережночелнинский ин-т Казанского ун-та, Россия

[2] 423815 Набережные Челны, пр-т Вахитова, 53/02, Набережночелнинский филиал Казанского инновационного университета им. В.Г. Тимирясова, Россия

*e-mail: gabbasovnazim@rambler.ru

**e-mail: galimovazh2020@mail.ru

Поступила в редакцию 09.06.2021 г.
Переработанный вариант 09.06.2021 г.
Принята к публикации 12.10.2021 г.

Исследовано линейное интегральное уравнение III рода с фиксированными особенностями в ядре. Для его приближенного решения в пространстве обобщенных функций предложен и обоснован специальный обобщенный вариант сплайн-метода. Установлена оптимальность по порядку точности построенного метода. Библ. 19.

Ключевые слова: интегральное уравнение III рода, пространство обобщенных функций, приближенное решение, теоретическое обоснование.

DOI: 10.31857/S0044466922020089

1. ВВЕДЕНИЕ

Объектом исследования является линейное интегральное уравнение III рода с фиксированными особенностями в ядре (УТРФО):

$$Ax \equiv x(t)\prod_{j=1}^{l}(t-t_j)^{m_j} + \int_{-1}^{1} K(t,s)\left[(s+1)^{p_1}(1-s)^{p_2}\right]^{-1} x(s)ds = y(t), \tag{1.1}$$

где

$$t \in I \equiv [-1,1], \quad t_j \in (-1,1), \quad m_j \in N \quad (j=\overline{1,l}); \quad p_1, p_2 \in R^+, K$$

и y – известные непрерывные функции, обладающие определенными свойствами “гладкости” точечного характера, $x(t)$ – искомая функция, а интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару [1, с. 144–150]. Уравнения вида (1.1) находят все более широкие применения как в теории, так и в приложениях. К такого рода уравнениям приводит ряд важных задач теорий упругости, переноса нейтронов, рассеяния частиц (см., например, [2], [3] и библиографию к [2] и [4]), а также теорий сингулярных интегральных уравнений с вырождающимся символом [5] и уравнений с частными производными смешанного типа [6]. При этом естественными классами решений УТР, как правило, являются специальные пространства обобщенных функций (ПОФ) типа D или V. Под D (соответственно, V) понимается ПОФ, построенное на основе функционала “дельта-функция Дирака” (соответственно “конечная часть интеграла по Адамару”). Исследуемые УТРФО точно решаются лишь в очень редких частных случаях, поэтому разработка теоретически обоснованных эффективных методов их приближенного решения в ПОФ является актуальным и активно развивающимся направлением математического анализа и вычислительной математики. Ряд результатов в этой области получен в работах [7]–[12], в которых предложены и обоснованы специальные прямые полиномиальные методы решения УТРФО вида (1.1) в ПОФ типа D и V.

В настоящей работе для приближенного решения УТРФО (1.1) в ПОФ типа D предложен новый вариант обобщенного метода коллокации, основанный на применении кубических сплайнов минимального дефекта. Проведено его теоретическое обоснование в смысле [13, гл. 1] и установлено, что разработанный метод оптимален по порядку точности на некотором классе F гладких функций среди всех прямых проекционных методов решения исследуемых уравнений в ПОФ.

2. О ПРОСТРАНСТВАХ ОСНОВНЫХ И ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $C \equiv C(I)$ – пространство непрерывных на I функций с обычной max-нормой и $m \in N$. Следуя [14], скажем, что функция $f \in C$ принадлежит классу $C\{m;0\} \equiv C_0^{\{m\}}(I)$, если в точке $t = 0$ существует тейлоровская производная $f^{\{m\}}(0)$ порядка m (естественно считаем, что $C\{0;0\} \equiv C$). Множество $C\{m;0\}$ назовем классом *точечно-гладких* функций с *характеристическим* оператором $T : C\{m;0\} \to C$, определенным по правилу

$$Tf \equiv \left[f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} f^{\{i\}}(0)t^i \Big/ i! \right] t^{-m} \equiv F(t) \in C \quad (F(0) \equiv \lim_{t\to 0} F(t)).$$

По норме

$$\|f\|_{C\{m;0\}} \equiv \|Tf\|_C + \sum_{i=0}^{m-1} \left| f^{\{i\}}(0) \right|$$

пространство $C\{m;0\}$ полно и нормально вложено в C (см., например, [15, гл. 1, § 2]).

Далее, пусть $p \in R^+$ и $g \in C$. Также следуя [14], будем обозначать $g \in C\{p;1\} \equiv C_1^{\{p\}}(I)$, если существуют левые тейлоровские производные $g^{\{j\}}(1)$ $\left(j = \overline{1,[p]}\right)$ в точке $t = 1$, причем при $p \neq [p]$ ([ ] – целая часть числа) конечен предел

$$\lim_{t\to 1-} \left\{ \left[g(t) - \sum_{j=0}^{[p]} g^{\{j\}}(1)(t-1)^j / j! \right] (1-t)^{-p} \right\}.$$

Векторное пространство $C\{p;1\}$ снабдим нормой

$$\|g\|_{\{p\}} \equiv \|g\|_{C\{p;1\}} \equiv \|Sg\|_C + \sum_{i=0}^{\lambda} \left| g^{\{i\}}(1) \right|, \tag{2.1}$$

где

$$\begin{gathered} Sg \equiv \left[g(t) - \sum_{i=0}^{\lambda} g^{\{i\}}(1)(t-1)^i \Big/ i! \right] (1-t)^{-p} \equiv G(t) \in C, \\ \lambda = \lambda(p) \equiv [p] - (1 + \operatorname{sign}([p] - p)), \quad G(1) \equiv \lim_{t\to 1-} G(t). \end{gathered} \tag{2.2}$$

Заметим, что элементы пространства $C\{p;1\}$ – функции вида

$$g(t) = (1-t)^p G(t) + \sum_{i=0}^{\lambda} b_i (\mathrm{t}-1)^i, \tag{2.3}$$

причем $Sg = G(t) \in C$, $g^{\{i\}}(1) = b_i\, i!$ $(i = \overline{0,\lambda})$. Отсюда ясно, что пространство $C\{p;1\}$ с нормой (2.1) полно и вложено в C.

Теперь образуем основное для наших исследований пространство

$$Y \equiv C_{0;1}^{\{m\};\{p\}}(I) \equiv \left\{ y \in C\{m;0\} \middle| Ty \in C\{p;1\} \right\}.$$

В качестве нормы в нем выберем величину

$$\|y\|_Y \equiv \|Ty\|_{\{p\}} + \sum_{i=0}^{m-1} \left| y^{\{i\}}(0) \right| \quad (y \in Y). \tag{2.4}$$

Лемма 2.1 (см. [7]). 1). *Относительно структуры основных функций справедливо соотношение*

$$\varphi \in Y \Leftrightarrow \varphi(t) = \left(UV\Phi\right)(t) + t^m \sum_{j=0}^{\lambda} \alpha_j (t-1)^j + \sum_{i=0}^{m-1} e_i t^i, \qquad (2.5)$$

где $\Phi \in C$, $\alpha_j \in R$, $j = \overline{0,\lambda}$, $e_i \in R$, $i = \overline{0, m-1}$, *причем* $ST\varphi = \Phi$, $(T\varphi)^{\{j\}}(1) = \alpha_j j!\ (\forall j)$, $\varphi^{\{i\}}(0) = e_i\, i!$ $(\forall i)$; $Uf \equiv t^m f(t)$, $Vf \equiv (1-t)^p f(t)$;

2) *по норме* (2.4) *пространство* Y *полно и вложено в* $C\{m;0\}$.

Пусть $h \in C(I^2)$ *и при каждом фиксированном* $s \in I$ *функция* $h(t,s)$ *принадлежит пространству* $C\{p;1\}$. *Будем говорить, что* $h \in C_t^{\{p\}}(I^2)$, *если* $S_t h \in C$, *где* S_t *обозначает оператор* (2.2), *примененный по переменной* t. *Аналогично определяем класс* $C_s^{\{p\}}(I^2)$. *Тогда*

$$C_1^{\{p\}}(I^2) \equiv C_t^{\{p\}}(I^2) \cap C_s^{\{p\}}(I^2).$$

Теперь над пространством Y основных функций построим семейство $X \equiv D^{\{p\}}\{m;0\}$ обобщенных функций $x(t)$ вида

$$x(t) \equiv z(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \gamma_i \delta^{\{i\}}(t), \qquad (2.6)$$

где $t \in I$, $z \in C\{p;1\}$, $\gamma_i \in R$ – произвольные постоянные, а δ и $\delta^{\{i\}}$ – соответственно дельта-функция Дирака и ее тейлоровские производные, действующие на пространстве Y основных функций по следующему правилу:

$$\left(\delta^{\{i\}}, y\right) \equiv \int_{-1}^{1} \delta^{\{i\}}(t)\, y(t)dt \equiv (-1)^i y^{\{i\}}(0), \quad y \in Y, \quad i = \overline{0, m-1}.$$

Ясно, что векторное пространство X по норме

$$\|x\|_X \equiv \|z\|_{\{p\}} + \sum_{i=0}^{m-1} |\gamma_i| \qquad (2.7)$$

является банаховым.

3. О СПЛАЙНОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ТОЧЕЧНО-ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим вопрос о приближении элементов основного пространства $Y \equiv C_{0;1}^{\{m\};\{p\}}(I)$ с использованием кубических сплайнов.

Зададим на I равномерную сетку

$$\Delta_n : -1 \equiv s_0 < s_1 < \ldots < s_n \equiv 1, \quad n = 2,3,\ldots, \qquad (3.1)$$

где $s_k \equiv -1 + 2k/n$, $k = \overline{0,n}$, и на ней рассмотрим кубический сплайн

$$z_n(t) \equiv \sum_{i=-1}^{n+1} c_i B_i(t), \quad c_i \in R,$$

удовлетворяющий краевым условиям

$$z_n^{(3)}\left(s_j - 0\right) = z_n^{(3)}\left(s_j + 0\right), \quad j = 1, n-1. \qquad (3.2)$$

Здесь базисные функции $B_i(t)$ суть B- сплайны с носителем (s_{i-2}, s_{i+2}) (см., например, [16, гл. 3, § 8]). Для определения всех функций $B_i(t)$ сетку (3.1) дополним равномерно расположенными узлами: $s_{-3} < s_{-2} < s_{-1} < s_0 \equiv -1, 1 \equiv s_n < s_{n+1} < s_{n+2} < s_{n+3}$. Обозначим через S_n^3 пространство всех кубических сплайнов $z_n(t)$ на сетке Δ_n, обладающих свойством (3.2), с нормой $\|z_n\|_C$. Далее, пусть $P_n : C \to S_n^3$ означает оператор, который всякой функции $f \in C$ ставит в соответствие ее интерполяционный кубический сплайн $P_n f \in S_n^3$ с условием (3.2) такой, что $(P_n f)(s_i) = f(s_i)$, $i = \overline{0,n}$. В книге [16, гл. 3, § 1, теорема 3.1] доказаны существование и единственность интерполяционного кубического сплайна при различных краевых условиях и указан алгоритм построения таких сплайнов. Там же (см. гл. 3, § 5) особо отмечается, что при приближении кубическими сплайнами выбор краевых условий (3.2) является наиболее удачным.

Из теорем 9, 10, 13 в [17, гл. 2, § 4] и соответствующего результата работы [18] (см. там лемму 2) как следствие вытекает

Лемма 3.1. *Пусть* $r = \overline{1,4}$ *и* $f \in C^{(r)} \equiv C^{(r)}(I)$. *Тогда*

$$\|P_n f - f\|_C = O(n^{-r}), \quad n \to \infty. \tag{3.3}$$

Пусть $\Pi_q \equiv \mathrm{span}\{t^i\}_0^q$ – класс всех алгебраических полиномов степени, не выше q. Обозначим через $Y_n \equiv \mathrm{span}\{UVB_i\}_{-1}^{n+1} \oplus \Pi_{m+\lambda}$ $(n+m+\lambda+4)$-мерное подпространство пространства Y и введем в рассмотрение оператор $\Gamma_n \equiv \Gamma_{n+m+\lambda+4} : Y \to Y_n$, относящий к любой функции $y \in Y$ обобщенный сплайн $\Gamma_n y \in Y_n$, определяемый условиями

$$(ST\Gamma_n y)(s_i) = (STy)(s_i), \quad i = \overline{0,n},$$

$$(T\Gamma_n y)^{\{j\}}(1) = (Ty)^{\{j\}}(1), \quad j = \overline{0,\lambda},$$

$$(\Gamma_n y)^{\{i\}}(0) = y^{\{i\}}(0), \quad i = \overline{0,m-1},$$

$$(ST\Gamma_n y)^{(3)}(s_j - 0) = (ST\Gamma_n y)^{(3)}(s_j + 0), \quad j = \overline{1,n-1}.$$

Рассуждая так же, как и в [15, гл. 1, § 5, п. 5.3], несложно получить представление

$$\Gamma_n y \equiv \Gamma_{n+m+\lambda+4}(y;t) = (UVP_n STy)(t) + t^m \sum_{j=0}^{\lambda} (Ty)^{\{j\}}(1)(t-1)^j/j! + \sum_{i=0}^{m-1} y^{\{i\}}(0)t^i/i!. \tag{3.4}$$

Лемма 3.2. Γ_n – *проектор в пространстве* Y.

В силу (3.4) и $P_n^2 = P_n$ данная лемма доказывается аналогично лемме 1.5.1 в [15, гл. 1, § 5]. При этом роль операторов U и T в лемме 1.5.1 играют соответственно UV и ST.

Далее будем использовать следующее обозначение:

$$YC^{(r)} \equiv \left\{ y \in Y \,|\, STy \in C^{(r)} \right\},$$

где $r = 0,1,2,\ldots$; причем $YC^{(0)} \equiv Y$.

Следующее утверждение характеризует скорость сходимости обобщенных интерполяционных сплайнов к интерполируемой функции.

Теорема 1. *Если* $y \in YC^{(r)}$, $r = \overline{1,4}$, *то*

$$\|\Gamma_n y - y\|_Y = O(n^{-r}), \quad n \to \infty. \tag{3.5}$$

Доказательство. В силу (2.5), (3.4), (2.4), (2.1) и леммы 3.1 последовательно находим

$$\|\Gamma_n y - y\|_Y = \|UV(P_n STy - STy)\|_Y \equiv \|V(P_n STy - STy)\|_{\{p\}} \equiv \|P_n STy - STy\|_C \equiv O(n^{-r}).$$

Замечание 1. Очевидно, что из оценки (3.5) и хорошо известной теоремы Банаха–Штейнгауза следует равномерная ограниченность норм операторов $\Gamma_n : \|\Gamma_n\| = O(1)$, $n \to \infty$.

4. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ С КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ (ОМККС)

Пусть задано УТРФО (1.1). Для сокращения громоздких выкладок и упрощения формулировок, не ограничивая общности методов и результатов, всюду в дальнейшем будем считать $l = 1$, $t_1 = 0$, $p_1 = 0$, т.е. рассмотрим уравнение вида

$$Ax \equiv t^m x(t) + \int_{-1}^{1} K(t,s)(1-s)^{-p} x(s)ds = y(t) \quad (t \in I), \tag{4.1}$$

в котором $m \in N$, $p \in R^+$; $y \in Y, K$ — известная непрерывная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\begin{gathered} K \in C_s^{\{p\}}(I^2), \quad K(t,\cdot) \in Y, \quad \psi_j(t) \equiv K_s^{\{j\}}(t,1) \in Y, \\ \tau_i(t) \equiv K_s^{\{i\}}(t,0) \in Y, \quad u \equiv S_s K \in C_t^{\{m\}}(I^2), \quad \theta_i(s) \equiv u_t^{\{i\}}(0,s) \in C, \\ v \equiv T_t u \in C_t^{\{p\}}(I^2), \quad \varphi_j(s) \equiv v_t^{\{j\}}(1,s) \in C, \quad j = \overline{0,\lambda}, \quad i = \overline{0,m-1}; \end{gathered} \tag{4.2}$$

а $x \in X$ — искомая обобщенная функция. Фредгольмовость и достаточные условия непрерывной обратимости оператора $A : X \to Y$ установлены в работе [7], там же указан метод отыскания точного решения УТРФО (4.1) в классе X.

Приближенное решение уравнения (4.1) построим в виде

$$\begin{gathered} x_n \equiv x_n(t;\{c_k\}) \equiv f_n(t) + \sum_{i=0}^{m-1} c_{i+\lambda+n+3}\delta^{\{i\}}(t), \\ f_n(t) \equiv (1-t)^p z_n(t) + \sum_{i=0}^{\lambda} c_{i+n+2}(t-1)^i, \end{gathered} \tag{4.3}$$

где $z_n(t) \equiv \sum_{i=-1}^{n+1} c_i B_i(t)$ — кубический сплайн, рассмотренный выше в разд. 3. Набор $\{c_k\}_{-1}^{n+m+\lambda+2}$ неизвестных параметров найдем, согласно нашему ОМККС, из квадратной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $(n+m+\lambda+4)$-го порядка:

$$\begin{gathered} (ST\rho_n)(s_i) = 0, \quad i = \overline{0,n}, \quad (T\rho_n)^{\{j\}}(1) = 0, \quad j = \overline{0,\lambda}, \quad \rho_n^{\{i\}}(0) = 0, \quad i = \overline{0,m-1}, \\ (STUx_n)^{(3)}(s_k - 0) = (STUx_n)^{(3)}(s_k + 0), \quad k = \overline{1,n-1}, \end{gathered} \tag{4.4}$$

где $\rho_n(t) \equiv \rho_n^A(t) \equiv (Ax_n - y)(t)$ — невязка приближенного решения, а $\{s_i\}_0^n$ — использованная ранее система узлов коллокации, порождающая сетку (3.1).

При обосновании предложенного метода полезную роль играют функции

$$\Psi_i(t) \equiv \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} \tau_l(t) \prod_{k=0}^{i-l-1} (p+k), \quad i = \overline{0,m-1}.$$

Для вычислительного алгоритма (4.1)–(4.4) справедлива

Теорема 2. *Пусть однородное УТРФО $Ax = 0$ имеет в X лишь нулевое решение (например, в условиях теоремы 3 в [7]), а исходные данные таковы, что $u \equiv S_s K$ (по t), $\psi_j, \Psi_i, y \in YC^{(r)}$, $r = \overline{1,4}$, $j = \overline{0,\lambda}$, $i = \overline{0,m-1}$. Тогда при всех $n \in N$, $n \ge n_0$ СЛАУ (4.4) обладает единственным решением $\{c_k^*\}$ и последовательность приближенных решений $x_n^* \equiv x_n(t;\{c_k^*\})$ сходится к точному решению $x^* = A^{-1}y$ по норме пространства X со скоростью*

$$\Delta x_n^* \equiv \left\| x_n^* - x^* \right\| = O(n^{-r}), \quad r = \overline{1,4}. \tag{4.5}$$

Доказательство. УТРФО (4.1) представляется в виде линейного операторного уравнения

$$Ax \equiv Ux + Kx = y \quad (x \in X \equiv D^{\{p\}}\{m;0\}, \quad y \in Y \equiv C_{0;1}^{\{m\};\{p\}}), \tag{4.6}$$

в котором оператор $A : X \to Y$ непрерывно обратим.

Систему (4.3), (4.4) требуется записать также в операторной форме. С этой целью построим соответствующие конечномерные подпространства в виде

$$X \supset X_n \equiv V(S_n^3) \oplus \operatorname{span}\left\{(t-1)^i\right\}_0^{\lambda} \oplus \operatorname{span}\left\{\delta^{\{i\}}(t)\right\}_0^{m-1},$$

$$Y \supset Y_n \equiv UV(S_n^3) \oplus \Pi_{m+\lambda}.$$

Тогда, следуя рассуждениям при доказательстве теоремы 4.3.1 (см. [15, гл. 4, § 3]), несложно показать, что вычислительная схема (4.3), (4.4) ОМККС равносильна линейному операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv \Gamma_n A x_n = \Gamma_n y \quad (x_n \in X_n,\, \Gamma_n y \in Y_n), \tag{4.7}$$

где $\Gamma_n : Y \to Y_n$ – "сплайновый" оператор, введенный и подробно изученный в разделе 3. Следовательно, для доказательства утверждений теоремы 2 достаточно установить существование, единственность и сходимость решений уравнений (4.7).

Уточним структуру аппроксимирующего уравнения (4.7). Поскольку в силу леммы 3.2 $\Gamma_n^2 = \Gamma_n$, имеем $\Gamma_n U x_n = U x_n \in Y_n$ при любом элементе $x_n \in X_n$.Таким образом, система (4.3), (4.4) эквивалентна линейному уравнению вида

$$A_n x_n \equiv U x_n + \Gamma_n K x_n = \Gamma_n y \quad (x_n \in X_n,\, \Gamma_n y \in Y_n). \tag{4.8}$$

Обсудим теперь вопрос близости операторов A и A_n на подпространстве X_n. Используя уравнения (4.6) и (4.8), представления (2.5) и (3.4), а также нормы (2.4) и (2.1), для произвольного элемента $x_n \in X_n$ находим, что

$$\|Ax_n - A_n x_n\|_Y = \|Kx_n - \Gamma_n K x_n\|_Y = \|STKx_n - P_n STKx_n\|_C. \tag{4.9}$$

На основании (4.1), (4.2) и (2.6) имеем

$$(Kx)(t) = \int_{-1}^{1} u(t,s) z(s) ds + \sum_{j=0}^{\lambda} \mu_j(z)\psi_j(t) + \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \gamma_i \Psi_i(t),$$

где

$$\mu_j(z) \equiv \int_{-1}^{1} (Sz)(s)(s-1)^j \frac{1}{j!} ds + \sum_{k=0}^{\lambda} z^{\{k\}}(1)\beta_{jk},$$

$$\beta_{jk} \equiv \int_{-1}^{1} (s-1)^{j+k} \frac{1}{j!\,k!} (1-s)^{-p} ds, \quad j,k = \overline{0,\lambda}.$$

Тогда, с учетом (4.3) и (4.2), получаем, что

$$STKx_n = \int_{-1}^{1} h(t,s) f_n(s) ds + \sum_{j=0}^{\lambda} \mu_j(f_n)\alpha_j(t) + \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i c_{i+\lambda+n+3}\beta_i(t), \tag{4.10}$$

где $h \equiv S_t v$, $\alpha_j \equiv ST\psi_j$, $\beta_i \equiv ST\Psi_i$, $j = \overline{0,\lambda}$, $i = \overline{0,m-1}$.

В силу (4.10), (3.3) и определения (2.7) последовательно выводим следующую аппроксимативную оценку (здесь и далее d_i, $i = \overline{1,4}$ – определенные константы, не зависящие от натурального n):

$$\begin{aligned} \|STKx_n - P_n STKx_n\|_C = \max_{t \in I} \Bigg| \int_{-1}^{1} (h - P_n^t h)(t,s) f_n(s) ds + \sum_j \mu_j(f_n)(\alpha_j - P_n\alpha_j)(t) + \\ + \sum_i (-1)^i c_{i+\lambda+n+3}(\beta_i - P_n\beta_i)(t) \Bigg| \le 2\|f_n\|_C d_1 n^{-r} + \sum_j |\mu_j(f_n)| d_1 n^{-r} + \sum_i |c_{i+\lambda+n+3}| d_1 n^{-r} \le \\ \le 2^{p+1} \|f_n\|_{\{p\}} d_1 n^{-r} + (2^{\lambda+1} + \beta)(\lambda+1)\|f_n\|_{\{p\}} d_1 n^{-r} + m\|x_n\|_X d_1 n^{-r} \le d_2 n^{-r} \|x_n\|_X, \end{aligned} \tag{4.11}$$

где $d_2 \equiv [2^{p+1} + (2^{\lambda+1} + \beta)(\lambda+1) + m]d_1$, $\beta \equiv \max\limits_{0 \le j,k \le \lambda} |\beta_{jk}|$.

Из равенства (4.9) и оценки (4.11) следует, что

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \to Y} \le d_2 n^{-r}, \quad r = \overline{1,4}. \tag{4.12}$$

Тогда, благодаря неравенствам (4.12) и (3.5), из теоремы 7 (см. [13, гл. 1, § 4]) следует утверждение теоремы 2 с оценкой (4.5). Требуемое доказано.

В дальнейшем при оптимизации прямых проекционных методов решения УТРФО (4.1) существенную роль будет играть

Теорема 3. *Пусть УТРФО* (4.1) *имеет решение вида*

$$x^*(t) \equiv z^*(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \gamma_i^* \delta^{\{i\}}(t), \quad Sz^* = STUx^* \in C^{(r)}, \quad r = \overline{1,4}, \tag{4.13}$$

при данном $y \in Y$ и соответствующий аппроксимирующий оператор A_n в ОМККС непрерывно обратим. Тогда погрешность приближенного решения $x_n^* \in X_n$ для правой части $\Gamma_n y \in Y_n$ представима в виде

$$\Delta x_n^* = O\{\|Sz^* - P_n Sz^*\|_C\} = O(n^{-r}), \quad r = \overline{1,4}. \tag{4.14}$$

Доказательство. В силу теоремы 6 (см. [13, гл. 1, § 3]) и структуры приближенного уравнения (4.8) имеем

$$\Delta x_n^* = O\{\|\Gamma_n\| \|x^* - x_n\|\}, \tag{4.15}$$

где $x_n \in X_n$ — пока произвольный элемент. Выберем его следующим образом:

$$x_n(t) \equiv (VP_n STUx^*)(t) + \sum_{j=0}^{\lambda} (TUx^*)^{\{j\}}(1)(t-1)^j/j! + \sum_{i=0}^{m-1} \gamma_i^* \delta^{\{i\}}(t). \tag{4.16}$$

Тогда требуемая оценка (4.14) следует из (4.15), (4.13), (2.3), (4.16), (2.7), (2.1), леммы 3.1 с учетом замечания 1:

$$\Delta x_n^* \le d_3 \|VSz^* - VP_n Sz^*\|_X \equiv d_3 \|VSz^* - VP_n Sz^*\|_{\{p\}} \equiv d_3 \|Sz^* - P_n Sz^*\|_C \le d_4 n^{-r}, \quad r = \overline{1,4}.$$

5. К ОПТИМИЗАЦИИ ПРЯМЫХ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ УТРФО

Предварительно приведем необходимые определения и постановку задачи. Пусть X и Y — банаховы пространства, а X_n и Y_n — их соответствующие произвольные подпространства одинаковой размерности $N = N(n) < +\infty$, $n \in N$, причем $N \to \infty$ при $n \to \infty$. Обозначим через $\Lambda_n \equiv \{\lambda_n\}$ некоторое множество линейных операторов λ_n, отображающих Y на Y_n. Далее рассмотрим два класса однозначно разрешимых линейных операторных уравнений

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y, \tag{5.1}$$

и

$$\lambda_n A x_n = \lambda_n y, \quad x_n \in X_n, \quad \lambda_n \in \Lambda_n, \quad n \in N, \tag{5.2}$$

соответственно. Пусть $x^* \in X$ и $x_n^* \in X_n$ — решения уравнений (5.1) и (5.2) соответственно, а $F \equiv \{f\}$ — класс коэффициентов (т.е. исходных данных) уравнения (5.1), порождающий класс $X^* \equiv \{x^*\}$ искомых элементов.

Следуя работе [13, гл. 2, § 1], величину

$$V_N(F) \equiv \inf_{X_n, Y_n} \inf_{\lambda_n \in \Lambda_n} V(F; \lambda_n; X_n, Y_n), \tag{5.3}$$

где

$$V(F; \lambda_n; X_n, Y_n) \equiv \sup_{f \in F}(f; \lambda_n; X_n, Y_n) = \sup_{x^* \in X^*} \|x^* - x_n^*\|_X,$$

назовем *оптимальной оценкой погрешности* всевозможных прямых проекционных методов ($\lambda_n \in \Lambda_n$) решения уравнения (5.1) на классе F.

Определение 1 (см. [13, гл. 2, § 1]). Пусть существуют подпространства $X_n^0 \subset X, Y_n^0 \subset Y$ размерности $N = N(n) < +\infty$ и операторы $\lambda_n^0 : Y \to Y_n^0$, $\lambda_n^0 \in \Lambda_n$, при которых выполняется условие

$$V_N(F) \succ\prec V(F;\lambda_n^0;X_n^0,Y_n^0) \quad (N \to \infty), \tag{5.4}$$

где символ $\succ\prec$ означает, как обычно, слабую эквивалентность. Тогда метод (5.1), (5.2) при $X_n = X_n^0$, $Y_n = Y_n^0$ и $\lambda_n = \lambda_n^0$ называется *оптимальным по порядку точности* на классе F среди всех прямых проекционных методов λ_n $(\lambda_n \in \Lambda_n)$ решения уравнений (5.1).

Рассмотрим теперь оптимизацию по порядку точности на классе однозначно разрешимых (равномерно относительно $K \in F$) УТРФО (4.1) в случае, когда исходные данные принадлежат семейству $YC^{(r)}$, т.е. при $u \equiv S_s K$ (по t), ψ_j, $j = \overline{0,\lambda}$, Ψ_i, $i = \overline{0, m-1}$, $y \in YC^{(r)}$, $r = \overline{1,4}$. Тогда на основании теоремы 3 из [7] имеем

$$X^* \equiv \left\{x^* \in X \,|\, Ax^* = y;\, u, \psi_j, \Psi_i,\, y \in YC^{(r)}\right\} = XC^{(r)},$$

где $XC^{(r)} \equiv \left\{x \in X \,|\, STUx \in C^{(r)}\right\}$.

Далее пусть

$$X_n^0 \equiv V(S_n^3) \oplus \operatorname{span}\left\{(t-1)^i\right\}_0^\lambda \oplus \operatorname{span}\left\{\delta^{\{i\}}(t)\right\}_0^{m-1},$$

$$Y_n^0 \equiv UV(S_n^3) \oplus \Pi_{m+\lambda},$$

а $\Lambda_n^0 \equiv \{\lambda_n\}$ – семейство всех линейных операторов $\lambda_n : Y \to Y_n^0$.

Теорема 4. *Пусть* $F = YC^{(r)}$, $\Lambda_n = \Lambda_n^0$. *Тогда*

$$V_N(F) \succ\prec N^{-r}, \quad N = n + m + \lambda + 4, \quad r = \overline{1,4}, \tag{5.5}$$

и этот оптимальный по точности порядок реализует ОМККС.

Доказательство. Заметим, что из определения N-го колмогоровского поперечника $d_N(L,X)$ множества L в нормированном пространстве $X \equiv D^{\{p\}}\{m;0\}$ (см., например, [19, гл. 1, § 1]) и теоремы 1.3.6 (см.[4, гл. 1, § 1.3]) следует равенство

$$d_N(L,X) = d_{N-m-\lambda}(STU(L),C), \quad N > m + \lambda,$$

откуда, с учетом $d_l\left(C^{(r)},C\right) \succ\prec l^{-r}$ $(l \in N)$ (см., например, [19, гл. 3, § 3]), вытекает слабая эквивалентность

$$d_N\left(XC^{(r)},X\right) \succ\prec N^{-r}. \tag{5.6}$$

Далее, известно (см. [13, гл. 4, § 2]), что $V_N(F) \geq d_N(X^*,X)$. Следовательно, из (5.6) следует, что

$$V_N(F) \geq d_N(XC^{(r)},X) \succ\prec N^{-r}. \tag{5.7}$$

С другой стороны, согласно (5.3) и теоремам 2 и 3 находим оценку

$$V_N(F) \leq \sup_{x^* \in XC^{(r)}} \left\|x^* - x_n^*\right\|_X = O(N^{-r}), \quad x_n^* = A_n^{-1}\Gamma_n y.$$

Отсюда и из соотношений (5.7), (5.4) получаем утверждение теоремы 4 с оценкой (5.5). Требуемое доказано.

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Замечание 2. В силу определения нормы в $X \equiv D^{\{p\}}\{m;0\}$ нетрудно заметить, что из сходимости последовательности (x_n^*) приближенных решений к точному решению $x^* = A^{-1}y$ в метрике X следует обычная сходимость в пространстве обобщенных функций, т.е. слабая сходимость.

Замечание 3. При приближении решений операторных уравнений $Ax = y$ возникает естественный вопрос о скорости сходимости невязки $\rho_n^*(t) \equiv (Ax_n^* - y)(t)$ исследуемого метода. Один из результатов в этом направлении легко получить из теоремы 2, а именно, из нее вытекает простое следствие: если исходные данные уравнения (4.1) принадлежат классу $YC^{(r)}$, $r = \overline{1,4}$, то в условиях теоремы 2 справедлива оценка

$$\left\|\rho_n^*\right\|_Y = O(n^{-r}), \quad r = \overline{1,4}.$$

Замечание 4. Поскольку $C_{0;1}^{\{0\};\{p\}} \equiv C\{p;1\} \equiv D^{\{p\}}\{0;0\}$, то при $m = 0$ УТРФО (4.1) превращается в интегральное уравнение II рода в $C\{p;1\}$ с фиксированной особенностью в ядре, а предложенный метод (4.3), (4.4) – в соответствующий вариант метода коллокации с кубическими сплайнами, причем $h \equiv S_t S_s K$, $\alpha_j \equiv S\psi_j$, $j = \overline{0,\lambda}$, $STy \equiv Sy$. Следовательно, теорема 2 содержит в себе соответствующие результаты по обоснованию данного варианта метода коллокации для приближенного решения уравнений II рода с особенностью в ядре; при этом погрешность характеризуется неравенством $\left\|x_n^* - x^*\right\|_{\{p\}} = O(n^{-r})$, $r = \overline{1,4}$.

Замечание 5. Если $m = p = 0$, то $C_{0;1}^{\{0\};\{0\}} \equiv C \equiv D^{\{0\}}\{0;0\}$ и из УТРФО (4.1) получается интегральное уравнение II рода в пространстве C. При этом метод (4.3), (4.4) становится соответствующим методом кубической сплайн-коллокации для уравнения II рода, причем $h \equiv K$, $STy \equiv y$. Поэтому теорема 2 охватывает обоснование указанного метода при приближенном решении уравнений II рода в C. Соответствующая оценка погрешности имеет вид $\left\|x_n^* - x^*\right\|_C = O(n^{-r})$, $r = \overline{1,4}$.

Замечание 6. Так как в условиях теоремы 2 соответствующие аппроксимирующие операторы A_n обладают свойством вида

$$\left\|A_n^{-1}\right\| = O(1), \quad A_n^{-1} : Y_n \to X_n, \quad n \geq n_1,$$

то (см. [13, гл. 1, § 5]) очевидно, что предложенный в настоящей работе прямой метод для УТРФО (4.1) устойчив относительно малых возмущений исходных данных. Это позволяет найти численное решение исследуемых уравнений на ЭВМ с любой наперед заданной степенью точности. Более того, если УТРФО (4.1) хорошо обусловлено, то хорошо обусловленной является также СЛАУ (4.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 352 с.
2. *Bart G.R., Warnock R.L.* Linear integral equations of the third-kind // SIAM J. Math. Anal. 1973. V. 4. № 4. P. 609–622.
3. *Кейз К.М., Цвайфель П.Ф.* Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972. 384 с.
4. *Замалиев Р.Р.* О прямых методах решения интегральных уравнений третьего рода с особенностями в ядре: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Казань: КФУ, 2012. 114 с.
5. *Расламбеков С.Н.* Сингулярное интегральное уравнение первого рода в исключительном случае в классах обобщенных функций // Изв. вузов. Математика. 1983. № 10. С. 51–56.
6. *Бжихатлов Х.Г.* Об одной краевой задаче со смещением // Дифференц. ур-ния. 1973. Т. 9. № 1. С. 162–165.
7. *Габбасов Н.С.* Методы решения интегрального уравнения третьего рода с фиксированными особенностями в ядре // Дифференц. ур-ния. 2009. Т. 45. № 9. С. 1341–1348.
8. *Габбасов Н.С., Замалиев Р.Р.* Новый вариант метода подобластей для интегральных уравнений третьего рода с особенностями в ядре // Изв. вузов. Математика. 2011. № 5. С. 12–18.
9. *Габбасов Н.С.* Новый вариант метода коллокации для одного класса интегральных уравнений в особом случае // Дифференц. ур-ния. 2013. Т. 49. № 9. С. 1178–1185.
10. *Габбасов Н.С.* Специальный прямой метод решения интегральных уравнений в особом случае // Дифференц. ур-ния. 2014. Т. 50. № 9. С. 1245–1252.
11. *Габбасов Н.С., Галимова З.Х.* К численному решению интегральных уравнений третьего рода с особенностями в ядре // Изв. вузов. Математика. 2016. № 12. С. 36–45.

12. *Габбасов Н.С., Галимова З.Х.* Специальный вариант метода коллокации для интегральных уравнений третьего рода с неподвижными особенностями в ядре // Изв. вузов. Математика. 2018. № 5. С. 20–27.
13. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. 232 с.
14. *Пресдорф З.* Сингулярное интегральное уравнение с символом, обращающимся в нуль в конечном числе точек // Матем. исследования. 1972. Т. 7. № 1. С. 116–132.
15. *Габбасов Н.С.* Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщенных функций. Казань.: Изд-во Казанск. ун-та, 2006. 176 с.
16. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
17. *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.
18. *Педас А., Тимак Э.* Метод кубической сплайн-коллокации для решения слабо сингулярных интегральных уравнений // Дифференц. ур-ния. 2001. Т. 37. № 10. С. 1415–1424.
19. *Даугавет И.К.* Введение в теорию приближения функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 184 с.