ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 2, с. 196–198

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 512.643

О КОНГРУЭНТНЫХ ЦЕНТРАЛИЗАТОРАХ БЛОЧНО-ДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ И МАТРИЦЫ СЕРГЕЙЧУКА–ХОРНА

Х. Д. Икрамов

119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, ВМК, Россия

e-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступила в редакцию 12.02.2021 г.
Переработанный вариант 12.02.2021 г.
Принята к публикации 12.10.2021 г.

Конгруэнтный централизатор матрицы A – это множество матриц X, удовлетворяющих соотношению $X^*AX = A$. Конструкция прямой суммы и матрица Сергейчука–Хорна суть два элемента в описании канонической формы произвольной комплексной матрицы относительно эрмитовых конгруэнций. В данной статье устраняются излишние предположения и неточности имеющихся описаний конгруэнтных централизаторов блочно-диагональных матриц и матрицы Сергейчука–Хорна. Библ. 4.

Ключевые слова: конгруэнция, конгруэнтный централизатор, коквадрат.

DOI: 10.31857/S0044466922020090

1. Пусть A – невырожденная комплексная $n \times n$-матрица. Матрица

$$K_A = A^{-*}A$$

называется коквадратом матрицы A, а множество

$$\mathscr{C}_A^* = \{X \mid X^*AX = A\}$$

называется конгруэнтным централизатором для A. Этот термин объясняется тем, что множество $\mathscr{C}_A^*$ есть аналог обычного централизатора матрицы A для случая, когда вместо подобий группа $GL_n(\mathbf{C})$ действует на матричном пространстве $M_n(\mathbf{C})$ конгруэнциями, т.е. преобразованиями вида $A \to P^*AP$ с произвольными невырожденными матрицами P.

Пусть A – матрица блочно-диагонального вида:

$$A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Блоки B и C суть квадратные матрицы порядков соответственно k и l $(k + l = n)$. Для таких A в [1] было доказано следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть A – невырожденная матрица вида* (1), *а X – произвольная матрица из централизатора $\mathscr{C}_A^*$. Представим X в блочной форме, согласованной с прямой суммой* (1):

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Предположим, что коквадраты матриц B и C не имеют общих собственных значений. Тогда, если в (2) *подматрицы X_{11} и X_{22} невырожденны, то и матрица X является прямой суммой*:

$$X = X_{11} \oplus X_{22}. \tag{3}$$

Как следствие, X_{11} и X_{22} принадлежат конгруэнтным централизаторам соответственно матриц B и C.

В п. 2 настоящей статьи мы показываем, что условие невырожденности блоков X_{11} и X_{22} в этой теореме является лишним, и в действительности *все* матрицы из $\mathscr{C}_A^*$ имеют блочно-диагональную форму.

Матрицей Сергейчука–Хорна мы называем матрицу

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \cdots & i \\ & 1 & \cdots & \\ 1 & i & & \end{pmatrix}.$$

Матрица Δ_n представляет один из трех типов блоков, прямой суммой которых является каноническая форма произвольной квадратной матрицы относительно конгруэнций.

В [2] было доказано, что, с точностью до диагональных сомножителей специального вида, все матрицы из конгруэнтного централизатора $\mathscr{C}_\Delta^*$ матрицы Δ_n являются верхнетреугольными и тёплицевыми. В п. 3 мы показываем, что в этом утверждении оговорка относительно диагональных сомножителей не нужна, и верна следующая

Теорема 2. *Всякая матрица $X \in \mathscr{C}_\Delta^*$ тёплицева и имеет верхнетреугольную форму.*

2. Для произвольных квадратных матриц A и X одинакового порядка справедливо равенство

$$(X^* - I)A(X + I) + (X^* + I)A(X - I) = 2(X^*AX - A).$$

Если $X \in \mathscr{C}_A^*$, то правая часть обращается в нуль:

$$(X^* - I)A(X + I) + (X^* + I)A(X - I) = 0. \tag{4}$$

Предположим, что X не имеет собственного значения 1, и умножим (4) слева на матрицу $(X^* - I)^{-1}$, а справа – на $(X - I)^{-1}$. Полагая

$$Y = (X + I)(X - I)^{-1}, \tag{5}$$

получаем уравнение

$$AY + Y^*A = 0 \tag{6}$$

для матрицы Y. Пользуясь невырожденностью матрицы A, выводим отсюда

$$Y = -A^{-1}Y^*A$$

и

$$Y^* = -A^* YA^{-*}.$$

Подставляя это выражение для Y^* в (6), имеем

$$AY = A^* YA^{-*}A$$

или

$$(A^{-*}A)Y = Y(A^{-*}A). \tag{7}$$

В проведенных до сих пор выкладках A могла быть произвольной невырожденной матрицей. Пусть теперь A – блочно-диагональная матрица (1). Ее коквадрат $K_A = A^{-*}A$ также является прямой суммой:

$$A^{-*}A = B^{-*}B \oplus C^{-*}AC.$$

По предположению, матрицы $B^{-*}B$ и $C^{-*}C$ не имеют общих собственных значений. Поэтому матрица Y, коммутирующая с $A^{-*}A$, должна быть блочно-диагональной с диагональными блоками порядков k и l.

Нетрудно показать, что, как и X, матрица Y не имеет собственного значения 1. Разрешая относительно X соотношение (5), имеем

$$X = (Y + I)(Y - I)^{-1}.$$

Матрица X сохраняет блочно-диагональную форму матрицы Y. Записывая X в виде (3), из условия $X^*AX = A$ выводим

$$X_{11}^*BX_{11} = B, \quad X_{22}^*CX_{22} = C.$$

Предположение, что X не имеет собственного значения 1, не является ограничительным. Очевидно, что вместе с X централизатору $\mathscr{C}_A^*$ принадлежат и все матрицы вида αX, где $|\alpha| = 1$. Поэтому, если в спектре матрицы X есть 1, то X нужно заменить подходящим кратным $\alpha_0 X$, уже не имеющим этого собственного значения.

3. Пусть теперь $A = \Delta_n$, а X — матрица из централизатора $\mathscr{C}_\Delta^*$, не имеющая собственного значения 1. Определяя матрицу Y формулой (5), приходим, как и в п. 2, к уравнению

$$(\Delta_n^{-*}\Delta_n)Y = Y(\Delta_n^{-*}\Delta_n). \tag{8}$$

Матрица $\Pi = \Delta_n^{-*}\Delta_n$ есть коквадрат матрицы Δ_n. Она описана в [3, задача 4.5.P15] и представляет собой верхнетреугольную тёплицеву матрицу с единичной главной диагональю и числом $2i$ на первой наддиагонали. Прочие детали устройства этой матрицы для нас не важны.

Обозначим через $\mathscr{T}_n$ алгебру верхнетреугольных тёплицевых матриц порядка n. Этой алгебре, очевидно, принадлежат матрицы

$$I_n, \Pi - I_n, (\Pi - I_n)^2, \ldots, (\Pi - I_n)^{n-1}. \tag{9}$$

Матрица $(\Pi - I_n)^k$ имеет нулевую главную диагональ и $k - 1$ первых нулевых наддиагоналей; в то же время k-я наддиагональ ненулевая. Отсюда следует, что матрицы (9) образуют (линейный) базис алгебры $\mathscr{T}_n$.

Соотношение (8) означает, что матрица Y коммутирует с Π, а потому Y коммутирует со всеми матрицами (9). Жорданова клетка $J_n(0)$ с нулем на главной диагонали принадлежит алгебре $\mathscr{T}_n$ и, значит,

$$J_n(0)Y = YJ_n(0).$$

Это равенство означает (см. [4, гл. VIII, § 2]), что и матрица Y принадлежит T_n, т.е. является верхнетреугольной тёплицевой матрицей.

Как и в п. 2, матрица Y не имеет собственного значения 1. Разрешая относительно X соотношение (5), имеем

$$X = (Y + I)(Y - I)^{-1}.$$

Отсюда заключаем, что матрица X имеет ту же верхнетреугольную тёплицеву форму, что и Y.

Предположение, что X не имеет собственного значения 1, снова не является ограничительным: если в спектре матрицы X есть 1, то X нужно заменить подходящим кратным $\alpha_0 X$, не имеющим этого собственного значения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Икрамов Х.Д.* Конгруэнтный централизатор блочно-диагональной матрицы // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2016. Т. 453. С. 96–103.
2. *Икрамов Х.Д.* Конгруэнтный централизатор матрицы Сергейчука–Хорна // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2016. Т. 453. С. 104–113.
3. *Horn R.A., Johnson C.R.* Matrix Analysis. Second Edition. – Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.