ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 2, с. 330–341

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.958

СХОДИМОСТЬ АТТРАКТОРОВ АППРОКСИМАЦИИ К АТТРАКТОРАМ МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ КЕЛЬВИНА–ФОЙГТА[1)]

© 2022 г.
М. В. Турбин[1,*], А. С. Устюжанинова[1,]**

[1] 394018 Воронеж, Университетская пл., 1, Воронежский государственный ун-т, Россия

**e-mail: mrmike@mail.ru*

***e-mail: nastyzhka@gmail.com*

Поступила в редакцию 30.04.2021 г.
Переработанный вариант 10.07.2021 г.
Принята к публикации 12.10.2021 г.

Работа посвящена исследованию качественного поведения решений модифицированной модели Кельвина–Фойгта. Для этой модели рассматривается аппроксимация и доказывается существование минимального траекторного и глобального аттракторов как для самой модели, так и для ее аппроксимации. Затем показывается, что траекторные и глобальные аттракторы аппроксимации сходятся к траекторным и глобальным аттракторам исходной модели в смысле полуотклонения в соответствующих пространствах при стремлении параметра аппроксимации к нулю. Библ. 24.

Ключевые слова: аттракторы, сходимость аттракторов, пространство траекторий, модифицированная модель Кельвина–Фойгта, слабое решение.

DOI: 10.31857/S0044466922020120

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория аттракторов динамических систем создана уже давно и довольно хорошо развита. Она получила применение в ряде задач гидродинамики, для которых имеет место теорема единственности решения. В качестве наиболее известных примеров можно привести результаты О.А. Ладыженской для системы Навье–Стокса в двумерном случае [1], [2] и Г.А. Серегина для модели Бингама в двумерном случае [3]. При этом требование единственности решения является очень ограничительным и не выполняется для подавляющего большинства моделей гидродинамики. В связи с этим М.И. Вишиком и В.В. Чепыжовым [4], а также независимо от них Дж. Селлом [5], была создана теория инвариантных траекторных аттракторов и с ее помощью удалось исследовать аттракторы системы Навье–Стокса в трехмерном случае и ряда других систем. В дальнейшем эта теория была усовершенствована В.Г. Звягиным и Д.А. Воротниковым в работе [6] (подробное изложение см. в монографии [7]). А именно, на основе аппроксимационно-топологического метода исследования задач гидродинамики удалось отказаться от требования трансляционной инвариантности пространства траекторий. На основе этой теории аттракторов был исследован целый ряд моделей неньютоновской гидродинамики (см., например, обзорную статью [8] и имеющуюся там библиографию).

Отметим, что с прикладной точки зрения также важно уметь приближенно находить аттракторы изучаемых систем. Однако это вызывает сложности в связи с “плохими” математическими свойствами рассматриваемых моделей. Поэтому представляет интерес вопрос об аппроксимации аттракторов рассматриваемых моделей аттракторами моделей с “хорошими” свойствами. А именно, рассматривается некоторая аппроксимационная задача, для которой имеют место теорема единственности решений и свойство непрерывной зависимости решений от данных задачи. Следовательно, для этой аппроксимационной задачи можно будет воспользоваться различными численными методами. После чего показывается, что аттракторы этой аппроксимационной задачи сходятся к аттракторам исходной модели в смысле полуотклонения. Это должно позволить получить численно представление об аттракторах изучаемой модели.

[1)]Работа М.В. Турбина выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-01-00051), работа А.С. Устюжаниновой выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект FZGU-2020-0035).

В работе рассматриваются вопросы сходимости к аттракторам модифицированной модели Кельвина–Фойгта аттракторов ее аппроксимационной задачи.

2. ОПИСАНИЕ РАССМАТРИВАЕМОЙ МОДЕЛИ

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2,3$) с границей $\partial\Omega$ класса C^3 рассматривается следующая система уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \varkappa\frac{\partial \Delta v}{\partial t} - \varkappa\sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial \Delta v}{\partial x_k} + \nabla p = f; \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div} v = 0. \tag{2.2}$$

Здесь $v(x,t)$ – вектор скорости частицы жидкости, находящейся в точке x в момент времени t; $p(x,t)$ – давление жидкости в точке x в момент времени t; $f(x,t)$ – вектор плотности внешних сил; $\nu > 0$, $\varkappa > 0$ – вязкость жидкости и время релаксации соответственно. Неизвестными функциями являются v и p.

Рассматриваемая модель впервые была введена В.А. Павловским [9]. Она была подтверждена рядом экспериментальных исследований растворов полиэтиленоксида, полиакриламида и гуаровой смолы [10], [11].

Для системы (2.1), (2.2) рассмотрим начально-краевую задачу с начальным и граничным условиями

$$v\big|_{t=0} = a, \tag{2.3}$$

$$v\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.4}$$

В задаче (2.1)–(2.4) известные параметры ν, $\varkappa$, а также плотность внешних сил f мы считаем раз и навсегда зафиксированными.

Для рассматриваемой модифицированной модели Кельвина–Фойгта в работе [12] было доказано существование слабого решения на произвольном конечном промежутке времени $[0,T]$. Существование траекторного и глобального аттракторов доказано в [13]. Также в работах [14], [15] было доказано существование решения задачи оптимального управления с обратной связью для этой модели.

Важно отметить, что для слабых решений начально-краевой задачи (2.1)–(2.4) не доказана теорема единственности. При этом для сильных решений рассматриваемой задачи теорема единственности имеет место [11], но существование сильных решений начально-краевой задачи (2.1)–(2.4) до сих пор не установлено.

3. НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Приведем необходимые нам определения.

Определение 1. Пусть на линейном пространстве X определена не более чем счетная система полунорм $\mathcal{P}_X$ такая, что из условия $p(x) = 0$ для всех $p \in \mathcal{P}_X$ следует, что $x = \theta$. Тогда пара $(X, \mathcal{P}_X)$ называется *счетно-нормированным* пространством.

Нам потребуется ряд фактов из теории аттракторов (подробнее см. [7], [8]).

Через E, E_0 будем обозначать два банаховых пространства. Будем предполагать, что пространство E рефлексивно и вложение $E \subset E_0$ – непрерывно. Через $\mathbb{R}_+$ будем обозначать неотрицательную полуось числовой прямой $\mathbb{R}$.

Пространство $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ состоит из непрерывных функций, определенных на $\mathbb{R}_+$ и принимающих значения в E_0. Так как полуось $\mathbb{R}_+$ некомпактна, то в линейном пространстве $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ нельзя задать обычную норму пространства непрерывных функций. Рассмотрим в пространстве $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ семейство полунорм:

$$\|u\|_n = \|u\|_{C([0,n],E_0)}, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{3.1}$$

и зададим топологию в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ при помощи определения сходимости последовательностей относительно введенных полунорм. А именно, последовательность $\{u_m\}$ из $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ сходится к функции u при $m \to \infty$, если $\|u_m - u\|_n \to 0$ при любом $n = 1, 2, \ldots$. Пространство $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ с семейством полунорм (3.1) является счетно-нормированным пространством. Топология локальной равномерной сходимости в пространстве $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ является метризуемой относительно метрики

$$\rho(u, v) = \|u - v\|_{C(\mathbb{R}_+; E_0)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|v\|_{C([0,n], E_0)}}{1 + \|v\|_{C([0,n], E_0)}}.$$

Полученное метрическое пространство полно, т.е. является пространством Фреше.

В работе мы используем уже устоявшееся в работах по аттракторам неинвариантных пространств траекторий обозначение $\|u - v\|_{C(\mathbb{R}_+; E_0)}$ для метрики в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$. Это связано с использованием абстрактных понятий и утверждений из работ [7], [8], [19], в которых используется данное обозначение (см. также замечания 1 и 2). Отметим, что функционал $\|\cdot\|_{C(\mathbb{R}_+; E_0)}$ не является нормой, так как $\|\lambda v\|_{C(\mathbb{R}_+; E_0)} \neq |\lambda| \|v\|_{C(\mathbb{R}_+; E_0)}$ при $\lambda \neq \pm 1$.

Обозначим через Π_M ($M \geq 0$) оператор сужения функций, заданных на $\mathbb{R}_+$, на отрезок $[0, M]$. Имеет место следующий критерий относительной компактности множеств из $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ (напомним, что множество P называется относительно компактным, если его замыкание компактно).

Лемма 1. *Для того чтобы множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0)$ было относительно компактно в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ необходимо и достаточно, чтобы при любом $M > 0$ множество $\Pi_M P$ было относительно компактно в $C([0, M], E_0)$.*

Обозначим через $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ пространство всех существенно ограниченных функций, определенных на $\mathbb{R}_+$ и принимающих значение в E (т.е. для любой $u \in L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ найдется число $M_u < \infty$ такое, что $\|u(t)\|_E \leq M_u$ при почти всех $t \in \mathbb{R}_+$), с нормой $\|u\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; E)} = \operatorname{vrai\,max}_{t \in \mathbb{R}_+} \|u(t)\|_E$ (здесь $\operatorname{vrai\,max}_{t \in \mathbb{R}_+} \|u(t)\|_E$ – это нижняя грань всех M_u). Пространство $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ является банаховым относительно указанной нормы (см. [17]).

Определение 2. Пусть J – конечный или бесконечный интервал вещественной оси и $\bar{J}$ – его замыкание. Далее, пусть Y – банахово пространство. Функция $u : \bar{J} \to Y$ называется слабонепрерывной, если из $t_n \to t$, $t_n \in \bar{J}$ следует, что $u(t_n) \to u(t)$ слабо в Y. Множество слабонепрерывных функций $u : \bar{J} \to Y$ мы будем обозначать через $C_w(\bar{J}, Y)$.

Также нам потребуется одна известная (см., например, [18])

Теорема 1. *Пусть E и E_0 – два банаховых пространства таких, что $E \subset E_0$, причем вложение непрерывно. Если функция v принадлежит $L_\infty(0, T; E)$ и непрерывна как функция со значениями в E_0, то w слабонепрерывна как функция со значениями в E, т.е. $v \in C_w([0, T], E)$.*

Следовательно, функции, принадлежащие классу $C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$, слабонепрерывны со значениями в E (и потому их значения принадлежат пространству E при всех $t \in \mathbb{R}_+$); они ограничены со значениями в E, и для $u \in C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ верно равенство

$$\|u\|_{C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)} = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|u(t)\|_E.$$

Рассмотрим операторы сдвигов $T(h)$ ($h \geq 0$), каждый из которых функции f ставит в соответствие функцию $T(h)f$ такую, что $T(h)f(t) = f(t + h)$. Отметим, что имеет место тождество $T(h_1)T(h_2) = T(h_1 + h_2)$, а также что $T(0)$ – тождественный оператор.

Рассмотрим непустое семейство функций

$$\mathcal{H}^+ \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E).$$

Множество $\mathcal{H}^+$ будем называть *пространством траекторий*, а его элементы – *траекториями*. Будем предполагать, что $\mathcal{H}^+$ непусто.

Приведем основные определения.

Определение 3. Полуотклонением множества C от множества D в метрическом пространстве (X, ρ) называется число

$$h(C, D) = \sup_{c \in C} \operatorname{dist}(c, D) = \sup_{c \in C} \inf_{d \in D} \rho(c, d).$$

Определение 4. Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ называется притягивающим (для пространства траекторий $\mathcal{H}^+$), если для всякого множества $B \subset \mathcal{H}^+$, ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$, выполняется условие

$$\sup_{u \in B} \inf_{v \in P} \|T(h)u - v\|_{C(\mathbb{R}_+; E_0)} \to 0 \quad (h \to \infty). \tag{3.2}$$

Замечание 1. Отметим, что в силу определения сходимости в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ условие (3.2) эквивалентно условию

$$\sup_{u \in B} \inf_{v \in P} \|T(h)u - v\|_{C([0,n], E_0)} \to 0 \quad (h \to \infty)$$

для любого $n = 1, 2, \ldots$.

Замечание 2. Отметим, что в (3.2) величина $\inf_{v \in P} \|T(h)u - v\|_{C(\mathbb{R}_+; E_0)}$ представляет собой расстояние от точки $T(h)u$ до множества P в пространстве $C(\mathbb{R}_+; E_0)$. В свою очередь величина $\sup_{u \in B} \inf_{v \in P} \|T(h)u - v\|_{C(\mathbb{R}_+; E_0)}$ является полуотклонением множества $T(h)u$ от множества P в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$.

Определение 5. Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ называется поглощающим (для пространства траекторий $\mathcal{H}^+$), если для всякого множества $B \subset \mathcal{H}^+$, ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$, существует $h \geq 0$ такое, что при всех $t \geq h$ имеет место включение $T(t)B \subset P$.

Отметим, что любое поглощающее множество является притягивающим.

Определение 6. Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ называется траекторным аттрактором (пространства траекторий $\mathcal{H}^+$), если оно удовлетворяет следующим условиям:

(i) множество P компактно в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ и ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$;

(ii) имеет место равенство $T(t)P = P$ для всех $t \geq 0$;

(iii) множество P является притягивающим в смысле определения 4.

Определение 7. Минимальным траекторным аттрактором пространства траекторий $\mathcal{H}^+$ называется наименьший по включению траекторный аттрактор.

Определение 8. Множество $\mathcal{A} \subset E$ называется глобальным аттрактором (в E_0) пространства траекторий $\mathcal{H}^+$, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(i) множество $\mathcal{A}$ компактно в E_0 и ограничено в E;

(ii) для всякого ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ множества $B \subset \mathcal{H}^+$ выполняется условие притягивания

$$\sup_{u \in B} \inf_{y \in \mathcal{A}} \|u(t) - y\|_{E_0} \to 0 \quad (t \to \infty);$$

(iii) множество $\mathcal{A}$ является наименьшим по включению множеством, удовлетворяющим условиям (i) и (ii).

Замечание 3. Если существует минимальный траекторный аттрактор или глобальный аттрактор, то он единственный.

Теорема 2. *Пусть существует минимальный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ пространства траекторий $\mathcal{H}^+$. Тогда существует глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ пространства $\mathcal{H}^+$, и справедливо соотношение $\mathcal{A} = \mathcal{U}(t)$, $t \geq 0$.*

Сходимость аттракторов для конкретных пространств траекторий мы будем доказывать на основе следующих абстрактных утверждений (см. [19]).

Квадратными скобками в дальнейшем будем обозначать замыкание в топологии локальной сходимости пространства $C(\mathbb{R}_+; E_0)$.

Определение 9. Для множества $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$, ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$, назовем ω-*предельным* множеством следующее множество $\omega(P) = \bigcap_{t\geq 0}\left[\bigcup_{s\geq t} T(s)P\right]$.

Лемма 2. *Пусть существует поглощающее множество $P \subset \mathcal{H}^+$, относительно компактное в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$, ограниченное в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ и трансляционно инвариантное ($T(h)P \subset P (h \geq 0)$). Тогда $\omega(P)$ – минимальный траекторный аттрактор пространства траекторий $\mathcal{H}^+$.*

Лемма 3. *Пусть каждому λ из некоторого метрического пространства Λ поставлено в соответствие пространство траекторий*

$$\mathcal{H}_\lambda^+ \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E),$$

пусть $\mathcal{H}_\lambda^+$ имеет минимальный траекторный аттрактор вида $\mathcal{U}_\lambda = \omega(P_\lambda)$, где P_λ – трансляционно-инвариантное множество и $P_\lambda \subset \mathcal{H}_\lambda^+ \cap P$, где P – некоторое множество, относительно компактное в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ и ограниченное в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$; также пусть выполнено условие

$$\text{если}\quad \lambda_m \to \lambda_0, \quad v_m \in P_{\lambda_m}, \quad v_m \to v_0 \quad \text{в} \quad C(\mathbb{R}_+; E_0), \quad \text{то} \quad v_0 \in [P_{\lambda_0}]. \tag{3.3}$$

Тогда имеют место следующие предельные соотношения:

$$h_{C(\mathbb{R}_+;E_0)}(\mathcal{U}_{\lambda_m}, \mathcal{U}_{\lambda_0}) = \sup_{u\in\mathcal{U}_{\lambda_m}} \inf_{v\in\mathcal{U}_{\lambda_0}} \|u - v\|_{C(\mathbb{R}_+;E_0)} \to 0 \quad (\lambda_m \to \lambda_0), \tag{3.4}$$

$$h_{E_0}(\mathcal{A}_{\lambda_m}, \mathcal{A}_{\lambda_0}) = \sup_{u\in\mathcal{A}_{\lambda_m}} \inf_{v\in\mathcal{A}_{\lambda_0}} \|u - v\|_{E_0} \to 0 \quad (\lambda_m \to \lambda_0). \tag{3.5}$$

Доказательство приведенных выше утверждений проводится в несколько этапов в работе [19]. Для ясности отметим, что существование глобального аттрактора при доказательстве последней леммы следует из теоремы 2.

4. СЛАБАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АППРОКСИМАЦИЯ

Обозначим через $C_0^\infty(\Omega)^n$ пространство функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω. Пусть $\mathcal{V} = \{v(x) = (v_1,\ldots,v_n) \in C_0^\infty(\Omega)^n : \operatorname{div} v = 0\}$. Определим V^0 и V^1 как пополнение $\mathcal{V}$ по нормам $L_2(\Omega)^n$ и $H^1(\Omega)^n$ соответственно и положим $V^2 = H^2(\Omega)^n \cap V^1$.

Пусть $\pi : L_2(\Omega)^n \to V^0$ – проектор Лере. Напомним, что в силу разложения Вейля $L_2(\Omega)^n = V^0 \oplus \nabla H^1(\Omega)$. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{V}$ оператор $A = -\pi\Delta$, который продолжается в пространстве V^0 до замкнутого оператора и является самосопряженным положительным оператором с вполне непрерывным обратным (см., например, в [20], [21]). Область определения A совпадает с V^2. В силу теоремы Гильберта о спектральном разложении вполне непрерывных операторов, собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0.

Пусть $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots \leq \lambda_k \leq \ldots$ – собственные значения оператора A. Обозначим через E_∞ множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j, и определим пространство V^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, как пополнение E_∞ по норме

$$\|v\|_{V^\alpha} = \left(\sum_{k=1}^\infty \lambda_k^\alpha |v_k|^2\right)^{1/2}.$$

В [22], [23] показано, что указанные нормы в пространствах V^1, V^2, V^3 эквивалентны следующим нормам: $\|v\|_{V^1} = \|A^{1/2}v\|_{V^0}$, $\|v\|_{V^2} = \|Av\|_{V^0}$, $\|v\|_{V^3} = \|A^{3/2}v\|_{V^0}$.

Для определения слабого решения на отрезке введем следующие пространства:

$$W_1[0,T] = \{v : v \in L_\infty(0,T;V^2),\ v' \in L_\infty(0,T;V^1)\}, \quad v' = \frac{\partial v}{\partial t},$$
$$W_2[0,T] = \{v : v \in C([0,T],V^3),\ v' \in L_\infty(0,T;V^3)\}, \quad v' = \frac{\partial v}{\partial t},$$

с соответствующими нормами

$$\|v\|_{W_1[0,T]} = \|v\|_{L_\infty(0,T;V^2)} + \|v'\|_{L_\infty(0,T;V^1)}; \quad \|v\|_{W_2[0,T]} = \|v\|_{C([0,T],V^3)} + \|v'\|_{L_\infty(0,T;V^3)}.$$

Для определения слабого решения на полуоси $\mathbb{R}_+$ введем пространство $W_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, состоящее из функций v, определенных почти всюду на $\mathbb{R}_+$ и принимающих значения в V^2 таких, что ограничение v на любой отрезок $[0,T]$ принадлежит $W_1[0,T]$. Также введем пространство $W_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, состоящее из функций v класса $C(\mathbb{R}_+;V^3)$ таких, что ограничение v на любой отрезок $[0,T]$ принадлежит $W_2[0,T]$.

Будем предполагать, что $a \in V^2$, $f \in V^0$.

Определение 10. Слабым решением задачи (2.1)–(2.4) на отрезке $[0,T]$ будем называть функцию $v \in W_1[0,T]$ такую, что тождество

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\varphi dx + \nu\int_\Omega \nabla v : \nabla\varphi dx - \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \\ + \varkappa\int_\Omega \nabla\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) : \nabla\varphi dx + \varkappa\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega v_i \Delta v_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i} dx = \int_\Omega f\varphi dx \tag{4.1}$$

выполнено почти всюду на $(0,T)$ для любой функции $\varphi \in V^1$ и функция v удовлетворяет начальному условию:

$$v(0) = a. \tag{4.2}$$

Здесь символ : обозначает покомпонентное произведение матриц.

Определение 11. Слабым решением задачи (2.1)–(2.4) на полуоси $\mathbb{R}_+$ будем называть функцию $v \in W_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ такую, что при каждом $T > 0$ ограничение v на отрезок $[0,T]$ является слабым решением задачи (2.1)–(2.4) на отрезке $[0,T]$.

Введем следующие операторы:

$$A : V^1 \to V^{-1}, \quad \langle Au, \varphi\rangle = \int_\Omega \nabla u : \nabla\varphi dx \quad \forall u,\varphi \in V^1,$$

$$B_1 : L_4(\Omega)^n \to V^{-1}, \quad \langle B_1(u), \varphi\rangle = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega u_i u_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i} dx \quad \forall u \in L_4(\Omega)^n, \quad \varphi \in V^1,$$

$$B_2 : V^2 \to V^{-1}, \quad \langle B_2(u), \varphi\rangle = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega u_i \Delta u_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i} dx \quad \forall u \in V^2, \quad \varphi \in V^1,$$

$$J : V^1 \to V^{-1}, \quad \langle Ju, \varphi\rangle = \int_\Omega u\varphi dx \quad \forall u,\varphi \in V^1.$$

Тогда задача о поиске слабых решений начально-краевой задачи (2.1)–(2.4) эквивалентна задаче о поиске решения $v \in W_1[0,T]$ операторного уравнения

$$(J + \varkappa A)v' + \nu Av - B_1(v) + \varkappa B_2(v) = f, \tag{4.3}$$

удовлетворяющего начальному условию (4.2).

Рассмотрим следующее аппроксимационное операторное уравнение:

$$(J + \varkappa A + \varepsilon e^{-\alpha t} A^2)v' + \nu Av - B_1(v) + \varkappa B_2(v) = f, \tag{4.4}$$

где $\varepsilon \in (0,1]$, а оператор A^2 определяется следующим образом:

$$A^2 : V^3 \to V^{-1}, \quad \left\langle A^2 u, \varphi \right\rangle = -\int_\Omega \nabla(\Delta u) : \nabla\varphi dx \quad \forall u \in V^3, \quad \varphi \in V^1.$$

Операторное уравнение (4.4) будем рассматривать с начальным условием

$$v(0) = b, \quad b \in V^3. \tag{4.5}$$

Определение 12. Решением уравнения (4.4) на отрезке $[0,T]$ будем называть функцию $v \in W_2[0,T]$ такую, что уравнение (4.4) выполнено в $L_\infty(0,T;V^{-1})$. Решением (4.4) на полуоси $\mathbb{R}_+$ будем называть функцию $v \in W_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ такую, что при каждом $T > 0$ ограничение v на отрезок $[0,T]$ является решением уравнения (4.4) на этом отрезке.

5. СХОДИМОСТЬ АТТРАКТОРОВ АППРОКСИМАЦИЙ

В настоящем разделе вводятся пространства траекторий для исходной и аппроксимационной задач и показывается, что их траекторные и глобальные аттракторы сходятся к соответствующим аттракторам исходной задачи. При определении пространств траекторий используются пространства $E = V^2$ и $E_0 = V^1$.

Введем постоянную

$$\alpha = \frac{\nu\varkappa}{K_0^2K_1^2 + 2\varkappa K_1^2 + \varkappa^2} = \frac{\nu\varkappa}{K_2}, \quad K_2 = K_0^2K_1^2 + 2\varkappa K_1^2 + \varkappa^2.$$

Здесь ν и $\varkappa$ – параметры задачи (2.1)–(2.4), а K_0 и K_1 – постоянные из соответствующих непрерывным вложениям $V^1 \subset V^0$ и $V^2 \subset V^1$ неравенств:

$$\|u\|_{V^0} \le K_0\|u\|_{V^1}, \quad u \in V^1; \quad \|u\|_{V^1} \le K_1\|u\|_{V^2}, \quad u \in V^2.$$

Ниже приведем теоремы, необходимые нам в дальнейшем.

Теорема 3. *При любом $b \in V^3$ задача* (4.4), (4.5) *имеет единственное решение на полуоси $\mathbb{R}_+$, причем при почти всех $t \in [0,T]$ справедливо неравенство*

$$\begin{aligned}\varkappa\|v(t)\|_{V^2} + e^{-\alpha t/2}\sqrt{\varepsilon\varkappa}\|v(t)\|_{V^3} + \varepsilon e^{-\alpha t}\|v'(t)\|_{V^3} + \varkappa\|v'(t)\|_{V^1} \le \\ \le C_1\left(1 + e^{-\alpha t}\left(K_2\|v(0)\|_{V^2}^2 + \varepsilon\|v(0)\|_{V^2}^2 + \varepsilon\varkappa\|v(0)\|_{V^3}^2\right)\right),\end{aligned} \tag{5.1}$$

где константа

$$C_1 = 2\frac{K_1^2K_2^2 + \varkappa^2}{\alpha\nu\varkappa}\|f\|_{V^0}^2$$

не зависит от ε, t *и* v.

Доказательство существования решения задачи (4.4), (4.5) и оценки (5.1) может быть найдено в [13]. Доказательство единственности решения проводится стандартным образом. Предполагается наличие двух решений $u, v, u \ne v$ задачи (4.4), (4.5). Затем из равенства (4.4) для u вычитается равенство (4.4) для v и полученное равенство применяется к функции $(J + \varkappa A)w$, где $w = (u - v)$. Далее оцениваются сверху слагаемые с операторами B_1 и B_2 (здесь существенно используется принадлежность функций u и v пространству V^3), а остальные слагаемые преобразуются аналогично доказательству неравенства (5.1). К полученному в итоге неравенству применяется лемма Гроноулла–Беллмана, из которой следует, что $w \equiv 0$ и, следовательно, получаем $u = v$.

Доказательство следующих двух утверждений может быть найдено в [13].

Теорема 4. *При любом $a \in V^2$ задача* (4.3), (4.2) *имеет решение на полуоси $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющее при почти всех $t > 0$ неравенству*

$$\|v(t)\|_{V^2} + \|v'(t)\|_{V^1} \le C_2\left(1 + e^{-\alpha t}K_2\|v(0)\|_{V^2}^2\right).$$

Здесь $C_2 = \left(\frac{C_1}{\varkappa} + \frac{C_1C_4}{\varkappa} + C_1\right)$ – постоянная, не зависящая от v, t, ε.

Лемма 4. *Пусть* $\{v_m\}$ — *ограниченная последовательность в пространстве* $L_\infty(0,T;V^2)$, *а последовательность производных* $\{v'_m\}$ *ограничена в* $L_\infty(0,T;V^1)$. *Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. *Существует подпоследовательность* $\{v_{m_k}\}$, *сходящаяся к предельной функции* v_* *в пространстве* $C([0,T],V^1)$, *причем имеют место сходимости*

$$
\begin{aligned}
Jv'_{m_k} &\to Jv'_* \quad \textit{слабо в} \quad L_2(0,T;V^{-1}),\\
Av'_{m_k} &\to Av'_* \quad \textit{слабо в} \quad L_2(0,T;V^{-1}),\\
\nu Av_{m_k} &\to \nu Av_* \quad \textit{слабо в} \quad L_2(0,T;V^{-1}),\\
B_1(v_{m_k}) &\to B_1(v_*) \quad \textit{сильно в} \quad L_\infty(0,T;V^{-1}),\\
B_2(v_{m_k}) &\to B_2(v_*) \quad \textit{слабо в} \quad L_2(0,T;V^{-1}).
\end{aligned}
$$

2. *Пусть* $\varepsilon_m \to 0$ — *числовая последовательность, и последовательность* $\{\varepsilon_m v'_m\}$ *ограничена в норме пространства* $L_\infty(0,T,V^3)$, *то найдется подпоследовательность* $\{\varepsilon_{m_k} v'_{m_k}\}$ *такая, что* $\varepsilon_{m_k} e^{-\alpha t} A^2 v'_{m_k} \to 0$ *слабо в* $L_2(0,T;V^{-1})$.

Определение 13. В качестве пространства траекторий $\mathcal{H}_0^+$ уравнения (4.3) будем рассматривать множество решений этого уравнения, определенных на $\mathbb{R}_+$, существенно ограниченных со значениями в V^2 и удовлетворяющих оценке

$$
\|v(t)\|_{V^2} + \|v'(t)\|_{V^1} \le C_2\left(1 + e^{-\alpha t} K_2 \|v\|^2_{L_\infty(\mathbb{R}_+,V^2)}\right) \tag{5.2}
$$

при почти всех $t > 0$ или оценке

$$
\|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)} + \|v'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)} \le 2C_2(1 + K_2) = 2C_3. \tag{5.3}
$$

Рассмотрим множество

$$
P = \left\{v \in C(\mathbb{R}_+;V^1) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2) : v' \in L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1),\ \|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)} + \|v'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)} \le 2C_2(1 + K_2) = 2C_3\right\}.
$$

Исходя из определения множества P имеем, что оно трансляционно-инвариантно, ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)$ и относительно компактно в $C(\mathbb{R}_+;V^1)$ (относительная компактность получается, например, по теореме Обена–Дубинского–Симона [24]). Покажем, что P на самом деле компактно в $C(\mathbb{R}_+;V^1)$. Если последовательность $\{v_m\} \subset P$ сходится к v_0 в $C(\mathbb{R}_+;V^1)$, то в силу ограниченности этой последовательности в $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)$ она сходится к своей предельной функции $*$-слабо в $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)$. Аналогичным образом, последовательность производных $\{v'_m\}$ сходится к v'_0 в смысле распределений, а будучи ограниченной в $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)$, она сходится к v'_0 также $*$-слабо в $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)$, поэтому

$$
\|v_0\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)} + \|v'_0\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)} \le \varliminf_{m\to\infty} \|v_m\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)} + \varliminf_{m\to\infty} \|v'_m\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)} \le \varliminf_{m\to\infty}\left(\|v_m\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)} + \|v'_m\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)}\right) \le 2C_3.
$$

Таким образом, предельная функция v_0 принадлежит множеству P, следовательно, P компактно.

Пусть $P_0 = \mathcal{H}_0^+ \cap P$.

Лемма 5. *Пространство траекторий* $\mathcal{H}_0^+$ *имеет минимальный траекторный аттрактор* $\mathcal{U}_0 = \omega(P_0)$.

Доказательство. Покажем, что множество P_0 удовлетворяет условиям леммы 2. Поскольку множество P компактно в $C(\mathbb{R}_+;V^1)$ и ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)$, то получаем, что P_0 относительно компактно в $C(\mathbb{R}_+;V^1)$ и ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)$. Теперь покажем, что множество P_0 трансляционно-инвариантно. Пусть $v \in P_0$ и $h \ge 0$. Тогда функция v удовлетворяет уравнению (4.3). В силу автономности уравнения (4.3) функция $T(h)v$ является его решением и при этом удовлетворяет неравенству:

$$\|T(h)v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)} + \|T(h)v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)} \le \|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)} + \|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)} \le 2C_3.$$

Откуда получаем, что $T(h)v \in P_0$.

Осталось показать, что P_0 – поглощающее множество. Пусть $B \subset \mathcal{H}_0^+$ – некоторое множество, ограниченное в $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)$, и пусть $\|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)} \le R$ для любого $v \in B$. Выберем такое t_0, что $R^2 e^{-\alpha t_0} \le 1$. Возможны два случая.

1. Если $v \in B$ и $v \notin P_0$, то в силу определения множества P_0 получаем, что $v \notin P$, и из определения пространства траекторий $\mathcal{H}_0^+$ следует, что v удовлетворяет оценке (5.2). Отметим, что оценка (5.3) не может быть выполнена, так как она влечет принадлежность функции v множеству P. При $t \ge t_0$ имеем

$$\|v(t)\|_{V^2} + \|v'(t)\|_{V^1} \le C_2\left(1 + e^{-\alpha t} K_2 \|v\|^2_{L_\infty(\mathbb{R}_+,V^2)}\right) \le C_2(1 + K_2) = C_3. \tag{5.4}$$

Так как

$$\operatorname*{vrai\,max}_{t\in\mathbb{R}_+} a(t) + \operatorname*{vrai\,max}_{t\in\mathbb{R}_+} b(t) \le 2\operatorname*{vrai\,max}_{t\in\mathbb{R}_+}(a(t) + b(t)),$$

для любых $a(t), b(t) \ge 0$, то, переходя к vrai max по $t \in \mathbb{R}_+$ в неравенстве (5.4), получаем, что

$$\|T(t)v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)} + \|T(t)v'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)} \le \|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)} + \|v'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)} =$$
$$= \operatorname*{vrai\,max}_{t\in\mathbb{R}_+}\|v(t)\|_{V^2} + \operatorname*{vrai\,max}_{t\in\mathbb{R}_+}\|v'(t)\|_{V^1} \le 2\operatorname*{vrai\,max}_{t\in\mathbb{R}_+}\left(\|v(t)\|_{V^2} + \|v'(t)\|_{V^1}\right) \le 2C_2(1 + K_2) = 2C_3.$$

Это означает, что $T(t)v \in P$, а поскольку функция $T(t)v$ является решением уравнения (4.3), то $T(t)v \in \mathcal{H}_0^+$ и, таким образом, $T(t)v \in P_0$ при $t \ge 0$.

2. Если $v \in B$ и $v \in P_0$, то в силу трансляционной инвариантности множества P_0 имеем $T(t)v \in P_0$ при любом $t \ge 0$.

Таким образом, множество P_0 является поглощающим.

В итоге получаем, что множество P_0 удовлетворяет предположениям леммы 2. И, следовательно, $\mathcal{H}_0^+$ имеет минимальный траекторный аттрактор $\mathcal{U}_0 = \omega(P_0)$.

Перейдем к аттракторам аппроксимационного уравнения. Сначала введем пространство траекторий для аппроксимационного уравнения (4.4).

Определение 14. В качестве пространства траекторий $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ уравнения (4.4) будем рассматривать множество, состоящее из решений этого уравнения, определенных на $\mathbb{R}_+$, существенно ограниченных со значениями в V^2 и удовлетворяющих оценке

$$\varepsilon\|v(0)\|^2_{V^3} \le 1, \tag{5.5}$$

а также из функций вида $T(h)v$, где v – решение уравнения (4.4) на $\mathbb{R}_+$, $h \ge 0$, и $T(h)v$ удовлетворяет оценке

$$\|T(h)v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)} + \|T(h)v'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)} \le 2C_3.$$

Неравенство (5.5) оправдывается тем, что именно такие решения аппроксимационного уравнения были использованы при предельном переходе к решению исходного уравнения при доказательстве теоремы 4.

Отметим, что пространство траекторий определено корректно. В самом деле, поскольку решения аппроксимационного уравнения (4.4) принадлежат пространству $C(\mathbb{R}_+;V^3)$ и мы требуем принадлежность траекторий пространству $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)$, то включение

$$\mathcal{H}_\varepsilon^+ \subset C(\mathbb{R}_+;V^1) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)$$

имеет место. Далее, пространство $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ непусто, так как любая функция $b \in V^3$ такая, что $\varepsilon\|b\|_{V^3}^2 \leq 1$, служит началом новой траектории (в силу теоремы 3). Таким образом, пространство $\mathcal{H}_n^+$ не только определенно корректно, но и достаточно "богато" на траектории (содержит большое количество траекторий).

Рассмотрим множество $P_\varepsilon = \mathcal{H}_\varepsilon^+ \cap P$.

Лемма 6. *Пространство траекторий* $\mathcal{H}_\varepsilon^+(\varepsilon > 0)$ *имеет минимальный траекторный аттрактор* $\mathcal{U}_\varepsilon = \omega(P_\varepsilon)$.

Доказательство. Покажем, что множество P_ε удовлетворяет условиям леммы 2. Так как P_ε содержится в P, то P_ε относительно компактно в $C(\mathbb{R}_+;V^1)$ и ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)$. Любая траектория, принадлежащая P_ε, имеет вид $T(h)v$, где v – решение уравнения (4.4). Функция $T(s)T(h)v$ принадлежит P в силу трансляционной инвариантности этого множества. Следовательно, эта функция принадлежит $P_\varepsilon = \mathcal{H}_\varepsilon^+ \cap P$. Таким образом, множество P_ε трансляционно-инвариантно.

Теперь докажем, что множество P_ε является поглощающим. Возьмем множество $B \subset \mathcal{H}_\varepsilon^+$, ограниченное в $L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)$. Для определенности предположим, что $\|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)} \leq R$ для каждого $v \in B$. Выберем t_0 такое, что $R^2 e^{-\alpha t_0} \leq 1$. Рассмотрим произвольную траекторию $v \in B$. Исходя из определения $\mathcal{H}_\varepsilon^+$, существует два возможных варианта.

1. Функция v является решением уравнения (4.4) и удовлетворяет условию (5.5). По теореме 3 функция v удовлетворяет при почти всех $t > 0$ неравенству

$$\varkappa\|v(t)\|_{V^2} + \varkappa\|v'(t)\|_{V^1} \leq C_1\left(1 + e^{-\alpha t}\left(K_2\|v(0)\|_{V^2}^2 + \varepsilon\|v(0)\|_{V^2}^2 + \varepsilon\varkappa\|v(0)\|_{V^3}^2\right)\right).$$

Используя непрерывность вложения $V^3 \subset V^2$, преобразуем это неравенство следующим образом:

$$\varkappa\|v(t)\|_{V^2} + \varkappa\|v'(t)\|_{V^1} \leq C_1\left(1 + e^{-\alpha t}\left(K_2\|v(0)\|_{V^2}^2 + C_4\varepsilon\|v(0)\|_{V^3}^2 + \varepsilon\varkappa\|v(0)\|_{V^3}^2\right)\right).$$

Используя (5.5), получаем

$$\|v(t)\|_{V^2} + \|v'(t)\|_{V^1} \leq \frac{C_1}{\varkappa}\left(1 + e^{-\alpha t}\left(C_4 + \varkappa + K_2\|v(0)\|_{V^2}^2\right)\right) \leq$$
$$\leq \frac{C_1}{\varkappa}\left(1 + C_4 + \varkappa + e^{-\alpha t}K_2\|v(0)\|_{V^2}^2\right) \leq \left(\frac{C_1}{\varkappa} + \frac{C_1C_4}{\varkappa} + C_1\right)\left(1 + e^{-\alpha t}K_2\|v(0)\|_{V^2}^2\right) \leq C_2\left(1 + e^{-\alpha t}K_2\|v(0)\|_{V^2}^2\right).$$

Таким образом,

$$\|v(t)\|_{V^2} + \|v'(t)\|_{V^1} \leq C_2\left(1 + e^{-\alpha t}K_2\|v(0)\|_{V^2}^2\right).$$

Поэтому, для любого $t \geq t_0$ имеем

$$\|v(t)\|_{V^2} + \|v'(t)\|_{V^1} \leq C_2(1 + K_2) = C_3.$$

Откуда следует, что для любого $s \geq t_0$ справедливо

$$\|T(s)v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)} + \|T(s)v'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)} \leq 2C_3.$$

Это означает, что $T(s)v \in P$. Отсюда следует, что $T(s)v \in P_\varepsilon$ при $s \geq t_0$.

2. Если v – функция вида $T(s)w$, удовлетворяющая неравенству

$$\|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^2)} + \|v'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)} \leq 2C_3,$$

тогда $v \in P_\varepsilon$ и $T(s)v \in P_\varepsilon$ для любого $s \geq 0$, поскольку P_ε – трансляционно-инвариантное множество.

Из вышесказанного следует, что в любом из этих случаев $T(s)v \in P_\varepsilon$ при $s \geq t_0$, т.е. P_ε – поглощающее множество.

Таким образом получили, что все условия леммы 2 выполнены. Следовательно, траекторное пространство $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ имеет минимальный траекторный аттрактор $\mathcal{U}_\varepsilon = \omega(P_\varepsilon)$.

6. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ О СХОДИМОСТИ АТТРАКТОРОВ

Имеет место следующая теорема о сходимости аттракторов.

Теорема 5. *Минимальные траекторные аттракторы* $\mathcal{U}_\varepsilon$ *аппроксимационного уравнения* (4.4) *сходятся к минимальному траекторному аттрактору* $\mathcal{U}_0$ *пространства траекторий* $\mathcal{H}_0^+$ *уравнения* (4.3) *в смысле полуотклонения в пространстве* $C(\mathbb{R}_+;V^1)$, *т.е.*

$$\sup_{u\in\mathcal{U}_\varepsilon}\inf_{v\in\mathcal{U}_0}\|u-v\|_{C(\mathbb{R}_+;V^1)}\to 0\quad(\varepsilon\to 0).\tag{6.1}$$

Глобальные аттракторы $\mathcal{A}_\varepsilon$ *аппроксимационного уравнения* (4.4) *сходятся к глобальному аттрактору* $\mathcal{A}_0$ *пространства траекторий* $\mathcal{H}_0^+$ *уравнения* (4.3) *в смысле полуотклонения в пространстве* V^1, *т.е.*

$$\sup_{y\in\mathcal{A}_\varepsilon}\inf_{z\in\mathcal{A}_0}\|y-z\|_{V^1}\to 0\quad(\varepsilon\to 0).\tag{6.2}$$

Доказательство. Проверим выполнение условий леммы 3. Необходимо доказать, что если $\varepsilon_m\to 0$, $v_m\in P_{\varepsilon_m}$, $v_m\to v_0$ в $C(\mathbb{R}_+;V^1)$, то v_0 принадлежит замыканию множества P_0 в топологии пространства $C(\mathbb{R}_+;V^1)$.

В силу включений $P_{\varepsilon_m}\subset P$ последовательность $\{v_m\}$ содержится в множестве P, компактном в $C(\mathbb{R}_+;V^1)$. Следовательно, $v_0\in P$.

Покажем, что v_0 – решение уравнения (4.3) на $\mathbb{R}_+$. В общем случае функции v_m имеют вид $T(h_m)w_m$, где w_m – решение уравнения (4.4) на полуоси $\mathbb{R}_+$ (т.е. при почти всех $t\geq 0$ функция w_m удовлетворяет уравнению (4.4)). Для любого $t\geq 0$ имеем $t+h_m\geq 0$, поэтому при почти всех $t\geq 0$ имеет место равенство

$$(J+\varkappa A+\varepsilon_m e^{-\alpha(t+h_m)}A^2)w_m'(t+h_m)+\nu Aw_m(t+h_m)-B_1(w_m)(t+h_m)+\varkappa B_2(w_m)(t+h_m)=f.$$

По определению $w_m(t+h_m)=T(h_m)w_m(t)=v_m(t)$. Таким образом, получили, что

$$(J+\varkappa A+\varepsilon_m e^{-\alpha h_m}e^{-\alpha t}A^2)v_m'(t)+\nu Av_m(t)-B_1(v_m)(t)+\varkappa B_2(v_m)(t)=f,\tag{6.3}$$

при почти всех $t\in\mathbb{R}_+$.

Для того чтобы доказать, что v_0 – решение уравнения (4.3) на $\mathbb{R}_+$, достаточно установить, что Π_Tv_0 является решением уравнения (4.3) на отрезке $[0,T]$ при любом $T>0$.

Из сходимости последовательности $\{v_m\}$ к v_0 в $C(\mathbb{R}_+,V^1)$ следует сходимость $\{\Pi_Tv_m\}$ к Π_Tv_0 в $C([0,T],V^1)$. Так как v_m – решение уравнения (6.3) на $\mathbb{R}_+$, то Π_Tv_m удовлетворяет (6.3) на отрезке $[0,T]$.

Так как функция w_m – решение уравнения (4.4) на полуоси, то оно удовлетворяет оценке (5.1). Следовательно, последовательность $\varepsilon_m v_m'(t)=\varepsilon_m w_m'(t+h_m)$ ограничена в $L_\infty(0,T,V^3)$. Откуда получаем, что функции $\varepsilon_m\Pi_Tv_m'(t)$ ограничены в $L_\infty(0,T,V^3)$.

Далее, последовательность $\{\Pi_Tv_m\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^2)$, а $\{\Pi_Tv_m'\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;V^1)$. Поэтому по лемме 4, переходя к пределу в равенстве (6.3) при $\varepsilon\to 0$, получаем, что Π_Tv_0 удовлетворяет при почти всех $t\in[0,T]$ следующему равенству:

$$(J+\varkappa A)\Pi_Tv_0'+\nu A\Pi_Tv_0-B_1(\Pi_Tv_0)+\varkappa B_2(\Pi_Tv_0)=f.$$

В силу произвольности выбора отрезка $[0,T]$ функция v_0 является решением задачи (4.3), (4.2) на $\mathbb{R}_+$.

Поскольку $v_0 \in P$, то v_0 удовлетворяет неравенству (5.3), и поэтому $v_0 \in \mathcal{H}_0^+$. Получаем, что $v_0 \in \mathcal{H}_0^+ \cap P = P_0$. Поэтому условия леммы 3 выполнены, и имеют место требуемые сходимости (6.1) и (6.2). Это завершает доказательство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А.* О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье–Стокса // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1972. Т. 27. С. 91–115.
2. *Ладыженская О.А.* О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье–Стокса и других уравнений с частными производными // Успехи матем. наук. 1987. Т. 42. № 6(258). С. 25–60.
3. *Серегин Г.А.* О динамической системе, порожденной двумерными уравнениями движения среды Бингама // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1991. Т. 188. С. 128–142.
4. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Trajectory attractors for evolution equations // C. R. Acad. Sci. Paris. Serie I. 1995. V. 321. P. 1309–1314.
5. *Sell G.* Global attractors for the three-dimensional Navier–Stokes equations // J. Dyn. Diff. Eq. 1996. V. 8. № 1. P. 1–33.
6. *Vorotnikov D.A., Zvyagin V.G.* Trajectory and global attractors of the boundary value problem for autonomous motion equations of viscoelastic medium // J. Math. Fluid Mech. 2008. V. 10. P. 19–44.
7. *Zvyagin V., Vorotnikov D.* Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodynamics. Berlin: Walter de Gruyter, 2008. 248 p.
8. *Звягин В.Г., Кондратьев С.К.* Аттракторы уравнений неньютоновской гидродинамики // Успехи матем. наук. 2014. Т. 69. № 5(419). С. 81–156.
9. *Павловский В.А.* К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200. № 4. С. 809–812.
10. *Амфилохиев В.Б., Войткунский Я.И., Мазаева Н.П., Ходорковский Я.С.* Течения полимерных растворов при наличии конвективных ускорений // Тр. Ленинградского ордена Ленина кораблестроительного института. 1975. Т. 96. С. 3–9.
11. *Амфилохиев В.Б., Павловский В.А.* Экспериментальные данные о ламинарно-турбулентном переходе при течении полимерных растворов в трубах // Тр. Ленинградского ордена Ленина кораблестроительного института. 1976. Т. 104. С. 3–5.
12. *Турбин М.В., Устюжанинова А.С.* Теорема существования слабого решения начально-краевой задачи для системы уравнений, описывающей движение слабых водных растворов полимеров // Известия вузов. Математика. 2019. № 8. С. 62–78.
13. *Устюжанинова А.С., Турбин М.В.* Траекторные и глобальные аттракторы для модифицированной модели Кельвина–Фойгта // Сиб. ж. индустриальной матем. 2021. Т. 24. № 1. С. 126–138.
14. *Плотников П.И., Турбин М.В., Устюжанинова А.С.* Теорема существования слабого решения задачи оптимального управления с обратной связью для модифицированной модели Кельвина–Фойгта слабо концентрированных водных растворов полимеров // Докл. АН. 2019. Т. 488. № 2. С. 133–136.
15. *Ustiuzhaninova A., Turbin M.* Feedback Control Problem for Modified Kelvin-Voigt Model // J. of Dynamical and Control Systems. 2021.
https://doi.org/10.1007/s10883-021-09539-0
16. *Осколков А.П.* О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1973. Т. 38. С. 98–136.
17. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.
18. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408 с.
19. *Zvyagin V.G., Kondratyev S.K.* Approximating topological approach to the existence of attractors in fluid mechanics // J. Fixed Point Theory Appl. 2013. V. 13. P. 359–395.
20. *Солонников В.А.* Оценки тензоров Грина для некоторых граничных задач // Докл. АН СССР. 1960. Т. 130. № 5. С. 988–991.
21. *Ворович И.И., Юдович В.И.* Стационарные течения вязкой несжимаемой жидкости // Матем. сборник. 1961. Т. 53. № 4. С. 393–428.
22. *Звягин В.Г., Турбин М.В.* Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред. М.: КРАСАНД, 2012. 416 с.
23. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Науч. книга, 1999. 352 с.
24. *Simon J.* Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$ // Ann. Mat. Pura Appl. 1987. № 146. P. 65–96.