

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.658

# ПРЯМО-ДВОЙСТВЕННЫЙ МЕТОД НЬЮТОНА С НАИСКОРЕЙШИМ СПУСКОМ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. НЬЮТОНОВСКАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ<sup>1)</sup>

© 2022 г. В. Г. Жадан<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> 117333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия

<sup>2</sup> 141700 Долгопрудный, М. о., Институтский пер., 9, МФТИ, Россия

e-mail: zhadan@ccas.ru

Поступила в редакцию 02.04.2021 г.

Переработанный вариант 02.04.2021 г.

Принята к публикации 12.10.2021 г.

Рассматривается линейная задача полуопределенного программирования. Для ее решения предлагается допустимый прямо-двойственный метод, основанный на решении методом Ньютона системы уравнений, описывающих условия оптимальности в задаче. Обсуждается вопрос, как строить ньютоновские направления перемещения в случае принадлежности текущих точек итерационного процесса границам допустимых множеств. При этом существенным образом используется разбиение пространства симметричных матриц на подпространства. Библ. 14. Фиг. 1.

**Ключевые слова:** линейная задача полуопределенного программирования, условия оптимальности, прямо-двойственный метод Ньютона, наискорейший спуск.

**DOI:** 10.31857/S0044466922020132

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Линейная задача полуопределенного программирования в стандартной постановке заключается в минимизации на конусе симметричных положительно полуопределенных матриц линейной целевой функции при линейных ограничениях типа равенства. Численным методам решения таких задач уделяется большое внимание [1]–[7], причем наиболее популярными из них являются методы внутренней точки, главным образом, прямо-двойственные методы центрального пути [8]. При построении таких методов существенным образом используется метод Ньютона, который применяется для решения системы уравнений, описывающих условия оптимальности в задаче.

В настоящей работе также строится прямо-двойственный метод, однако в отличие от упомянутых методов в нем используется наискорейший спуск при выборе шага перемещения и допускается выход на границы допустимых множеств. Это приводит к определенной специфике в вычислении ньютоновских направлений. Чтобы найти эти направления, предлагается в пространстве симметричных матриц выделить подпространство симметричных блочно-диагональных матриц, состоящее из четырех блоков, и определять направления перемещений отдельно в каждом из этих блоков. Размеры блоков зависят от рангов прямой переменной и слабой двойственной переменной, а также от симметризованного произведения этих матриц. Данный прием применялся ранее для решения задач линейного программирования [9], [10].

При разработке предложенного метода используются условия оптимальности, причем условие комплементарности берется в виде равенства нулевой матрице симметризованного произведения прямой переменной со слабой двойственной переменной. Главная идея метода заключалась в том, чтобы постепенно от итерации к итерации добиваться выполнения условия комплементарности. Делается это за счет уменьшения или по крайней мере не увеличения ранга симметризованного произведения. Это приводит к важному отличию предложенного метода от допустимого прямо-двойственного метода внутренней точки, например, [5]. Данное отличие состоит в том, что в ходе вычислений при приближении к решению задач полуопределенного программирования уменьшаются размерности вспомогательных задач, которые требуется решать для определения ньютоновских направлений.

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект 21-71-30005).

Работа состоит из четырех разделов. В разд. 1 дается постановка задачи и приводятся вспомогательные сведения из теории полуопределенного программирования. В разд. 2 рассматривается симметризованное произведение прямой и слабой двойственной переменных и исследуется вопрос об образе этого произведения и его нуль-пространстве. Выясняется, каким образом образ и нуль-пространство симметризованного произведения связаны с образами и нуль-пространствами прямой и слабой двойственной переменных. Здесь даются также некоторые дополнительные определения, в частности, вводится понятие регулярной согласованной пары прямой и слабой двойственной переменных. В таких парах возможно разбиение пространства симметричных матриц на четыре ортогональных между собой подпространства. В разд. 3 показывается, каким образом при ряде дополнительных предположений о прямых и слабых двойственных переменных можно представить эти переменные в виде симметричных блочно-диагональных матриц. Четвертый раздел посвящен построению ньютоновской системы для определения ньютоновских направлений. Подход к решению этой системы дается в отдельной статье, где приводятся точные формулы, позволяющие вычислить данные направления.

Ниже через  $0_k$  обозначается нулевой  $k$ -мерный вектор, через  $0_{kl}$  — нулевая матрица размером  $k \times l$ , через  $I_k$  — единичная матрица порядка  $k$ . Знак точки с запятой, разделяющий векторы или компоненты векторов, показывает, что эти векторы или компоненты помещаются одни под другими. Остальные обозначения вводятся по ходу изложения.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть  $\mathbb{S}^n$  обозначает пространство симметричных матриц порядка  $n$ . Пусть, кроме того,  $\mathbb{S}_+^n$  и  $\mathbb{S}_{++}^n$  — подмножества из  $\mathbb{S}^n$ , состоящие соответственно из положительно полуопределенных и положительно определенных матриц. Множество  $\mathbb{S}_+^n$  является конусом в  $\mathbb{S}^n$ , множество  $\mathbb{S}_{++}^n$  является его внутренностью. Для указания на то, что матрица  $M \in \mathbb{S}^n$  положительно полуопределена (положительно определена), будем пользоваться также неравенством  $M \succeq 0$  ( $M \succ 0$ ). Конус  $\mathbb{S}_+^n$  не является полиэдральным, его размерность совпадает с размерностью пространства  $\mathbb{S}^n$  и равняется так называемому “треугольному” числу  $n^\Delta = \frac{1}{2}n(n+1)$ .

Скалярное (внутреннее) произведение между двумя квадратными матрицами  $L$  и  $M$  порядка  $n$  определяется как след матрицы  $L^T M$  и обозначается в виде

$$L \bullet M = \text{tr}(L^T M) = \sum_{i,j=1}^n l_{ij} m_{ij},$$

где  $l_{ij}$  и  $m_{ij}$  суть  $(ij)$ -е элементы соответственно матриц  $L$  и  $M$ . Если  $L$  и  $M$  — две положительно полуопределенные матрицы из  $\mathbb{S}^n$ , то  $L \bullet M \geq 0$  и  $L \bullet M = 0$  в том и только в том случае, когда  $LM = ML = 0_{nn}$ . Более того, согласно теореме Фейера (о следе), матрица  $L \in \mathbb{S}^n$  положительно полуопределена тогда и только тогда, когда  $L \bullet M \geq 0$  для всех  $M \succeq 0$ , т.е. конус  $\mathbb{S}_+^n$  является самосопряженным.

Рассмотрим задачу полуопределенного программирования:

$$\begin{aligned} \min C \bullet X, \\ A_i \bullet X = b^i, \quad i \in J^m, \\ X \succeq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и ниже  $J^k$  — множество индексов от 1 до  $k$ , матрицы  $C$ ,  $X$  и  $A_i$ ,  $i \in J^m$ , принадлежат пространству  $\mathbb{S}^n$ .

Двойственной к (1) является задача

$$\begin{aligned} \max \langle b, u \rangle, \\ \sum_{i=1}^m u^i A_i + Y = C, \\ Y \succeq 0, \end{aligned} \quad (2)$$

в которой  $b = (b^1; \dots; b^m) \in \mathbb{R}^m$ ,  $Y \in \mathbb{S}^n$ . Для слабой двойственной переменной  $Y$  в дальнейшем используется также обозначение  $Y(u) = C - \sum_{i=1}^m u^i A_i$ .

Предполагается, что задачи (1) и (2) имеют решения и что матрицы  $A_i$ ,  $i \in J^m$ , линейно независимы. Считаем также, что  $C$  — ненулевая матрица, и  $b$  — ненулевой вектор.

Обозначим допустимые множества в прямой и двойственной задачах соответственно через  $\mathcal{F}_P$  и  $\mathcal{F}_D$ , т.е.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_P &= \{X \in \mathbb{S}_+^n : A_i \bullet X = b^i, i \in J^m\}, \\ \mathcal{F}_D &= \{[u, Y] \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}_+^n : Y = Y(u)\}. \end{aligned}$$

Через  $\mathcal{F}_{D,u}$  и  $\mathcal{F}_{D,Y}$  обозначим также проекции множества  $\mathcal{F}_D$  на пространство  $\mathbb{R}^m$  и конус  $\mathbb{S}_+^n$  соответственно:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{D,u} &= \{u \in \mathbb{R}^m : [u, Y] \in \mathcal{F}_D \text{ для некоторого } Y \in \mathbb{S}_+^n\}, \\ \mathcal{F}_{D,Y} &= \{Y \in \mathbb{S}_+^n : [u, Y] \in \mathcal{F}_D \text{ для некоторого } u \in \mathbb{R}^m\}. \end{aligned}$$

Для любых  $X \in \mathcal{F}_P$  и  $u \in \mathcal{F}_{D,u}$  выполняется соотношение *слабой двойственности*:  $C \bullet X \geq \langle b, u \rangle$ .

Введем ряд определений, которые потребуются в дальнейшем.

**Определение 1.** Пара  $[X, Y] \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$  называется *внутренней*, если  $X \succeq 0$ ,  $Y \succeq 0$ , и *строго внутренней*, если  $X \succ 0$ ,  $Y \succ 0$ .

**Определение 2.** Пара  $[X, Y] \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$  называется *допустимой*, если  $X \in \mathcal{F}_P$  и  $Y \in \mathcal{F}_{D,Y}$ .

**Определение 3.** Пара  $[X, Y] \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$  называется *комплементарной*, если  $X \bullet Y = 0$ .

Всякая допустимая пара  $[X, Y]$  есть внутренняя пара. Допустимую пару  $[X, Y]$  назовем *оптимальной*, если  $X$  и  $Y$  (вместе с некоторым  $u \in \mathbb{R}^m$ ) являются решениями соответственно задач (1) и (2). Пара  $[X, Y]$  оптимальная, если она допустимая и комплементарная.

Возьмем произвольную внутреннюю пару  $[X, Y]$ . Так как матрицы  $X$  и  $Y$  симметричные, то для них имеют место разложения:

$$X = QD(\eta)Q^T, \quad Y = HD(\theta)H^T, \quad (3)$$

где  $Q$  и  $H$  — ортогональные матрицы,  $D(\eta)$  и  $D(\theta)$  — диагональные матрицы с векторами собственных значений  $\eta[\eta^1; \dots; \eta^n]$  и  $\theta = [\theta^1; \dots; \theta^n]$  на диагоналях.

Пусть ранг матрицы  $X$  равен  $0 < r_X < n$ . Тогда матрицу  $Q$  и вектор  $\eta$  можно разбить на две части. Не умаляя общности, считаем, что

$$Q = [Q_B, Q_N], \quad \eta = [\eta_B; \eta_N], \quad \eta_B > 0_{r_X}, \quad \eta_N = 0_{d_X}, \quad d_X = n - r_X, \quad (4)$$

причем матрица  $Q_B$  имеет размер  $n \times r_X$ , матрица  $Q_N$  — размер  $n \times d_X$ . Аналогично, если матрица  $Y$  имеет ранг  $0 < r_Y < n$ , то  $H$  и  $\theta$  можно представить соответственно в виде:

$$H = [H_B, H_N], \quad \theta = [\theta_B; \theta_N], \quad \theta_B = 0_{d_Y}, \quad \theta_N > 0_{r_Y}, \quad d_Y = n - r_Y, \quad (5)$$

где  $H_B$  есть  $(n \times d_Y)$ -матрица,  $H_N$  есть  $(n \times r_Y)$ -матрица.

Ниже для произвольной матрицы  $M$  через  $\mathcal{R}(M)$  обозначается ее образ, через  $\mathcal{N}(M)$  — ее ядро (нуль-пространство). Тогда  $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(Q_B)$ ,  $\mathcal{N}(X) = \mathcal{R}(Q_N)$ . Для образа и ядра  $Y$  имеем соответственно:  $\mathcal{R}(Y) = \mathcal{R}(H_N)$ ,  $\mathcal{N}(Y) = \mathcal{R}(H_B)$ .

Проведем дальнейшее разбиение матриц  $Q$  и  $H$  на подматрицы. Данное разбиение зависит от пересечений подпространств  $\mathcal{R}(Q_B)$ ,  $\mathcal{R}(Q_N)$ ,  $\mathcal{R}(H_B)$  и  $\mathcal{R}(H_N)$  друг с другом, при этом некоторые из них могут оказаться пустыми.

В матрице  $Q_B$  выделяем две подматрицы. Подматрица  $Q_{BB}$  состоит из тех столбцов  $q_i$  из  $Q_B$ , которые одновременно принадлежат  $\mathcal{R}(H_B)$ . Оставшиеся столбцы матрицы  $Q_B$  помещаем в матрицу  $Q_{BN}$ . Точно так же поступаем с матрицей  $H_N$ . В ней выделяем подматрицу  $H_{NN}$ , содержащую те и только те столбцы  $h_j$  из  $H_N$ , которые одновременно принадлежат подпространству  $\mathcal{R}(Q_N)$ . Столбцы  $h_j$ , не обладающие этим свойством, составляют подматрицу  $H_{NB}$  матрицы  $H_N$ .

Обратимся теперь к подматрицам  $Q_N$  и  $H_B$  и также каждую из них разобьем на две подматрицы (опять отметим, что некоторые из подматриц могут быть пустыми). К подматрице  $Q_{NN}$  отнесем те столбцы  $q_i$  матрицы  $Q_N$ , которые принадлежат подпространству  $\mathcal{R}(H_N)$ , а остальные столбцы поместим в матрицу  $Q_{NB}$ . Аналогично, если столбец  $h_j$  матрицы  $H_B$  принадлежит подпространству  $\mathcal{R}(Q_B)$ , то его помещаем в подматрицу  $H_{BB}$ , иначе — в подматрицу  $H_{BN}$ . Заметим, что при таком разбиении матриц  $Q_N$  и  $H_B$  не оказывается столбцов матриц  $H_N$  и  $Q_B$ , которые принадлежат соответственно подпространствам  $\mathcal{R}(Q_{NB})$  и  $\mathcal{R}(H_{BN})$ . В самом деле, если, например, вектор  $h_j$ , являющийся столбцом матрицы  $H_N$ , оказался в  $\mathcal{R}(Q_{NB})$ , то он принадлежал бы некоторому подпространству пространства  $\mathcal{R}(Q_{NB})$ . В этом случае можно так повернуть векторы из  $Q_{NB}$ , образующие базис в указанном подпространстве, чтобы они, оставаясь в нем, были ортогональными друг к другу, и чтобы один из векторов совпадал с  $h_j$ . По построению, мы должны такой вектор  $h_j$  поместить в качестве столбца в матрицу  $Q_{NN}$ .

Отметим, что столбцы матриц  $Q_N$  и  $H_B$  можно выбирать достаточно произвольно, важно только, чтобы они образовывали базис в соответственно подпространствах  $\mathcal{N}(X)$  и  $\mathcal{N}(Y)$ . Если какие-то столбцы  $q_i$  матрицы  $Q_B$  принадлежат подпространству  $\mathcal{R}(H_B)$  (столбцы матрицы  $Q_{BB}$ ), то, поскольку все они ортогональны между собой, их можно включить в матрицу  $H_B$ , доопределив остальные столбцы  $H_B$  так, чтобы в совокупности все они образовывали ортогональный базис в  $\mathcal{N}(Y)$ . Соответствующим образом поступим и с матрицей  $Q_N$ , т.е. считаем, что столбцы матрицы  $H_{NN}$  являются одновременно и столбцами матрицы  $Q_{NN}$ . Таким образом, получаем фактически:  $\mathcal{R}(Q_{BB}) = \mathcal{R}(H_{BB})$  и  $\mathcal{R}(Q_{NN}) = \mathcal{R}(H_{NN})$ , что с учетом вышесказанного означает:

$$Q_{BB} = H_{BB}, \quad Q_{NN} = H_{NN}. \quad (6)$$

В дальнейшем, не ограничивая общности, считаем для определенности, что

$$Q_B = [Q_{BB} Q_{BN}], \quad Q_N = [Q_{NB} Q_{NN}]. \quad (7)$$

Точно так же поступим и с матрицами  $H_B$  и  $H_N$ , разбив их на подматрицы:

$$H_B = [H_{BB} H_{BN}], \quad H_N = [H_{NB} H_{NN}]. \quad (8)$$

Разбиениям матриц  $Q_B$  и  $H_N$  соответствуют разбиения векторов собственных значений  $\eta_B$  и  $\theta_N$ , а именно:  $\eta_B[\eta_{BB}; \eta_{BN}]$ ,  $\theta_N = [\theta_{NB}; \theta_{NN}]$ .

По своему построению все четыре подпространства  $\mathcal{R}(Q_{BB})$ ,  $\mathcal{R}(Q_{BN})$ ,  $\mathcal{R}(Q_{NB})$  и  $\mathcal{R}(Q_{NN})$  ортогональны друг другу. Аналогично, подпространства  $\mathcal{R}(H_{BB})$ ,  $\mathcal{R}(H_{BN})$ ,  $\mathcal{R}(H_{NB})$  и  $\mathcal{R}(H_{NN})$  также ортогональны друг другу.

**Утверждение 1.** Пусть допустимая пара  $[X, Y]$  такова, что

$$\dim \mathcal{R}(Q_{BB}) + \dim \mathcal{R}(H_{NN}) = n. \quad (9)$$

Тогда пара  $[X, Y]$  оптимальная.

**Доказательство.** В силу (9) ортогональные друг другу подпространства  $\mathcal{R}(Q_{BB})$  и  $\mathcal{R}(H_{NN})$  в совокупности составляют все пространство  $\mathbb{R}^n$ . Пара  $[X, Y]$  является допустимой и комплементарной. Такая пара, как уже отмечалось, является оптимальной.

При выполнении равенства (9) подпространства  $\mathcal{R}(Q_{BN})$ ,  $\mathcal{R}(Q_{NB})$  и  $\mathcal{R}(H_{BN})$ ,  $\mathcal{R}(H_{NB})$  оказываются пустыми. Таким образом, если будет найдена допустимая пара  $[X, Y]$ , в которой ранг матрицы  $[Q_{BB}, Q_{NN}]$  или, что одно и то же, ранг матрицы  $[H_{BB}, H_{NN}]$  равняется  $n$ , то данная пара будет оптимальной.

## 2. СИММЕТРИЗОВАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ МАТРИЦ $X$ И $Y$

Ниже помимо матриц  $X \in \mathbb{S}^n$  и  $Y \in \mathbb{S}^n$  нам потребуется их симметризованное произведение  $X \circ Y$ , определяемое как

$$X \circ Y = (XY + YX)/2. \quad (10)$$

Данное произведение обладает следующим свойством.

**Утверждение 2.** Внутренняя пара матриц  $[X, Y]$  удовлетворяет равенству

$$X \circ Y = 0_{nn} \quad (11)$$

в том и только том случае, когда  $XY = YX = 0_{nn}$ .

Таким образом, если выполнено равенство (11), то матрицы  $X$  и  $Y$  коммутируют между собой. Однако в общем случае, когда для внутренней пары  $[X, Y]$  равенство (11) нарушено, и матрицы  $X$  и  $Y$  не коммутируют между собой, матрица  $X \circ Y$  не обязательно является знакоопределенной.

**Определение 4.** Внутренняя пара  $[X, Y]$  называется *согласованной*, если

$$X \circ Y \succeq 0.$$

Строго внутренняя неоптимальная пара  $[X, Y]$  такая, что  $XY = \mu I_n$ , где  $\mu > 0$ , будет согласованной, причем  $X \circ Y \succ 0$ . Оптимальная пара  $[X, Y]$  также является согласованной.

Так как  $X \circ Y$  — симметричная матрица, то для нее справедливо разложение

$$X \circ Y = U D(\lambda) U^T, \quad (12)$$

где  $U$  — ортогональная матрица,  $\lambda$  — вектор собственных значений  $X \circ Y$ . Пусть ранг матрицы  $X \circ Y$  равняется  $r_{X \circ Y}$  и пусть  $U = [U_P, U_O]$ , где  $U_P$  — подматрица матрицы  $U$ , состоящая из ее первых  $r_{X \circ Y}$  столбцов. Считаем, что столбцы  $U_P$  являются собственными векторами матрицы  $X \circ Y$ , соответствующие ее ненулевым собственным значениям. Считаем также, что эти ненулевые собственные значения собраны в вектор  $\lambda_P$  размерности  $r_{X \circ Y}$ , который является первым подвектором вектора  $\lambda = [\lambda_P; \lambda_O]$ . Второй подвектор  $\lambda_O$ , имеющий размерность  $d_{X \circ Y} = n - r_{X \circ Y}$ , нулевой. Столбцы матрицы  $U_O$  принадлежат нуль-пространству матрицы  $X \circ Y$ , размерность которого равна  $d_{X \circ Y}$ .

Рассмотрим подпространства  $\mathcal{R}(X \circ Y)$  и  $\mathcal{N}(X \circ Y)$ . Матрица  $X \circ Y$  симметричная, поэтому подпространство  $\mathcal{N}(X \circ Y)$  ортогонально  $\mathcal{R}(X \circ Y)$ . Выясним, каким образом данные подпространства  $\mathcal{R}(X \circ Y)$  и  $\mathcal{N}(X \circ Y)$  связаны с подпространствами, определяемыми подматрицами матриц  $Q$  и  $H$  из (6)–(8). Имеет место следующее утверждение.

**Лемма 1.** Матрицы  $XY$  и  $YX$  могут быть представлены соответственно в виде

$$XY = Q_{BN} D(\eta_{BN}) Q_{BN}^T H_{NB} D(\theta_{NB}) H_{NB}^T, \quad (13)$$

$$YX = H_{NB} D(\theta_{NB}) H_{NB}^T Q_{BN} D(\eta_{BN}) Q_{BN}^T, \quad (14)$$

если, разумеется,  $Q_{BN}$  и  $H_{NB}$  — непустые матрицы.

**Доказательство.** Рассмотрим сначала матрицу  $XY$ , имеющую согласно разложениям (3) и разбиениям (4), (5) представление

$$XY = Q_B D(\eta_B) Q_B^T H_N D(\theta_N) H_N^T. \quad (15)$$

Отсюда следует, что образ матрицы  $XY$  принадлежит образу матрицы  $Q_B$ . Кроме того, если найдется столбец  $q_i$  матрицы  $Q_B$  такой, что  $H_N^T q_i = 0$ , то появляется нулевая строка в матрице  $D(\eta_B)Q_B^T H_N$  и, значит, столбец  $q_i$  не может принадлежать образу матрицы  $XY$ , его можно удалить. Но равенство  $H_N^T q_i = 0$  указывает на то, что столбец  $q_i$  принадлежит  $\mathcal{N}(Y) = \mathcal{R}(H_B)$ . Такой столбец, как уже говорилось, мы помещаем в матрицу  $Q_{BB}$ . Таким образом, вместо (15) можем записать следующее:

$$XY = Q_{BN} D(\eta_{BN}) Q_{BN}^T H_N D(\theta_N) H_N^T.$$

Далее, если обратиться к матрице  $H_N$ , то для ее столбцов  $h_j$ , входящих в подматрицу  $H_{NN}$ , выполняется  $Q_B^T h_j = 0$ . Тем более выполняется равенство  $Q_{BN}^T h_j = 0$ . Поэтому в матрице  $H_N$  можно оставить только столбцы, входящие в подматрицу  $H_{NB}$ , а остальные столбцы (входящие в подматрицу  $H_{NN}$ ) могут быть удалены. В результате приходим к представлению (13) матрицы  $XY$ .

Справедливость представления (14) матрицы  $YX$  обосновывается аналогичным образом. Лемма доказана.

Ниже для сокращения записи через  $\mathcal{R}^I(\cdot)$  обозначается пересечение образов нескольких матриц, которые перечислены в скобках. Через  $\mathcal{R}^S(\cdot)$  обозначается их сумма (по Минковскому), например,

$$\mathcal{R}^I(X, Y, Z) = \mathcal{R}(X) \cap \mathcal{R}(Y) \cap \mathcal{R}(Z), \quad \mathcal{R}^S(X, Y, Z) = \mathcal{R}(X) + \mathcal{R}(Y) + \mathcal{R}(Z).$$

Оценим ранг матрицы  $X \circ Y$ . Имеем  $\mathcal{R}(X \circ Y) \subseteq \mathcal{R}^S(XY, YX)$ . Но  $YX = (XY)^T$ , поэтому

$$\mathcal{R}(X \circ Y) \subseteq \mathcal{R}(XY) + \mathcal{N}^\perp(XY),$$

где  $\mathcal{N}^\perp(XY)$  — ортогональное дополнение к  $\mathcal{N}(XY)$ , или, что то же самое,

$$\mathcal{R}(X \circ Y) \subseteq \mathcal{R}(YX) + \mathcal{N}^\perp(YX).$$

Более точное включение для  $\mathcal{R}(X \circ Y)$  можно получить с помощью леммы 1.

**Утверждение 3.** Для образа  $\mathcal{R}(X \circ Y)$  матрицы  $X \circ Y$  имеет место включение

$$\mathcal{R}(X \circ Y) \subseteq \mathcal{R}^S(Q_{BN}, H_{NB}), \quad (16)$$

а для его размерности, равной рангу  $r_{X \circ Y}$  матрицы  $X \circ Y$ , — неравенство

$$r_{X \circ Y} \leq 2 \min\{r_{Q_{BN}}, r_{H_{NB}}\}, \quad (17)$$

где  $r_{Q_{BN}}$  и  $r_{H_{NB}}$  — ранги матриц  $Q_{BN}$  и  $H_{NB}$  соответственно.

**Доказательство.** Как следует из определения (10) симметризованного произведения, образ матрицы  $X \circ Y$  принадлежит сумме образов матриц  $XY$  и  $YX$  соответственно. Но согласно утверждению леммы 1 имеем  $\mathcal{R}(XY) \subseteq \mathcal{R}(Q_{BN})$ ,  $\mathcal{R}(YX) \subseteq \mathcal{R}(H_{NB})$ . Отсюда приходим к включению (16).

Кроме того, для ранга матрицы  $XY$  получаем оценку сверху

$$r_{XY} \leq \min\{r_{Q_{BN}}, r_{H_{NB}}\}. \quad (18)$$

Матрица  $YX$  является транспонированной к матрице  $XY$ . Поэтому ранг  $YX$  совпадает с рангом матрицы  $XY$  и для него также справедлива оценка (18). Неравенство (17) следует из (18) и неравенства для ранга суммы двух матриц. Утверждение доказано.

**Следствие 1.** Для матрицы  $U_P$  имеет место разложение

$$U_P = [Q_{BN}, H_{NB}] W_P,$$

где  $W_P$  — матрица полного ранга размером  $(r_{Q_{BN}} + r_{H_{NB}}) \times r_{X \circ Y}$ .

В случае, когда подпространства  $\mathcal{R}(Q_{NB})$  или  $\mathcal{R}(H_{BN})$  непустые, можно уточнить оценку сверху (17) на ранг матрицы  $X \circ Y$ .

**Утверждение 4.** Пусть

$$\dim \mathcal{R}^I(Q_N, H_B) > 0. \quad (19)$$

Тогда обязательно  $\dim \mathcal{R}(Q_{NB}) > 0$ ,  $\dim \mathcal{R}(H_{BN}) > 0$  и

$$\mathcal{R}^I(Q_N, H_B) = \mathcal{R}^I(Q_{NB}, H_{BN}). \quad (20)$$

**Доказательство.** Согласно неравенству (19) оба подпространства  $\mathcal{R}(Q_N)$  и  $\mathcal{R}(H_B)$  непустые и отличны от нулевых. Возьмем произвольный ненулевой вектор  $z \in \mathbb{R}^n$  такой, что  $z \in \mathcal{R}^I(Q_N, H_B)$ . Покажем, что в этом случае обязательно  $z \in \mathcal{R}(Q_{NB})$ . Отсюда, в частности, следует ненулевая размерность пространства  $\mathcal{R}(Q_{NB})$ .

Так как  $z \in \mathcal{R}(Q_N)$  и  $\mathcal{R}(Q_N) = \mathcal{R}^S(Q_{NB}, Q_{NN})$ , то для  $z$  справедливо разложение  $z = z_1 + z_2$ , где  $z_1 \in \mathcal{R}(Q_{NB})$ ,  $z_2 \in \mathcal{R}(Q_{NN})$ . Оба подпространства  $\mathcal{R}(Q_{NB})$  и  $\mathcal{R}(Q_{NN})$  ортогональны друг другу. Считаем для общности, что второе подпространство  $\mathcal{R}(Q_{NN})$  непустое и  $z_2 \neq 0_n$ .

Но одновременно  $z \in \mathcal{R}(H_B) = \mathcal{R}^S(H_{BB}, H_{BN})$ , причем оба подпространства  $\mathcal{R}(H_{BB})$  и  $\mathcal{R}(H_{BN})$  также ортогональны друг другу. Поэтому для  $z$  справедливо может быть разложение только в виде суммы двух компонент, одна из которых принадлежит подпространству  $\mathcal{R}(H_{BB})$ , а другая — подпространству  $\mathcal{R}(H_{BN})$ . Согласно (6) имеем  $Q_{NN} = H_{NN}$ , что влечет  $\mathcal{R}(Q_{NN}) = \mathcal{R}(H_{NN})$ . Таким образом, предположение, что  $z_2 \in \mathcal{R}(Q_{NN})$ , приводит к тому, что  $z_2 \in \mathcal{R}(H_{NN})$ , т.е.  $z_2$  принадлежит ортогональному дополнению к подпространству  $\mathcal{R}(H_B)$ , что невозможно. Поэтому обязательно  $z \in \mathcal{R}(Q_{NB})$ .

Схожим образом убеждаемся, что  $\dim \mathcal{R}(H_{BN}) > 0$  и  $z \in \mathcal{R}(H_{BN})$ . Следовательно, справедливо равенство (20) Утверждение доказано.

Пусть непустое подпространство  $\mathcal{R}^I(Q_{NB}, H_{BN})$  ненулевое. Обозначим через  $Q_{NB}^Z$  матрицу, для которой подпространство  $\mathcal{R}(Q_{NB}^Z)$  совпадает с  $\mathcal{R}^I(Q_{NB}, H_{BN})$ . Аналогично, пусть  $H_{BN}^Z$  — матрица, для которой подпространство  $\mathcal{R}(H_{BN}^Z)$  совпадает с  $\mathcal{R}^I(Q_{NB}, H_{BN})$ . Так как обе матрицы  $Q_{NB}^Z$ ,  $H_{BN}^Z$  состоят из собственных векторов матриц  $X$  и  $Y$ , которые одновременно принадлежат их нуль-пространствам, то в качестве  $Q_{NB}^Z$  и  $H_{BN}^Z$  можно взять одинаковые матрицы, определив нужным образом соответствующие собственные векторы из нуль-пространств. Другими словами, можно считать, что  $Q_{NB}^Z H_{BN}^Z$ . Оставшиеся подматрицы матриц  $Q_{NB}$  и  $H_{BN}$  обозначим соответственно через  $Q_{NB}^P$  и  $H_{BN}^P$ . Опять отмечаем, что некоторые из них могут оказаться пустыми. Если подпространство  $\mathcal{R}^I(Q_{NB}, H_{BN})$  нулевое, то в качестве  $Q_{NB}^P$  и  $H_{BN}^P$  берутся сами матрицы  $Q_{NB}$  и  $H_{BN}$ . Таким образом, выполняются следующие разложения:

$$\mathcal{R}(Q_{NB}) = \mathcal{R}^S(Q_{NB}^P, Q_{NB}^Z), \quad \mathcal{R}(H_{BN}) = \mathcal{R}^S(H_{BN}^P, H_{BN}^Z). \quad (21)$$

Поскольку  $\mathcal{R}(Q_N) = \mathcal{R}^S(Q_{NN}, Q_{NB})$ , то из (21) следует, что если подпространство  $\mathcal{N}(Q)$  ненулевое, то в общем случае его можно представить как сумму трех подпространств, а именно,

$$\mathcal{N}(Q) = \mathcal{R}(Q_N) = \mathcal{R}^S(Q_{NN}, Q_{NB}^P, Q_{NB}^Z),$$

причем все три составляющие подпространства  $\mathcal{R}(Q_{NN})$ ,  $\mathcal{R}(Q_{NB}^P)$  и  $\mathcal{R}(Q_{NB}^Z)$  ортогональны между собой. То же самое можно сказать и про подпространство  $\mathcal{N}(H)$ , для которого справедлива формула

$$\mathcal{N}(H) = \mathcal{R}(H_B) = \mathcal{R}^S(H_{BB}, H_{BN}^P, H_{BN}^Z).$$

Имеем в силу вышесказанного  $\mathcal{R}(Q_{NB}^Z) = \mathcal{R}(H_{BN}^Z)$ . Кроме того, согласно своим определениям  $\mathcal{R}(Q_{BB}) = \mathcal{R}(H_{BB})$  и  $\mathcal{R}(Q_{NN}) = \mathcal{R}(H_{NN})$ . Поэтому

$$\mathcal{R}^S(Q_{BB}, Q_{NN}, Q_{NB}^Z) = \mathcal{R}^S(H_{NN}, H_{BB}, H_{BN}^Z). \quad (22)$$

|          |            |            |            |          |          |
|----------|------------|------------|------------|----------|----------|
| $Q_B$    |            | $Q_N$      |            |          |          |
| $Q_{BB}$ | $Q_{BN}$   | $Q_{NB}$   |            | $Q_{NN}$ |          |
| $Q_{BB}$ | $Q_{BN}$   | $Q_{NB}^Z$ | $Q_{NB}^P$ | $Q_{NN}$ |          |
|          |            |            |            |          |          |
| $H_{BB}$ | $H_{BN}^P$ | $H_{BN}^Z$ |            | $H_{NB}$ | $H_{NN}$ |
| $H_{BB}$ | $H_{BN}$   |            |            | $H_{NB}$ | $H_{NN}$ |
| $H_B$    |            |            |            | $H_N$    |          |

Фиг. 1. Разбиение матриц  $Q$  и  $H$  на подматрицы.

Отсюда, в частности, следует, что

$$\mathcal{R}^S(Q_{BN}, Q_{NB}^P) = \mathcal{R}^S(H_{NB}, H_{BN}^P). \quad (23)$$

Это равенство вытекает из того, что подпространства, стоящие в левой и правой частях (23), являются дополнениями подпространств (22) до всего пространства  $\mathbb{R}^n$ .

Схематично разбиение матриц  $Q$  и  $H$  на подматрицы (6)–(8), а также разбиение матриц  $Q_{NB}$  и  $H_{BN}$  на соответственно подматрицы  $Q_{NB}^P$ ,  $Q_{NB}^Z$  и  $H_{BN}^P$ ,  $H_{BN}^Z$  представлено на фиг. 1. Там же опять схематично указано на равенство между образами матриц  $Q_{BB}$  и  $Q_{NN}$  с образами соответственно матриц  $H_{BB}$  и  $H_{NN}$ . Обращено также внимание на совпадение образов матриц  $Q_{NB}^Z$  и  $H_{BN}^Z$ .

**Утверждение 5.** Пусть  $\dim \mathcal{R}^I(H_{NB}, Q_{NB}) > 0$ . Тогда

$$\mathcal{R}^I(H_{NB}, Q_{NB}) = \mathcal{R}^I(H_{NB}, Q_{NB}^P), \quad (24)$$

Аналогично,

$$\mathcal{R}^I(Q_{BN}, H_{BN}) = \mathcal{R}^I(Q_{BN}, H_{BN}^P), \quad (25)$$

если  $\dim \mathcal{R}^I(Q_{BN}, H_{BN}) > 0$ .

**Доказательство.** Убедимся только в равенстве (24). При этом считаем, не умаляя общности, что подпространство  $\mathcal{R}(Q_{NB}^Z)$  непустое, иначе, так как  $Q_{NB} = Q_{NB}^P$ , равенство (24) очевидно.

Возьмем произвольный ненулевой вектор  $y \in \mathcal{R}^I(H_{NB}, Q_{NB})$  и покажем, что обязательно  $y \in \mathcal{R}(Q_{NB}^P)$ . Допустим, что  $y = y_1 + y_2$ , где  $y_1 \in \mathcal{R}(Q_{NB}^P)$ ,  $y_2 \in \mathcal{R}(Q_{NB}^Z)$  и  $y_2 \neq 0$ . Имеем  $\mathcal{R}(Q_{NB}^Z) = \mathcal{R}(H_{BN}^Z)$ . Отсюда с учетом того, что  $\mathcal{R}(H_{BN}) \perp \mathcal{R}(H_{NB})$  получаем  $y_2 \notin \mathcal{R}(H_{NB})$ . Так как  $y \in \mathcal{R}(H_{NB})$ , то  $y_2 = 0$ . Мы пришли к противоречию. Следовательно,  $y = y_1 \in \mathcal{R}(Q_{NB}^P)$ . Утверждение доказано.

**Лемма 2.** Пусть матрицы  $X$  и  $Y$  таковы, что

$$k_{XY} = \dim \mathcal{R}^I(H_{NB}, Q_{NB}^P) > 0. \quad (26)$$

Тогда  $r_{XY} = r_{H_{NB}} - k_{XY}$ .

**Доказательство.** Воспользуемся формулой для ранга произведения  $XY$ :

$$r_{XY} = r_Y - \dim(\mathcal{R}(Y) \cap \mathcal{N}(X)),$$

справедливой, вообще говоря, для произведения произвольных матриц  $X$  и  $Y$ . Если применить ее к матрице  $XY$  вида (13), то приходим к следующему значению для ее ранга:

$$r_{XY} = r_{H_{NB}} - \dim(\mathcal{R}(H_{NB}) \cap \mathcal{N}(Q_{BN}^T)).$$

Учтем далее, что ядро  $\mathcal{N}(Q_{BN}^T)$  матрицы  $Q_{BN}^T$  есть ортогональное дополнение к подпространству  $\mathcal{R}(Q_{BN})$ . Тогда  $\mathcal{N}(Q_{BN}^T) = \mathcal{R}^S(Q_{BB}, Q_{NN}, Q_{NB})$  или, если воспользоваться (21),

$$\mathcal{N}(Q_{BN}^T) = \mathcal{R}^S(Q_{BB}, Q_{NN}, Q_{NB}^P, Q_{NB}^Z).$$

Но, как уже отмечалось, выполняются следующие равенства для подпространств:

$$\mathcal{R}(Q_{BB}) = \mathcal{R}(H_{BB}), \quad \mathcal{R}(Q_{NN}) = \mathcal{R}(H_{NN}), \quad \mathcal{R}(Q_{NB}^Z) = \mathcal{R}(H_{BN}^Z).$$

Более того, все эти подпространства  $\mathcal{R}(H_{BB})$ ,  $\mathcal{R}(H_{NN})$  и  $\mathcal{R}(H_{BN}^Z)$  ортогональны  $\mathcal{R}(H_{NB})$ . Поэтому остается только пересечение  $\mathcal{R}(H_{NB}) \cap \mathcal{N}(Q_{BN}^T) = \mathcal{R}^I(H_{NB}, Q_{NB}^P)$ . Отсюда приходим к требуемому утверждению.

Схожим образом доказывается

**Лемма 3.** Пусть матрицы  $X$  и  $Y$  таковы, что

$$k_{YX} = \dim \mathcal{R}^I(Q_{BN}, H_{BN}^P) > 0. \quad (27)$$

Тогда  $r_{YX} = r_{Q_{BN}} - k_{YX}$ .

**Замечание 1.** Любое подпространство  $\mathcal{R}^S(h_i, \dots, h_k)$ , где  $h_i$ ,  $1 \leq j \leq k$ , — столбцы матрицы  $H_{NB}$ , не может принадлежать  $\mathcal{R}(Q_{NB})$ . Действительно, иначе эти столбцы были бы включены в матрицу  $H_{NN}$ . Аналогично, любое подпространство  $\mathcal{R}^S(q_i, \dots, q_l)$ , где  $q_i$ ,  $1 \leq j \leq l$ , — столбцы матрицы  $Q_{BN}$ , не может принадлежать  $\mathcal{R}(H_{NB})$ .

Обратимся теперь к нуль-пространству матрицы  $X \circ Y$ . Оно совпадает с нуль-пространством матрицы  $U_P$ , а его размерность  $d_{X \circ Y}$  равняется рангу матрицы  $U_O$ . Подпространство  $\mathcal{R}(Q_{NB}^Z) = \mathcal{R}(H_{BN}^Z)$ , если непустое, в силу своего определения обязательно принадлежит  $\mathcal{R}(U_O)$ .

**Утверждение 6.** Пусть подпространства  $\mathcal{R}(Q_{BB})$ ,  $\mathcal{R}(Q_{NN})$  и  $\mathcal{R}(Q_{NB}^Z)$  непустые. Тогда

$$\mathcal{R}^S(Q_{BB}, Q_{NN}, Q_{NB}^Z) \subseteq \mathcal{R}(U_O). \quad (28)$$

**Доказательство.** Прежде всего отметим, что подпространства  $\mathcal{R}(Q_{BB})$ ,  $\mathcal{R}(Q_{NN})$  и  $\mathcal{R}(Q_{NB}^Z)$  согласно своим определениям ортогональны подпространству  $\mathcal{R}(Q_{BN})$  и, следовательно,

$$\mathcal{R}^S(Q_{BB}, Q_{NN}, Q_{NB}^Z) \subseteq \mathcal{N}(Q_{BN}^T). \quad (29)$$

Кроме того, имеет место совпадение подпространств

$$\mathcal{R}(Q_{BB}) = \mathcal{R}(H_{BB}), \quad \mathcal{R}(Q_{NN}) = \mathcal{R}(H_{NN}), \quad \mathcal{R}(Q_{NB}^Z) = \mathcal{R}(H_{BN}^Z).$$

Поскольку опять, согласно своим определениям, все три подпространства  $\mathcal{R}(H_{BB})$ ,  $\mathcal{R}(H_{NN})$  и  $\mathcal{R}(H_{BN}^Z)$  ортогональны подпространству  $\mathcal{R}(H_{NB})$ , то верно следующее:

$$\mathcal{R}^S(Q_{BB}, Q_{NN}, Q_{NB}^Z) \subseteq \mathcal{N}(H_{NB}^T). \quad (30)$$

Из (29) и (30) с учетом представлений (13), (14) приходим к выводу, что

$$\mathcal{R}^S(Q_{BB}, Q_{NN}, Q_{NB}^Z) \subseteq \mathcal{N}(X \circ Y),$$

что приводит к включению (28). Утверждение доказано.

**Следствие 2.** Пусть выполнены предположения утверждения 6. Тогда подпространства  $\mathcal{R}(H_{BB})$ ,  $\mathcal{R}(H_{NN})$ ,  $\mathcal{R}(H_{BN}^Z)$  непустые и имеет место включение

$$\mathcal{R}^S(H_{BB}, H_{NN}, H_{BN}^Z) \subseteq \mathcal{R}(U_O). \quad (31)$$

**Доказательство.** Включение (31) равносильно включению (28) из-за совпадения подпространства  $\mathcal{R}^S(H_{BB}, H_{NN}, H_{BN}^Z)$  с подпространством  $\mathcal{R}^S(Q_{BB}, Q_{NN}, Q_{NB}^Z)$ .

Из утверждения 6 и следствия к нему вытекает, что

$$\mathcal{R}(U_P) \subseteq \mathcal{R}^S(Q_{BN}, Q_{NB}^P), \quad \mathcal{R}(U_P) \subseteq \mathcal{R}^S(H_{NB}, H_{BN}^P),$$

причем согласно (23) правые части в обоих включениях совпадают между собой.

Составим матрицы

$$Q_P = [Q_{BN}, Q_{NB}^P], \quad H_P = [H_{NB}, H_{BN}^P],$$

в которых все столбцы нормированы и ортогональны друг к другу. Подпространство  $\mathcal{R}(Q_P)$  является ортогональным дополнением к подпространству  $\mathcal{R}^S(Q_{BB}, Q_{NN}, Q_{NB}^Z)$ , которое согласно утверждению 6 принадлежит подпространству  $\mathcal{R}(U_O)$ . В свою очередь, подпространство  $\mathcal{R}(H_P)$  является ортогональным дополнением к подпространству  $\mathcal{R}^S(H_{NN}, H_{BB}, H_{BN}^Z)$ . Последнее подпространство, как было показано, совпадает с подпространством  $\mathcal{R}^S(Q_{BB}, Q_{NN}, Q_{NB}^Z)$ , что позволяет говорить о равенстве  $\mathcal{R}(Q_P) = \mathcal{R}(H_P)$  и включениях  $\mathcal{R}(U_P) \subseteq \mathcal{R}(Q_P)$ ,  $\mathcal{R}(U_P) \subseteq \mathcal{R}(H_P)$ .

**Определение 5.** Внутренняя пара  $[X, Y]$  называется *регулярной*, если имеет место равенство  $\mathcal{R}(Q_P) = \mathcal{R}(H_P) = \mathcal{R}(U_P)$ .

В регулярной паре  $[X, Y]$  подпространство  $\mathcal{N}(X \circ Y)$  есть пространство столбцов матрицы  $U_O$ . Учтем также, что столбцы матриц  $Q_{BB}$  и  $H_{NN}$  образуют часть базиса пространства  $\mathcal{R}(U_O)$ . Тогда для матрицы  $U_O$  без ограничения общности справедливо разложение

$$U_O = [U_B U_N U_Z], \quad (32)$$

где

$$U_B = Q_{BB} = H_{BB}, \quad U_N = Q_{NN} = H_{NN}, \quad (33)$$

и  $U_Z$  — произвольная матрица, задающая ортонормированный базис в подпространстве  $\mathcal{R}(Q_{NB}^Z) = \mathcal{R}(H_{BN}^Z)$ , т.е. совпадающая с  $Q_{NB}^Z = H_{BN}^Z$ , если, разумеется, эта матрица непустая. Кроме того, в случае, когда матрица  $U_P$  непустая, всю матрицу  $U$  опять, не ограничивая общность, можно записать в виде

$$U = [U_P, U_B, U_N, U_Z]. \quad (34)$$

Ранги матриц  $U_P$ ,  $U_B$ ,  $U_N$  и  $U_Z$  в дальнейшем будем обозначать соответственно через  $n_P$ ,  $n_B$ ,  $n_N$  и  $n_Z$ . Если какая-то из матриц оказывается пустой, то считаем, что она нулевого ранга.

**Утверждение 7.** Все непустые подпространства  $\mathcal{R}(U_B)$ ,  $\mathcal{R}(U_N)$  и  $\mathcal{R}(U_Z)$  ортогональны друг другу, а также ортогональны подпространству  $\mathcal{R}(U_P)$ , если оно непустое.

**Доказательство.** Ортогональность данных подпространств следует из их определения.

**Утверждение 8.** Пусть пара  $[X, Y]$  регулярная. Тогда для матрицы  $U_P$  справедливы следующие разложения:

$$U_P = Q_P F_{X_P}^T, \quad U_P = H_P F_{Y_P}^T, \quad (35)$$

где  $F_{X_P}$  и  $F_{Y_P}$  — ортогональные матрицы порядка  $n_P r_{X \circ Y}$ .

**Доказательство.** Справедливость разложений (35) следует из определения регулярной пары. Кроме того, поскольку  $U_P^T U_P I_{n_P}$  и

$$(Q_P)^T Q_P = I_{n_P}, \quad (H_P)^T H_P = I_{n_P},$$

то для матриц  $F_{X_P}$  и  $F_{Y_P}$  получаем  $F_{X_P} F_{X_P}^T = I_{n_P}$ ,  $F_{Y_P} F_{Y_P}^T = I_{n_P}$ , т.е. обе эти матрицы ортогональные. Утверждение доказано.

**Замечание 2.** Требование внутренности пары  $[X, Y]$  по существу в приведенных доказательствах нигде не использовалось.

Введем еще одно определение.

**Определение 6.** Внутренняя пара  $[X, Y]$  называется *неособой*, если  $n_Z = 0$ . В противном случае, когда  $n_Z > 0$ , она называется *особой*.

В неособой паре  $[X, Y]$  матрица  $U_Z$  в представлении (34) матрицы  $U$  пропадает, матрица  $Q_P$  переходит в  $Q_P = [Q_{BN}, Q_{NB}]$ , а  $H_P$  — в матрицу  $H_P = [H_{NB}, H_{BN}]$ . В дальнейшем, пока не оговорено противное, считаем, что рассматриваемые пары неособые.

### 3. ДОПУСТИМЫЕ РЕГУЛЯРНЫЕ СОГЛАСОВАННЫЕ ПАРЫ

Если внутренняя пара помимо того, что она регулярная, является еще согласованной, то можно уточнить вид пространства столбцов матрицы  $U_P$ , а именно,  $\mathcal{R}(U_P)$  определяется только пространствами столбцов матрицы  $Q_{BN}$  или пространством столбцов матрицы  $H_{NB}$ .

**Теорема 1.** Пусть допустимая пара  $[X, Y]$  регулярная и согласованная. Пусть, кроме того,  $X \bullet Y > 0$ . Тогда матрицы  $Q_{NB}$  и  $H_{BN}$  пустые и верно

$$\mathcal{R}(U_P) = \mathcal{R}(Q_{BN}) = \mathcal{R}(H_{NB}). \quad (36)$$

**Доказательство.** Прежде всего отметим, что поскольку пара  $[X, Y]$  не комлементарная, то матрица  $U_P$  непустая, и, следовательно, имеет положительный ранг  $n_P > 0$ . Согласно определению регулярной неособой пары  $\mathcal{R}(U_P) = \mathcal{R}(Q_P)$ , где  $Q_P = [Q_{BN}, Q_{NB}]$ . Покажем, что на самом деле  $\mathcal{R}(U_P) = \mathcal{R}(Q_{BN})$ .

Допустим противное, что матрица  $Q_{NB}$  непустая. Положим  $\eta_P = [\eta_{BN}; \eta_{NB}]$ , где  $\eta_{NB}$  — нулевой вектор, размерность которого совпадает с числом столбцов в матрице  $Q_{NB}$ . Так как в этом случае  $Q_{BN} D(\eta_{BN}) Q_{BN}^T = Q_P D(\eta_P) Q_P^T$ , то в силу леммы 1 и разложения (12) имеем

$$Q_P D(\eta_P) Q_P^T H_{NB} D(\theta_{NB}) H_{NB}^T + H_{NB} D(\theta_{NB}) H_{NB}^T Q_P D(\eta_P) Q_P^T = 2U_P D(\lambda_P) U_P^T,$$

где  $\lambda_P > 0_{n_P}$ . Воспользуемся утверждением 8 и умножим данное равенство слева и справа на матрицы  $F_{X_P}^T U_P^T$  и  $U_P F_{X_P}$  соответственно. С учетом равенств (35) получаем

$$D(\eta_P) Q_P^T H_{NB} D(\theta_{NB}) H_{NB}^T U_P F_{X_P} + F_{X_P}^T U_P^T H_{NB} D(\theta_{NB}) H_{NB}^T Q_P D(\eta_P) = 2F_{X_P}^T D(\lambda_P) F_{X_P}. \quad (37)$$

В диагональной матрице  $D(\eta_P)$  имеется по крайней мере один нулевой диагональный элемент, который входит в вектор  $\eta_{NB}$ . Пусть, для определенности, это будет элемент с номером  $k$ , т.е.  $\eta_P^k = 0$ . Тогда  $k$ -я строка и  $k$ -й столбец матрицы  $D(\eta_P)$  нулевые. Отсюда следует, что  $k$ -й диагональный элемент матрицы, стоящей в левой части равенства (37), нулевой.

С другой стороны, если обратиться к матрице  $F_{X_P}^T D(\lambda_P) F_{X_P}$ , то она представима в виде

$$F = F_{X_P}^T D(\lambda_P) F_{X_P} = \sum_{i=1}^{n_P} \lambda_P^i f_i f_i^T,$$

где  $f_i$  есть  $i$ -я строка ортогональной матрицы  $F_{X_P}$ ,  $1 \leq i \leq n_P$ . Поэтому  $k$ -й диагональный элемент матрицы  $F$  равен

$$F^{kk} = \sum_{i=1}^{n_P} \lambda_P^i (f_i^k)^2.$$

Так как  $\lambda_P > 0_{n_P}$ , то для того, чтобы равенство  $F^{kk} = 0$  имело место, должно выполняться следующее:  $f_i^k = 0$ ,  $1 \leq i \leq n_P$ , т.е.  $k$ -й столбец матрицы  $F_{X_P}$  нулевой. Это противоречит ортогональности матрицы  $F_{X_P}$ .

Схожим образом убеждаемся, что в такой паре  $[X, Y]$  матрица  $H_{BN}$  отсутствует и имеет место равенство  $\mathcal{R}(U_P) = \mathcal{R}(H_{NB})$ . Утверждение доказано.

**Следствие 3.** В регулярной согласованной паре  $[X, Y]$  матрица  $U_P$  представима в виде  $U_P = Q_{BN} F_{X_P}^T$  или в виде  $U_P = H_{NB} F_{Y_P}^T$ .

**Утверждение 9.** Пусть  $[X, Y]$  — допустимая регулярная согласованная пара. Для того, чтобы она была оптимальной, необходимо и достаточно, чтобы  $n_p = 0$ .

**Доказательство.** Достаточность. При  $n_p = 0$  получаем, что матрица  $X \circ Y$  нулевая. Так как  $X \succeq 0, Y \succeq 0$ , то отсюда следует выполнение условия комплементарности  $X \bullet Y = 0$ . Выполнение данного условия вместе с допустимостью точек  $X$  и  $Y$  гарантирует оптимальность пары  $[X, Y]$ .

Необходимость. Оптимальная пара  $[X, Y]$  комплементарная. Но, поскольку она внутренняя, то имеет место равенство  $XY = YX = 0_{nn}$ , откуда  $X \circ Y = 0_{nn}$ . Поэтому подматрица  $U_p$  обязательно должна быть пустой, т.е.  $n_p = 0$ . Утверждение доказано.

Из утверждения 9 следует, что любая допустимая пара  $[X, Y]$ , в которой  $n_p > 0$ , не может быть оптимальной.

Возьмем произвольную допустимую регулярную согласованную пару  $[X, Y]$ , для которой справедливо разложение (12) с ортогональной матрицей  $U$ . Если пара  $[X, Y]$  не является оптимальной, то в ортонормированном базисе, задаваемым столбцами матрицы  $U$ , матрицы  $X$  и  $Y$  оказываются блочно-диагональными с блоками соответственно порядков  $n_p, n_B$  и  $n_N$ , причем некоторые из них могут оказаться пустыми.

Имеем в общем случае следующее:

$$X_U = \begin{bmatrix} X_{U_p} & 0 & 0 \\ 0 & X_{U_B} & 0 \\ 0 & 0 & X_{U_N} \end{bmatrix}, \quad Y_U = \begin{bmatrix} Y_{U_p} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{U_B} & 0 \\ 0 & 0 & Y_{U_N} \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Здесь в первой матрице диагональные блоки согласно (33) и следствию к теореме 1 имеют вид

$$\begin{aligned} X_{U_p} &= U_p^T X U_p = F_{X_p}^T Q_{BN}^T Q_{BN} D(\eta_{BN}) Q_{BN}^T Q_{BN} F_{X_p} = F_{X_p}^T D(\eta_{BN}) F_{X_p}, \\ X_{U_B} &= U_B^T X U_B = Q_{BB}^T Q_{BB} D(\eta_{BB}) Q_{BB}^T Q_{BB} = D(\eta_{BB}), \\ X_{U_N} &= U_N^T X U_N = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Для второй матрицы  $Y_U$  выполняется соответственно следующее:

$$\begin{aligned} Y_{U_p} &= U_p^T Y U_p = F_{Y_p}^T H_{NB}^T H_{NB} D(\theta_{NB}) H_{NB}^T H_{NB} F_{Y_p} = F_{Y_p}^T D(\theta_{NB}) F_{Y_p}, \\ Y_{U_N} &= U_N^T Y U_N = H_{NN}^T H_{NN} D(\theta_{NN}) H_{NN}^T H_{NN} = D(\theta_{NN}), \\ Y_{U_B} &= U_B^T Y U_B = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Обозначим через  $\mathbb{S}_U^n$  подпространство пространства  $\mathbb{S}^n$ , образованное блочно-диагональными матрицами с блоками соответственно размеров  $n_p, n_B$  и  $n_N$ . Размерность подпространства  $\mathbb{S}_U^n$  равна

$$n_U = \dim \mathbb{S}_U^n = n_p^\Delta + n_B^\Delta + n_N^\Delta. \quad (41)$$

Из вышесказанного следует, что  $X_U$  и  $Y_U$  принадлежат  $\mathbb{S}_U^n$ . Пусть

$$\eta_U = [\eta_{BN}; \eta_{BB}; 0_{n_N}], \quad \theta_U = [\theta_{NB}; 0_{n_B}; \theta_{NN}].$$

Согласно (38)–(40) имеем  $X_U = F_{X_U}^T D(\eta_U) F_{X_U}$ ,  $Y_U = F_{Y_U}^T D(\theta_U) F_{Y_U}$ , где

$$F_{X_U} = \begin{bmatrix} F_{X_p} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_B} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_N} \end{bmatrix}, \quad F_{Y_U} = \begin{bmatrix} F_{Y_p} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_B} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_N} \end{bmatrix}.$$

Обе матрицы  $F_{X_U}$  и  $F_{Y_U}$  ортогональные.

Рассмотрим дополнительно матрицы  $C_U = U^T C U \in \mathbb{S}^n$  и  $A_{i,U} = U^T A_i U \in \mathbb{S}^n$ , являющиеся представлением матриц  $C$  и  $A_i, i \in J^m$ , в базисе, задаваемым столбцами ортогональной матрицы  $U$ .

Кроме того, произведем “сужение” этих матриц до блочно-диагональных матриц  $\tilde{C}_U$  и  $\tilde{A}_{i,U}$  из  $\mathbb{S}_U^n$ , оставив только в  $C_U$  и  $A_{i,U}$  их диагональные блоки, а остальные блоки взяв нулевыми, например,

$$\tilde{A}_{i,U} = \begin{bmatrix} A_{i,U_P} & 0 & 0 \\ 0 & A_{i,U_B} & 0 \\ 0 & 0 & A_{i,U_N} \end{bmatrix}, \quad i \in J^m, \quad (42)$$

где  $A_{i,U_P} = U_P^T A_i U_P$ ,  $A_{i,U_B} = U_B^T A_i U_B$ ,  $A_{i,U_N} = U_N^T A_i U_N$ .

Матрицы  $\tilde{A}_{1,U}, \dots, \tilde{A}_{m,U}$  порождают в  $\mathbb{S}_U^n$  подпространство, которое обозначим через  $\mathcal{E}_{\tilde{A}}$ . Через  $\mathcal{E}_{\tilde{A}}^\perp$  обозначим его ортогональное дополнение в  $\mathbb{S}_U^n$ . Размерность подпространства  $\mathcal{E}_{\tilde{A}}^\perp$  равна  $l_U = n_U - m$ . Пусть  $\tilde{K}_{j,U}$ ,  $j \in J^{l_U}$ , – произвольные матрицы из  $\mathbb{S}_U^n$ , задающие базис в подпространстве  $\mathcal{E}_{\tilde{A}}^\perp$ . Все матрицы  $\tilde{K}_{j,U}$  имеют вид, аналогичный (42), а именно:

$$\tilde{K}_{j,U} = \begin{bmatrix} K_{j,U_P} & 0 & 0 \\ 0 & K_{j,U_B} & 0 \\ 0 & 0 & K_{j,U_N} \end{bmatrix}, \quad j \in J^{l_U},$$

где  $K_{j,U_P} = U_P^T K_j U_P$ ,  $K_{j,U_B} = U_B^T K_j U_B$ ,  $K_{j,U_N} = U_N^T K_j U_N$ .

Введем определение невырожденности для допустимой пары  $[X_U, Y_U] \in \mathbb{S}_U^n \times Y_U^n$ , считая, по-прежнему, что она согласованная и регулярная.

**Определение 7.** Допустимая пара  $[X_U, Y_U] \in \mathbb{S}_U^n \times \mathbb{S}_U^n$  называется  $X$ -невырожденной, если матрицы

$$B_{i,U} = \begin{bmatrix} A_{i,U_P} & 0 \\ 0 & A_{i,U_B} \end{bmatrix}, \quad i \in J^m, \quad (43)$$

линейно независимы. Соответственно, пара  $[X_U, Y_U] \in \mathbb{S}_U^n \times \mathbb{S}_U^n$  называется  $Y$ -невырожденной, если матрицы

$$B_{j,U} = \begin{bmatrix} K_{j,U_P} & 0 \\ 0 & K_{j,U_N} \end{bmatrix}, \quad j \in J^{l_U}, \quad (44)$$

линейно независимы. В случае, когда пара  $[X_U, Y_U] \in \mathbb{S}_U^n \times Y_U^n$  является одновременно  $X$ -невырожденной и  $Y$ -невырожденной, о ней будем говорить как о невырожденной паре.

Принимая во внимание размерности диагональных блоков в матрицах (43) и (44), получаем, что пара  $[X, Y]$  может быть невырожденной в том и только том случае, когда выполняются неравенства:

$$n_P^\Delta + n_B^\Delta \geq m, \quad n_P^\Delta + n_N^\Delta \geq l_U. \quad (45)$$

Если учесть, что  $l_U = n_U - m$ , то второе неравенство принимает вид  $n_B^\Delta \leq m$ .

**Утверждение 10.** Пусть допустимая регулярная согласованная пара  $[X_U, Y_U] \in \mathbb{S}_U^n \times \mathbb{S}_U^n$  является невырожденной. Тогда, если  $n_N > 0$ , то матрицы  $K_{j,U_N}$ ,  $j \in J^{l_U}$ , порождают пространство  $\mathbb{S}^{n_N}$ . С другой стороны, если  $n_B > 0$ , то матрицы  $A_{i,U_B}$ ,  $i \in J^m$ , порождают пространство  $\mathbb{S}^{n_B}$ .

**Доказательство.** Предположим, что  $n_N > 0$  и докажем первое утверждение. Введем в рассмотрение подпространство  $\mathcal{T}_{\tan}(X_U | \mathbb{S}_{U,+}^n)$  пространства  $\mathbb{S}_U^n$ , определив его следующим образом:

$$\mathcal{T}_{\tan}(X_U | \mathbb{S}_{U,+}^n) = F_{X_U} \{Z_U \in \mathbb{S}_U^n : Z_{U_N} = 0_{n_N n_N}\} F_{X_U}^T,$$

где  $\mathbb{S}_{U,+}^n = \mathbb{S}_U^n \cap \mathbb{S}_+^n$ . Множество  $\mathcal{T}_{\tan}(X_U | \mathbb{S}_{U,+}^n)$  является касательным подпространством к конусу  $\mathbb{S}_{U,+}^n$  в  $X_U$ . Ортогональным дополнением  $\mathcal{T}_{\tan}^\perp(X_U | \mathbb{S}_{U,+}^n)$  к  $\mathcal{T}_{\tan}(X_U | \mathbb{S}_{U,+}^n)$  является множество

$$\mathcal{T}_{\tan}^\perp(X_U | \mathbb{S}_{U,+}^n) = F_{X_U} \{Z_U \in \mathbb{S}_U^n : Z_{U_P} = 0_{n_P n_P}, Z_{U_B} = 0_{n_B n_B}\} F_{X_U}^T.$$

Кроме того, через  $\mathcal{R}_{\tilde{A},U}$  обозначим подпространство пространства  $\mathbb{S}_U^n$ , порожденное матрицами  $\tilde{A}_{i,U}$ ,  $i \in J^m$ . Его ортогональным дополнением в  $\mathbb{S}_U^n$  будет множество

$$\mathcal{R}_{\tilde{A},U}^\perp = \{Z_U \in \mathbb{S}_U^n : \tilde{A}_{i,U} \bullet Z_U = 0, i \in J^m\}.$$

Положим

$$B_{i,U} = F_{X_U}^T \tilde{A}_{i,U} F_{X_U} - M_{i,U}, \quad M_{i,U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{i,U_N} \end{bmatrix}.$$

Отсюда получаем, что для матриц  $\tilde{A}_{i,U}$ ,  $i \in J^m$ , справедливо разложение

$$\tilde{A}_{i,U} = \hat{B}_{i,U} + \hat{M}_{i,U}, \quad (46)$$

где

$$\hat{B}_{i,U} = F_{X_U} B_{i,U} F_{X_U}^T \in \mathcal{T}_{\tan}(X_U | \mathbb{S}_{U,+}^n), \quad \hat{M}_{i,U} = F_{X_U} M_{i,U} F_{X_U}^T \in \mathcal{T}_{\tan}^\perp(X_U | \mathbb{S}_{U,+}^n). \quad (47)$$

Так как матрицы (43) линейно независимы, то матрицы  $\hat{B}_{i,U}$ ,  $i \in J^m$ , также линейно независимы.

Покажем, что выполняется равенство

$$\mathcal{T}_{\tan}^\perp(X_U | \mathbb{S}_{U,+}^n) \cap \mathcal{R}_{\tilde{A},U} = 0_{nn}. \quad (48)$$

От противного, пусть данное пересечение содержит ненулевую матрицу  $\hat{Z}$ . Тогда найдутся коэффициенты  $\alpha_i$ ,  $i \in J^m$ , в совокупности не равные нулю, такие, что

$$\hat{Z} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \tilde{A}_{i,U} \in \mathcal{T}_{\tan}^\perp(X_U | \mathbb{S}_{U,+}^n).$$

Поэтому на основании (46) и (47) имеем  $\sum_{i=1}^m \alpha_i \hat{B}_{i,U} = 0_{nn}$ , что противоречит линейной независимости матриц  $\hat{B}_{i,U}$ ,  $i \in J^m$ .

Пусть  $\mathcal{L}_{K,U_N}$  — подпространство в  $\mathbb{S}^{n_N}$ , порождаемое матрицами  $K_{j,U_N}$ ,  $j \in J^{l_U}$ . Если оно не совпадает с  $\mathbb{S}^{n_N}$ , то ортогональное в  $\mathbb{S}^{n_N}$  к  $\mathcal{L}_{K,U_N}$  подпространство содержит ненулевую матрицу  $Z_{U_N}$  порядка  $n_N$ . Имеем  $Z_{U_N} \bullet K_{j,U_N} = 0$ ,  $j \in J^{l_U}$ . Данные равенства можно переписать в виде

$$\tilde{Z}_U \bullet \tilde{K}_{j,U} = 0, \quad j \in J^{l_U}, \quad (49)$$

где

$$\tilde{Z}_U = F_X \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{U_N} \end{bmatrix} F_X^T \in \mathcal{T}_{\tan}^\perp(X_U | \mathbb{S}_{U,+}^n),$$

причем ранг матрицы  $\tilde{Z}_U$  совпадает с рангом матрицы  $Z_{U_N}$ , т.е.  $\tilde{Z}_U$  — ненулевая матрица. Кроме того, из (49) следует, что  $\tilde{Z}_U \in \mathcal{R}_{\tilde{A},U}$ . Таким образом,

$$\tilde{Z}_U \in \mathcal{T}_{\tan}^\perp(X_U | \mathbb{S}_{U,+}^n) \cap \mathcal{R}_{\tilde{A},U},$$

что противоречит (48). Поэтому на самом деле матрицы  $K_{j,U_N}$ ,  $j \in J^{l_U}$ , порождают все пространство  $\mathbb{S}^{n_N}$ .

Второе утверждение доказывается аналогично.

## 4. НЬЮТОНОВСКАЯ СИСТЕМА

Из предположения о существовании решений у пары задач (1) и (2) следует, что эти решения должны удовлетворять условиям оптимальности:

$$\begin{aligned} X \bullet Y &= 0, \\ A_i \bullet X &= b^i, \quad i \in J^m, \\ Y &= C - \sum_{i=1}^m u^i A_i, \\ X &\succeq 0, \quad Y \succeq 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Но равенство  $X \bullet Y = 0$  при  $X \succeq 0, Y \succeq 0$  выполняется тогда и только тогда, когда  $XY = YX = 0_{nn}$ . Поэтому первое равенство из (50) может быть заменено на  $X \circ Y = 0_{nn}$  и решение задач (1) и (2), таким образом, сводится к отысканию решений системы

$$\begin{aligned} X \circ Y &= 0_{nn}, \\ A_i \bullet X &= b^i, \quad i \in J^m, \\ Y &= C - \sum_{i=1}^m u^i A_i, \end{aligned} \quad (51)$$

причем  $X$  и  $Y$  должны принадлежать конусу  $\mathbb{S}_+^n$ .

Наша цель заключается в решении системы (51) методом Ньютона при условии, что стартовые точки  $X$  и  $Y$  берутся допустимыми и согласованными. Более того, все последующие точки в ходе итерационного процесса остаются такими же.

Далее для простоты считаем, что  $[X, Y]$  — допустимая регулярная согласованная пара. Кроме того, считаем, что она неоптимальная и неособая. Построим ньютоновскую систему уравнений для определения направлений перемещений  $\Delta X$  и  $\Delta Y$  (ньютоновских направлений) в этой паре. Воспользуемся базисом, определяемым столбцами ортогональной матрицы  $U$  из разложения (12). Тогда условия оптимальности (51) в этом базисе запишутся в виде

$$\begin{aligned} X_U \circ Y_U &= 0_{nn}, \\ A_{i,U} \bullet X_U &= b^i, \quad i \in J^m, \\ Y_U &= C_U - \sum_{i=1}^m u^i A_{i,U}, \end{aligned} \quad (52)$$

где  $C_U = U^T C U$ ,  $A_{i,U} = U^T A_i U$ ,  $i \in J^m$ , и  $X_U = U^T X U \succeq 0$ ,  $Y_U = U^T Y U \succeq 0$ .

Согласно (38) текущие матрицы  $X_U$  и  $Y_U$  в базисе, задаваемом матрицей  $U$ , являются блочно-диагональными. Кроме того, они допустимые, следовательно, удовлетворяют второму и третьему равенствам из (51). Эти равенства с учетом блочной диагональности  $X_U$  и  $Y_U$  можно переписать в виде

$$\tilde{A}_{i,U} \bullet X_U = b^i, \quad i \in J^m; \quad Y_U = \tilde{C}_U - \sum_{i=1}^m u^i \tilde{A}_{i,U}. \quad (53)$$

Так как пара  $[X, Y]$  неоптимальная, то первое равенство из (52), разумеется, не выполняется.

С целью упрощения дальнейшего изложения, хотя это и не принципиально, освободимся от двойственной переменной  $u$  во втором равенстве (53). Для этого воспользуемся введенными ранее матрицами  $\tilde{K}_{j,U}$ ,  $j \in J^{l_U}$ , задающими базис в подпространстве  $\mathcal{E}_A^\perp$ . Тогда, умножая скалярным образом равенство  $Y_U = \tilde{C}_U - \sum_{i=1}^m u^i \tilde{A}_{i,U}$  последовательно на матрицы  $\tilde{K}_{j,U}$ , получаем

$$\tilde{K}_{j,U} \bullet Y_U = c^j, \quad j \in J^{l_U}, \quad (54)$$

где  $c^j = \tilde{K}_{j,U} \bullet \tilde{C}_U$ . Заметим также, что матрицы  $\tilde{K}_{j,U}$ ,  $j \in J^{l_U}$ , порождают в  $\mathbb{S}_U^n$  подпространство, которое обозначим через  $\mathcal{E}_{\tilde{K}}$ . По своему определению  $\mathcal{E}_{\tilde{K}}$  совпадает с  $\mathcal{E}_A^\perp$ . Подставляя (54) вместо

третьего равенства в условиях (51), приходим к следующей системе уравнений относительно  $X_U$  и  $Y_U$ :

$$\begin{aligned} X_U \circ Y_U &= 0_{nm}, \\ \tilde{A}_{i,U} \bullet X_U &= b^i, \quad i \in J^m, \\ \tilde{K}_{j,U} \bullet Y_U &= c^j, \quad j \in J^{lv}. \end{aligned} \quad (55)$$

Составим теперь систему для нахождения ньютоновских направлений  $\Delta X_U$  и  $\Delta Y_U$ , решающих систему (55). Так как матрицы  $X_U$  и  $Y_U$  симметричные, то чтобы сохранить их симметричность при перемещении вдоль направлений  $\Delta X_U$  и  $\Delta Y_U$  будем также в качестве последних брать симметричные матрицы. Кроме того, поскольку матрицы  $X_U$ ,  $Y_U$  и все матрицы  $\tilde{C}_U$ ,  $\tilde{A}_{i,U}$ ,  $\tilde{K}_{j,U}$ , где  $i \in J^m$  и  $j \in J^{lv}$ , принадлежат подпространству  $\mathbb{S}_U^n$ , то целесообразно и ньютоновские направления  $\Delta X_U$  и  $\Delta Y_U$  брать из этого подпространства, т.е. полагать

$$\Delta X_U = \begin{bmatrix} \Delta X_{U_P} & 0 & 0 \\ 0 & \Delta X_{U_B} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta X_{U_N} \end{bmatrix}, \quad \Delta Y_U = \begin{bmatrix} \Delta Y_{U_P} & 0 & 0 \\ 0 & \Delta Y_{U_B} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta Y_{U_N} \end{bmatrix}. \quad (56)$$

Тогда линейная система алгебраических уравнений для нахождения ньютоновских направлений  $\Delta X_U$  и  $\Delta Y_U$  в паре  $[X, Y]$  имеет вид

$$\begin{aligned} Y_U \circ \Delta X_U + X_U \circ \Delta Y_U &= -X_U \circ Y_U, \\ \tilde{A}_{i,U} \bullet \Delta X_U &= 0, \quad i \in J^m, \\ \tilde{K}_{j,U} \bullet \Delta Y_U &= 0, \quad j \in J^{lv}. \end{aligned} \quad (57)$$

Более того, если принять во внимание, что  $X_U \circ Y_U D(\lambda)$ , то первое уравнение (57) можно также переписать следующим образом:

$$Y_U \circ \Delta X_U + X_U \circ \Delta Y_U = -D(\lambda). \quad (58)$$

Из (57) следует, что матрицы  $\Delta X_U$  и  $\Delta Y_U$  должны принадлежать подпространствам, ортогональным соответственно к подпространствам  $\mathcal{E}_{\tilde{A}}$  и  $\mathcal{E}_{\tilde{K}}$ . Другими словами,  $\Delta X_U \in \mathcal{E}_{\tilde{K}}$ ,  $\Delta Y_U \in \mathcal{E}_{\tilde{A}}$ .

Так как матрицы  $\Delta X_U$  и  $\Delta Y_U$  имеют вид (56), то матричное уравнение (58) распадается на три уравнения, а именно:

$$\begin{aligned} Y_{U_P} \circ \Delta X_{U_P} + X_{U_P} \circ \Delta Y_{U_P} &= -D(\lambda_P), \\ D(\eta_{BB}) \circ \Delta Y_{U_B} &= 0_{n_B n_B}, \\ D(\theta_{NN}) \circ \Delta X_{U_N} &= 0_{n_N n_N}, \end{aligned} \quad (59)$$

причем из двух последних сразу получаем

$$\Delta X_{U_N} = 0_{n_N n_N}, \quad \Delta Y_{U_B} = 0_{n_B n_B}. \quad (60)$$

Второе и третье уравнения из (55) в развернутом виде переписываются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{i,U_P} \bullet \Delta X_{U_P} + A_{i,U_B} \bullet \Delta X_{U_B} + A_{i,U_N} \bullet \Delta X_{U_N} &= 0, \\ K_{j,U_P} \bullet \Delta Y_{U_P} + K_{j,U_B} \bullet \Delta Y_{U_B} + K_{j,U_N} \bullet \Delta Y_{U_N} &= 0, \end{aligned}$$

где  $i \in J^m$ ,  $j \in J^{lv}$ . Кроме того, если учесть (60), то они принимают следующий более простой вид:

$$A_{i,U_P} \bullet \Delta X_{U_P} + A_{i,U_B} \bullet \Delta X_{U_B} = 0, \quad i \in J^m, \quad (61)$$

$$K_{j,U_P} \bullet \Delta Y_{U_P} + K_{j,U_N} \bullet \Delta Y_{U_N} = 0, \quad j \in J^{lv}. \quad (62)$$

Объединяя первое уравнение из (59) с (61) и (62), окончательно приходим к системе

$$\begin{aligned} Y_{U_P} \circ \Delta X_{U_P} + X_{U_P} \circ \Delta Y_{U_P} &= -D(\lambda_P), \\ A_{i,U_P} \bullet \Delta X_{U_P} + A_{i,U_B} \bullet \Delta X_{U_B} &= 0, \quad i \in J^m, \\ K_{j,U_P} \bullet \Delta Y_{U_P} + K_{j,U_N} \bullet \Delta Y_{U_N} &= 0, \quad j \in J^{l_U}. \end{aligned} \quad (63)$$

Так как  $l_U = n_U - m$  и число  $n_U$  определяется (41), то общее число уравнений в системе (63) равно  $2n_P^\Delta + n_B^\Delta + n_N^\Delta$ . Оно совпадает с общим числом неизвестных.

Разрешая систему (63), можно найти приращения  $\Delta X_{U_P}$ ,  $\Delta Y_{U_P}$ ,  $\Delta X_{U_B}$  и  $\Delta Y_{U_N}$  и перейти к новым точкам. Конкретные выражения для этих приращений будут получены в отдельной статье. Там же будет дано описание итерационного процесса и предложен способ выбора шага перемещения.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nesterov Yu.E., Nemirovski A.S.* Interior Point Polynomial Algorithms in Convex Programming. SIAM Publications, SIAM, Philadelphia. 1994.
2. *Alizadeh F.* Interior point methods in semidefinite programming with applications to combinatorial optimization // SIAM J. Optim. 1995. V. 5. № 1. P. 13–51.
3. *Vandenberghe L., Boyd S.* Semidefinite programming // SIAM Rev. 1996. V. 38. № 1. P. 49–95.
4. *Todd M.J.* Semidefinite optimization // Acta Numer. 2001. V. 10. P. 515–560.
5. *Wolkowicz H., Saigal R., Vandenberghe L.* (eds). Handbook of Semidefinite Programming Kluwer Academic Publishers. Boston, Dordrecht, London. 2000.
6. *Laurent M., Rendle F.* Semidefinite Programming and Integer Programming. Handbooks on Operations Research and Management Science. 2005. V. 12. P. 393–514.
7. *De Klerk E.* Aspects of Semidefinite Programming. Interior Point Algorithms and Selected Applications. Kluwer Academic Publishers, 2004.
8. *Monteiro R.D.C.* First- and second-order methods for semidefinite programming // Mathematical Programming, Series B. 2003. V. 97. № 1–2. P. 209–244.
9. *Жадан В.Г.* Прямо-двойственный метод Ньютона для задач линейного программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т. 39. № 1. С. 17–32.
10. *Жадан В.Г.* О сходимости прямо-двойственного метода Ньютона для задачи линейного программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т. 39. № 5. С. 431–445.
11. *Арнольд В.И.* О матрицах, зависящих от параметров // Успехи матем. наук. 1971. Т. 26. В. 2 (158). С. 101–114.
12. *Alizadeh F., Haeberly J.-P.F., Overton M.L.* Complementarity and nondegeneracy in semidefinite programming // Mathematical Programming, Series B. 1997. V. 77. № 2. P. 129–162.
13. *Magnus J.R., Neudecker H.* The elimination matrix: some lemmas and applications // SIAM J. Alg. Disc. Meth. 1980. V. 1. № 4. P. 422–449.
14. *Магнус Я.Р., Нейдеккер Ч.* Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике. М.: Физматлит, 2002.