ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 3, с. 391–402

## УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.956.4

# О ГЛАДКОМ РЕШЕНИИ ВТОРОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛЬНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ НЕГЛАДКОЙ ОБЛАСТИ НА ПЛОСКОСТИ


Е. А. Бадерко[1,*], А. А. Стасенко[1,**]

[1] 119991 Москва, Ленинские горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Россия

*e-mail: baderko.ea@yandex.ru

**e-mail: stasenko.aa@yandex.ru

Поступила в редакцию 02.06.2021 г.
Переработанный вариант 02.06.2021 г.
Принята к публикации 17.11.2021 г.

Рассмотрена вторая начально-краевая задача для параболической по Петровскому системы второго порядка с постоянными коэффициентами в полуограниченной плоской области с негладкой боковой границей. Доказана единственность решения этой задачи в классе $C^{2,1}(\Omega) \cap \underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$. Исследовано минимальное условие на граничную функцию, при котором решение задачи принадлежит классу $\underset{0}{C}^{2,1}(\overline{\Omega})$. Методом граничных интегральных уравнений получен конструктивный вид решения. Библ. 24.

**Ключевые слова:** параболические системы, граничные интегральные уравнения, теория параболических потенциалов, вторая начально-краевая задача.

**DOI:** 10.31857/S0044466922030036

## ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается вторая начально-краевая задача с нулевым начальным условием для однородной параболической системы второго порядка с постоянными коэффициентами, с одной пространственной переменной, в полуограниченной области с негладкой боковой границей из класса $H^{(1+\alpha)/2}[0,T]$, допускающей, в частности, наличие “клювов”. Методом граничных интегральных уравнений строится решение поставленной задачи из класса $\underset{0}{C}^{2,1}(\overline{\Omega})$. Это решение имеет вид специального параболического потенциала.

Из [1], [2, с. 706–707] следует, что если боковая граница области достаточно гладкая, а именно, из класса $H^{1+\alpha/2}[0,T], 0 < \alpha < 1$, то для любой правой части $\psi \in \underset{0}{H}^{(1+\alpha)/2}[0,T]$ граничного условия II рода существует единственное решение такой задачи в классе $\underset{0}{H}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$.

В [3] для случая одного многомерного по пространственным переменным параболического уравнения с переменными коэффициентами доказано, что любое решение второй начально-краевой задачи принадлежит пространству $\underset{0}{H}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$ при существенно более слабом условии на боковую границу, а именно, если эта граница является нецилиндрической из класса $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Omega})$.

В [4], [5] этот результат обобщен на одномерные по пространственной переменной параболические системы второго порядка: построено решение из класса $\underset{0}{H}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$. Единственность решения в этих работах не исследовалась.

В [6], [7] построено решение в виде потенциала простого слоя второй начально-краевой задачи для параболических систем в полуограниченных плоских областях с негладкими боковыми границами, при непрерывной правой части $\psi$ граничного условия. Кроме того, в [7] установлено, что полученное решение принадлежит пространству $\underset{0}{H}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\bar{\Omega})$, если $\psi \in \underset{0}{H}^{\alpha/2}[0,T]$, $0 < \alpha < 1$. Позднее данные результаты были обобщены в [8], [9] для случая пространств Дини–Гёльдера. Единственность решения в данных работах также не исследовалась.

Заметим, что в [10] доказано, что для параболических систем, вообще говоря, не имеет места принцип максимума.

В настоящей работе доказывается, что любое решение поставленной задачи принадлежит классу $\underset{0}{C}^{2,1}(\bar{\Omega})$, если граничная функция принадлежит пространству $\underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$, т.е. имеет непрерывную дробную производную порядка $1/2$, обращающуюся в нуль при $t = 0$. При этом предварительно устанавливается теорема единственности для решения в классе $\underset{0}{C}^{1,0}(\bar{\Omega})$. Кроме того, в работе показывается, что условие $\psi \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$ на граничную функцию является минимальным для принадлежности решения классу $\underset{0}{C}^{2,1}(\bar{\Omega})$.

В качестве приложения полученный результат может использоваться для исследования процессов тепло- и массопереноса в сплавах (см., например, [12]). Конструктивное представление решения в виде потенциала и сведение решения поставленной задачи к решению системы граничных интегральных уравнений Вольтерра I рода могут представлять теоретическую основу для получения численного решения задачи методом граничных элементов (см., например [12], [13]).

Статья состоит из пяти разделов. В разд. 1 вводятся используемые в работе обозначения и функциональные пространства, приводится постановка задачи и формулируются основные теоремы. В разд. 2 приводится доказательство теоремы единственности. В разд. 3 исследуется гладкость специального параболического потенциала. В разд. 4 доказывается основная теорема. В разд. 5 показывается минимальность условия $\psi \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$ для принадлежности решения классу $\underset{0}{C}^{2,1}(\bar{\Omega})$.

## 1. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В полосе $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T\}$, $0 < T < +\infty$, рассматривается параболический по И.Г. Петровскому (см. [14]) матричный оператор 2-го порядка с постоянными коэффициентами $Lu = \partial_t u - A\partial_x^2 u$, $u = (u_1,\ldots,u_m)$, $m \geq 1$, где $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x^2 = \partial^2/\partial x^2$, $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^m$ – матрица размерности $m \times m$. Предполагается, что собственные числа $\mu_k$ матрицы $A$ удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re}\mu_k > 0, \quad k = \overline{1,m}. \tag{1}$$

Условие (1) (см. [15, с. 297–305], [16, с. 64–116]) обеспечивает существование фундаментальной матрицы решений $Z(x-\xi,t-\tau)$ системы $Lu = 0$, которая имеет вид

$$Z(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\sigma x}\exp(-\sigma^2 At)d\sigma, \quad t > 0,$$

$Z \equiv 0$, $t \leq 0$; $x \in \mathbb{R}$, и справедлива оценка

$$\left|\partial_t^l \partial_x^k Z(x,t)\right| \leq C(l,k)t^{-(2l+k+1)/2}\exp(-cx^2/t),$$

$l \geq 0$, $k \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, для некоторых положительных постоянных $C(l,k)$, $c$, где $\partial_t^l = \partial^l/\partial t^l$, $\partial_x^k = \partial^k/\partial x^k$.

Здесь и далее для любой матрицы $B$ (или вектора $b$) под $|B|$ (соответственно $|b|$) понимаем максимум из модулей элементов $B$ (компонент $b$).

В $D$ выделяется полуограниченная область $\Omega = \{(x,t) \in D : x > g(t)\}$ с “боковой” границей $\Sigma = \{(x,t) \in \bar{\Omega} : x = g(t)\}$, где функция $g$ удовлетворяет условию

$$\left|g(t+\Delta t) - g(t)\right| \le K\left|\Delta t\right|^{(1+\alpha)/2}, \quad K > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad t, t+\Delta t \in [0,T]. \tag{2}$$

Под значениями (вектор)-функции, определенной в $\Omega$, и ее производных на границе области $\Omega$ всюду далее понимаются их предельные значения, полученные предельным переходом “изнутри” области $\Omega$. Под принадлежностью (вектор)-функции некоторому функциональному пространству понимается, что все ее элементы принадлежат соответствующему пространству.

Для любого сегмента $[d, T-d]$, $0 \le d < T/2$, через $C[d,T-d]$ обозначаем пространство непрерывных (вектор)-функций $\psi : [d,T-d] \to \mathbb{R}^m$; при этом

$$\|\psi;[d,T-d]\|^0 = \max_{[d,T-d]}|\psi|.$$

Полагаем

$$\underset{0}{C}[d,T-d] = \{\psi \in C[d,T-d] : \psi(d) = 0\},$$

$$C^1[0,T] = \{\psi : \psi, \psi' \in C[0,T]\}.$$

Пусть

$$\partial^{1/2}\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-\tau)^{-1/2}\psi(\tau)d\tau, \quad t \in [0,T],$$

есть оператор дробного дифференцирования порядка $1/2$. Следуя [17], [18], через $\underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$ обозначаем пространство (вектор)-функций $\psi \in \underset{0}{C}[0,T]$, для которых существует $\partial^{1/2}\psi \in \underset{0}{C}[0,T]$; при этом

$$\|\psi;[0,T]\|^{1/2} = \max_{[0,T]}|\psi| + \max_{[0,T]}\left|\partial^{1/2}\psi\right|.$$

Через $H^\beta[0,T]$, $0 < \beta < 1$, обозначаем пространство (вектор)-функций $\psi : [0,T] \to \mathbb{R}^m$, для которых конечна величина

$$|\psi;[0,T]|^\beta = \|\psi;[0,T]\|^0 + \sup_{\substack{t,t+\Delta t \in (0,T),\\ \Delta t \ne 0}}\{|\Delta_t\psi(t)||\Delta t|^{-\beta}\}.$$

Полагаем $\underset{0}{H}^\beta[0,T] = \{\psi \in H^\beta[0,T] : \psi(0) = 0\}$.

Через $\underset{0}{C}(\bar{\Omega})$ обозначаем пространство непрерывных и ограниченных (вектор)-функций $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^m$, для которых $u(x,0) = 0$, при этом

$$\|u;\Omega\|^0 = \sup_\Omega |u|;$$

$\underset{0}{C}^{1,0}(\bar{\Omega}) = \{u : u, \partial_x u \in \underset{0}{C}(\bar{\Omega})\}$, при этом

$$\|u;\Omega\|^{1,0} = \sum_{i=0}^{1}\left\|\partial_x^i u;\Omega\right\|^0;$$

$\underset{0}{C}^{2,1}(\bar{\Omega}) = \{u : u, \partial_x u, \partial_x^2 u, \partial_t u \in \underset{0}{C}(\bar{\Omega})\}$, при этом

$$\|u;\Omega\|^{2,1} = \sum_{i=0}^{2}\left\|\partial_x^i u;\Omega\right\|^0 + \left\|\partial_t u;\Omega\right\|^0.$$

Через $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\bar{\Omega})$, $0<\alpha<1$, обозначаем пространство Гёльдера (вектор)-функций, имеющих в $\bar{\Omega}$ непрерывную производную $\partial_x u$, для которых конечна величина

$$\|u;\Omega\|^{(1+\alpha)} = \|u;\Omega\|^{1,0} + \sup_{\Omega}\frac{|\Delta_{x,t}\partial_x u|}{|\Delta x|^{\alpha}+|\Delta t|^{\alpha/2}} + \sup_{\Omega}\frac{|\Delta_t u|}{|\Delta t|^{(1+\alpha)/2}}.$$

Через $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{\Omega})$, $0<\alpha<1$, обозначаем пространство Гёльдера (вектор)-функций, имеющих в $\bar{\Omega}$ непрерывные производные $\partial_x u,\ \partial_x^2 u,\ \partial_t u$, для которых конечна величина

$$\|u;\Omega\|^{(2+\alpha)} = \|u;\Omega\|^{2,1} + \sup_{\Omega}\frac{|\Delta_{x,t}\partial_x^2 u|}{|\Delta x|^{\alpha}+|\Delta t|^{\alpha/2}} + \sup_{\Omega}\frac{|\Delta_t\partial_x u|}{|\Delta t|^{(1+\alpha)/2}} + \sup_{\Omega}\frac{|\Delta_{x,t}\partial_t u|}{|\Delta x|^{\alpha}+|\Delta t|^{\alpha/2}}.$$

Здесь и далее для любой (вектор)-функции $u(x,t)$ полагаем

$$\Delta_t u = u(x,t+\Delta t)-u(x,t),\quad \Delta_{x,t}u = u(x+\Delta x,t+\Delta t)-u(x,t);$$

$$\underset{0}{H}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\bar{\Omega}) = \left\{u\in H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\bar{\Omega}) : \partial_x^i u(x,0)=0,\ i=0,1\right\},$$

$$\underset{0}{H}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{\Omega}) = \left\{u\in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{\Omega}) : \partial_x^i u(x,0)=0,\ i=0,1,2,\ \partial_t u(x,0)=0\right\}.$$

Наконец,

$$\underset{0}{\hat{C}}^{2,1}(\bar{\Omega}) = \{u\in \underset{0}{C}^{2,1}(\bar{\Omega}) : \|u;\Omega\|^{(2)}<\infty\},$$

где

$$\|u;\Omega\|^{(2)} = \|u;\Omega\|^{2,1} + \sup_{\Omega}\frac{|\Delta_t\partial_x u|}{|\Delta t|^{1/2}}.$$

Рассмотрим задачу: найти функцию $u\in C^{2,1}(\Omega)\cap C^{1,0}(\bar{\Omega})$, являющуюся решением второй начально-краевой задачи

$$Lu=0 \quad \text{в} \quad \Omega,\quad u(x,0)=0,\quad x\ge g(0),\quad \partial_x u(g(t),t)=\psi(t),\quad 0\le t\le T. \tag{3}$$

Существование решения $u$ задачи (3) для $\psi\in \underset{0}{C}[0,T]$ следует из [7]. В [7] также доказано, что $u\in \underset{0}{H}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\bar{\Omega})$, если $\psi\in \underset{0}{H}^{\alpha/2}[0,T]$.

Основными результатами настоящей работы являются следующие три теоремы.

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия* (1), (2) *и функция* $u\in C^{2,1}(\Omega)\cap C^{1,0}(\bar{\Omega})$ — *решение задачи* (3) *при условии* $\psi\equiv 0$. *Тогда* $u\equiv 0$.

**Замечание.** В случае одного уравнения ($m=1$) утверждение теоремы 1 следует из [19].

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия* (1), (2), *и* $u\in C^{2,1}(\Omega)\cap C^{1,0}(\bar{\Omega})$ — *решение задачи* (3). *Тогда для любой* $\psi\in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$ *это решение принадлежит пространству* $\underset{0}{\hat{C}}^{2,1}(\bar{\Omega})$, *и верна оценка*

$$\|u;\Omega\|^{(2)} \le C\|\psi;[0,T]\|^{1/2}.$$

Здесь и далее через $C$ и $c$ обозначаем положительные постоянные, зависящие от $T,K,A,m$, конкретный вид которых нас не интересует.

На примере задачи в полуполосе мы показываем, что условие принадлежности граничной функции $\psi$ классу $\underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$ в теореме 2 является точным. А именно, в полуполосе $D_+=\{(x,t)\in D : x>0\}$ рассматриваем вторую начально-краевую задачу

$$Lu=0 \quad \text{в} \quad D_+,\quad u(x,0)=0,\quad x\ge 0,\quad \partial_x u(0,t)=\psi(t),\quad 0\le t\le T, \tag{4}$$

и доказываем, что справедлива следующая

**Теорема 3.** *Решение* $u \in C^{2,1}(D_+) \cap C^{1,0}(\overline{D_+})$ *задачи* (4) *принадлежит классу* $\underset{0}{C}^{2,1}(\overline{D_+})$ *тогда и только тогда, когда* $\psi \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$.

## 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Предварительно заметим, что при выполнении условия (2) функцию $u \in \underset{0}{H}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Omega})$ можно продолжить до функции $\hat{u} \in \underset{0}{H}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{D})$, причем

$$\|\hat{u}; D\|^{(1+\alpha)} \le C\,\|u;\Omega\|^{(1+\alpha)}.$$

В самом деле, положим $y \equiv x - g(t)$, $u(y + g(t),t) \equiv u^*(y,t)$, $(y,t) \in \overline{D_+}$. Пусть $y \ge 0$. Из неравенства

$$\begin{gathered}|u(y + g(t + \Delta t), t + \Delta t) - u(y + g(t),t)| \le \\ \le |u(y + g(t + \Delta t), t + \Delta t) - u(y + g(t), t + \Delta t)| + |u(y + g(t), t + \Delta t) - u(y + g(t),t)|,\end{gathered}$$

если $g(t) \ge g(t + \Delta t)$, и неравенства

$$\begin{gathered}|u(y + g(t + \Delta t), t + \Delta t) - u(y + g(t),t)| \le \\ \le |u(y + g(t),t) - u(y + g(t + \Delta t),t)| + |u(y + g(t + \Delta t),t) - u(y + g(t + \Delta t), t + \Delta t)|,\end{gathered}$$

если $g(t) < g(t + \Delta t)$, получаем, что

$$|\Delta_t u^*(y,t)| \le C\,\|u;\Omega\|^{1+\alpha}\,|\Delta t|^{(1+\alpha)/2}, \quad (y,t),(y,t + \Delta t) \in \overline{D_+}.$$

Аналогично, показываем, что

$$|\Delta_t \partial_y u^*(y,t)| \leqslant C\,\|u;\Omega\|^{1+\alpha}\,|\Delta t|^{\alpha/2}, \quad (y,t),(y,t + \Delta t) \in \overline{D_+}.$$

Таким образом, $u^* \in \underset{0}{H}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{D_+})$. Следуя [2, с. 345], полагаем $\hat{u}^*(y) = u^*(y)$, $y \ge 0$, $\hat{u}^*(y) = -3u^*(-y,t) + 4u^*(-y/2,t)$, $y < 0$, и проверяем, что функция $\hat{u}^*$ является продолжением $u^*$ на $\overline{D}$ с сохранением класса. Сделав обратную замену $x \equiv y + g(t)$, получаем требуемое продолжение для функции $u$.

Для доказательства теоремы 1 используем метод из [20], [21]. Пусть функция $u$ удовлетворяет условиям из теоремы 1. Предположим вначале, что $u \in \underset{0}{H}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Omega})$ для некоторого $\alpha$ из интервала $(0,1)$. Тогда $u$ является решением первой начально-краевой задачи

$$Lv = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad v(x,0) = 0, \quad x \ge g(0), \quad v(g(t),t) = \psi_0(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

где $\psi_0(t) = u(g(t),t)$, $0 \le t \le T$.

Продолжая функцию $u$ с области $\overline{\Omega}$ на полосу $\overline{D}$ с сохранением класса, можно показать, что $\psi_0 \in \underset{0}{H}^{(1+\alpha)/2}[0,T]$. Поэтому в силу результатов из [17], [18], [22]–[24] об однозначной разрешимости первой начально-краевой задачи в классе $\underset{0}{H}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Omega})$ для систем вида (5) следует, что $u$ имеет вид (векторного) потенциала простого слоя

$$u(x,t) = \int_0^t Z(x - g(\tau), t - \tau)\varphi(\tau)d\tau, \quad (x,t) \in \overline{\Omega},$$

где (вектор)-плотность $\varphi \in \underset{0}{H}^{\alpha/2}[0,T]$ является единственным в $C[0,T]$ решением системы Вольтерра I рода

$$\int_0^t Z(g(t) - g(\tau), t - \tau)\varphi(\tau)d\tau = \psi_0(t), \quad 0 \le t \le T.$$

Пользуясь формулой “скачка” для пространственной производной потенциала простого слоя (см. [6]), получим, что $\varphi$ одновременно является решением системы Вольтерра II рода

$$-1/2A^{-1}\varphi(t)+\int_0^t \partial_x Z(g(t)-g(\tau),t-\tau)\varphi(\tau)d\tau = 0,\quad 0\le t\le T,$$

которая имеет единственное в $C[0,T]$ решение $\varphi\equiv 0$ (см. [6]). Следовательно, $u\equiv 0$.

Предполагаем теперь, что $u\in \underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$. Для любой ограниченной функции $v:\overline{D}\to\mathbb{R}$ и любого множества $\mathcal{B}\subset\overline{D}$ обозначаем

$$\omega(h;\nu;\mathcal{B}) = \sup_{\substack{|z_1-z_2|\le h,\\ z_1,z_2\in\mathcal{B}}} |\nu(z_1)-\nu(z_2)|.$$

Продолжаем $u$ на всю полосу $\overline{D}$ с сохранением класса так, что $\overline{u}(x,0)=\partial_x\overline{u}(x,0)=0$. В результате получаем функцию $\overline{u}\in \underset{0}{C}^{1,0}(\overline{D})$, причем $\overline{u}(x,t)=u(x,t)$, $(x,t)\in\overline{\Omega}$. Далее, для функции $\overline{u}$ полагаем $\tilde{u}(x,t)=\overline{u}(x,t)$, $0\le t\le T$, $\tilde{u}(x,t)=\overline{u}(x,T)$, $t\ge T$, $\tilde{u}(x,t)=0$, $t\le 0$.

Фиксируем произвольно точку $(x_0,t_0)\in\Omega$ и докажем, что $\tilde{u}(x_0,t_0)=0$.

Рассмотрим “сглаженные” функции

$$\tilde{u}_s(x,t)=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\tilde{u}\left(x-\frac{y}{s},\,t-\frac{\tau}{s}\right)\zeta(y,\tau)dyd\tau,\quad (x,t)\in\overline{D},\quad s\in\mathbb{N},$$

где $\zeta(x,t)=C_1\exp((x^2+t^2-1)^{-1})$ при $x^2+t^2<1$, $\zeta(x,t)=0$ при $x^2+t^2\ge 1$, постоянная $C_1$ выбирается из условия

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\zeta(x,t)dxdt=1.$$

Фиксируем произвольно $\varepsilon>0$. Из непрерывности функции $\tilde{u}$ следует, что существует $s_0\in\mathbb{N}$ такое, что

$$|\tilde{u}_s(x_0,t_0)-\tilde{u}(x_0,t_0)|<\varepsilon$$

для любого $s>s_0$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что существуют $s_1\in\mathbb{N}$ и постоянная $C>0$ такие, что

$$|\tilde{u}_s(x_0,t_0)|\le C\varepsilon\quad \text{для любого}\quad s>s_1. \tag{6}$$

Рассмотрим область $\Omega_d=\{(x,t)\in\Omega: x>g(t)+d,\ d<t<T-d\}$, где $0<d<\min\{1,T/2\}$ такое, что $(x_0,t_0)\in\Omega_d$. Для любого $s>1/d$ функция $\tilde{u}_s$ является решением второй начально-краевой задачи

$$Lu=0\quad\text{в}\quad\Omega_d,\quad u(x,d)=h_{s,d}(x),\quad x\ge g(d)+d,\quad \partial_x u(g(t)+d,t)=\psi_{s,d}(t),\quad d\le t\le T-d,$$

где $h_{s,d}(x)=\tilde{u}_s(x,d)$, $x\in\mathbb{R}$, $\psi_{s,d}(t)=\partial_x\tilde{u}_s(g(t)+d,t)$, $0\le t\le T$.

Заметим, что $\tilde{u}_s\in \underset{0}{H}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{D})$, откуда в силу только что доказанной единственности решения в данном классе следует (см. [7]), что $\tilde{u}_s$ имеет вид суммы двух параболических потенциалов

$$u_s(x,t)=\int_{\mathbb{R}}Z(x-\xi,t-d)h_{s,d}(\xi)d\xi+\int_d^t Z(x-g(\tau)-d,t-\tau)\varphi_{s,d}(\tau)d\tau\equiv P_{s,d}(x,t)+U_{s,d}(x,t),\quad (x,t)\in\overline{\Omega}_d, \tag{7}$$

где (вектор)-плотность $\varphi_{s,d}\in \underset{0}{C}[d,T-d]$ является единственным в $C[d,T-d]$ решением системы граничных интегральных уравнений

$$-\frac{1}{2}A^{-1}\varphi_{s,d}(t)+\int_d^t\partial_x Z(g(t)-g(\tau)-d,t-\tau)\varphi_{s,d}(\tau)d\tau=\Psi_{s,d}(t),\quad d\le t\le T-d, \tag{8}$$

где $\Psi_{s,d}(t)=\psi_{s,d}(t)-\partial_x P_{s,d}(g(t)+d,t)$, $d\le t\le T-d$.

Оценим $\partial_x^k P_{s,d}$, $k = 0,1$. Пусть $\mathbb{B}_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : x - x_0 \le R\}$, где $R > 0$ достаточно большое, так что $R > \|u;\Omega\|^{1,0}\varepsilon^{-1}$, и цилиндр $\mathbb{B}_R(x_0)\times[0,T]$ содержит "внутри" кривую $\Sigma$. Имеем

$$\partial_x^k P_{s,d}(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}} Z(x-\xi,t-d)\partial_\xi^k h_{s,d}(\xi)d\xi =$$
$$= \int\limits_{|x-\xi|>R} Z(x-\xi,t-d)\partial_\xi^k h_{s,d}(\xi)d\xi + \int\limits_{|x-\xi|\le R} Z(x-\xi,t-d)\partial_\xi^k h_{s,d}(\xi)d\xi =$$
$$= P_{s,d}^{1,k}(x,t) + P_{s,d}^{2,k}(x,t), \quad (x,t)\in\bar{\Omega}_d, \quad k = 0,1.$$

Рассмотрим $P_{s,d}^{1,k}$, $k = 0,1$. Так как $\left\|\partial_\xi^k h_{s,d};\mathbb{R}\right\|^0 \le \|\tilde{u}_s; D\|^{1,0} \le C\|u;\Omega\|^{1,0}$, то

$$\left|P_{s,d}^{1,k}(x,t)\right| \le C\|u;\Omega\|^{1,0} \int\limits_{|x-\xi|>R} |Z(x-\xi,t-d)|d\xi \le$$
$$\le C\|u;\Omega\|^{1,0} \int\limits_{|x-\xi|>R} (t-d)^{-1/2}\exp(-c(x-\xi)^2/(t-d))d\xi \le$$
$$\le C\|u;\Omega\|^{1,0} R^{-1} \le C\varepsilon, \quad (x,t)\in\bar{\Omega}_d.$$

Для оценки $P_{s,d}^{2,k}$, $k = 0,1$, заметим, что

$$\left|\partial_\xi^k h_{s,d}(\xi)\right| \le \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\partial_\xi^k \tilde{u}\left(\xi - \frac{y}{s}, d - \frac{\tau}{s}\right)\zeta(y,\tau)\right| dyd\tau =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\partial_\xi^k \tilde{u}\left(\xi - \frac{y}{s}, d - \frac{\tau}{s}\right) - \partial_\xi^k \tilde{u}\left(\xi - \frac{y}{s}, 0\right)\right| \zeta(y,\tau)dyd\tau \le$$
$$\le \omega\left(2d, \partial_\xi^k \tilde{u}, \mathbb{B}_{2R+1}(x_0)\times[0,T]\right), \quad \xi \in \mathbb{B}_{2R}(x_0).$$

Поэтому в силу непрерывности функции $\partial_\xi^k \tilde{u}$ существует $d_1 = d_1(R) > 0$ такое, что при всех $d < d_1$, $s > 1/d$

$$\left|P_{s,d}^{2,k}(x,t)\right| \le C\varepsilon, \quad (x,t)\in\mathbb{B}_R(x_0)\times[0,T], \quad k = 0,1.$$

В итоге при $d < d_1$, $s > 1/d$ имеем

$$\left|\partial_x^k P_{s,d}(x,t)\right| \le C\varepsilon, \quad (x,t)\in\mathbb{B}_R(x_0)\times[0,T], \quad k = 0,1. \tag{9}$$

Оценим потенциал простого слоя $U_{s,d}, d < d_2$, где $d_2 = d_2(R) < d_1$ такое, что цилиндр $\mathbb{B}_R(x_0)\times[0,T]$ содержит "боковую" границу области $\Omega_d$ для любых $d < d_2$. Так как $\Psi_{s,d} \in \underset{0}{C}[d,T-d]$, то (см. [6]) система (8) имеет единственное в $C[d,T-d]$ решение $\varphi_{s,d} \in \underset{0}{C}[d,T-d]$, причем справедлива оценка

$$\|\varphi_{s,d};[d,T-d]\|^0 \le C\|\Psi_{s,d};[d,T-d]\|^0.$$

Оценим $\|\Psi_{s,d};[d,T-d]\|^0$. Заметим, что

$$|\psi_{s,d}(t)| = |\partial_x \tilde{u}_s(g(t)+d,t)| \le \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\partial_x \tilde{u}\left(g(t)+d-\frac{y}{s}, t-\frac{\tau}{s}\right) - \partial_x \tilde{u}(g(t),t)\right| \zeta(y,\tau)dyd\tau \le$$
$$\le \omega(4d, \partial_x \tilde{u}, \mathbb{B}_{R+1}(x_0)\times[0,T]).$$

Поэтому существует $d_3 = d_3(R)$ такое, что $d_3 < d_2$, и при всех $d < d_3$, $s > 1/d$

$$|\psi_{s,d}(t)| \le \varepsilon, \quad d \le t \le T.$$

Из оценки (9) при $k = 1$ получаем, что $\|\Psi_{s,d};[0,T]\|^0 \le C\varepsilon$ и, следовательно, $\|\varphi_{s,d};[d,T-d]\|^0 \le C\varepsilon$ при всех $d < d_3$, $s > 1/d$.

Таким образом, при всех $d < d_3$, $s > 1/d$

$$|U_{s,d}(x,t)| < C\varepsilon, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}_d. \tag{10}$$

В итоге, из представления (7) и оценок (9), (10) следует (6) для $s_1 = [1/d_3]$.

## 3. СПЕЦИАЛЬНЫЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ

Следуя [5], определим для (вектор)-плотности $\varphi \in C[0,T]$ *специальный параболический потенциал* $S\varphi$ формулой

$$S\varphi(x,t) = \int_0^t Y(x - g(\tau), t - \tau)\varphi(\tau)d\tau, \quad (x,t) \in \overline{D}, \tag{11}$$

где

$$Y(x,t) = \int_0^{+\infty} Z(x + r, t)dr, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Столбцы матрицы $Y$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t Y(x,t) - A\partial_x^2 Y(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}_+^2 \equiv \mathbb{R} \times (0,+\infty),$$

и справедливо неравенство

$$\left|\partial_x^k Y(x,t)\right| \le C_k t^{-k/2}, \quad k \ge 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}_+^2. \tag{12}$$

Для любой $\varphi \in C[0,T]$ имеем

$$\partial_t S\varphi(x,t) - A\partial_x^2 S\varphi(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega. \tag{13}$$

**Лемма 1.** *Пусть выполнены условия* (1), (2). *Тогда для любой* $\varphi \in \underset{0}{C}[0,T]$ *имеют место оценки*

$$\left|\partial_x^k S\varphi(x,t)\right| \le C\,\|\varphi;[0,T]\|^0\, t^{1-k/2}, \quad k = 0,1, \quad (x,t) \in \overline{D}, \tag{14}$$

$$\left|\partial_x^2 S\varphi(x,t)\right| \le C\omega_\varphi(t), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{15}$$

$$\left|\Delta_t \partial_x S\varphi(x,t)\right| \le C\,\|\varphi;[0,T]\|^0\, |\Delta t|^{1/2}, \quad (x,t),(x,t+\Delta t) \in \overline{D}, \tag{16}$$

*где* $\omega_\varphi$ *– модуль непрерывности функции* $\varphi$ *на* $[0,T]$, *и справедлива формула*

$$\partial_x^2 S\varphi(g(t),t) = \frac{1}{2}A^{-1}\varphi(t) + \int_0^t \partial_x^2 Y(g(t) - g(\tau), t - \tau)\varphi(\tau)d\tau, \quad (x,t) \in \Omega, \quad 0 \le t \le T. \tag{17}$$

**Доказательство.** Неравенство (14) сразу следует из (12). Докажем (15). Имеем

$$\partial_x^2 S\varphi(x,t) = -\int_0^t \partial_x Z(x - g(\tau), t - \tau)\varphi(\tau)d\tau, \quad (x,t) \in \Omega. \tag{18}$$

Из равенства $\partial_x Z(x,t) = -\dfrac{x}{2t}A^{-1}Z(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, (см. [7]) следует, что

$$\partial_x^2 S\varphi(x,t) = \frac{1}{2}A^{-1}\int_0^t (x - g(\tau))(t - \tau)^{-1}Z(x - g(\tau), t - \tau)(\varphi(\tau) - \varphi(0))d\tau,$$

поэтому из неравенства $(a-b)^2 \geq a^2/2 - 2b^2$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$ получаем, что

$$\left|\partial_x^2 S\varphi(x,t)\right| \leq C\int_0^t \left|x - g(\tau)\right|(t-\tau)^{-3/2}\exp\left(-c(x-g(\tau))^2/(t-\tau)\right)\omega_\varphi(\tau)d\tau \leq$$

$$\leq C\omega_\varphi(t)\int_0^t \frac{\left|x-g(t)\right| + (t-\tau)^{(1+\alpha)/2}}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-c(x-g(t))^2/(t-\tau)\right)d\tau \leq C\omega_\varphi(t), \quad (x,t)\in\Omega.$$

Докажем (16). Без ограничения общности будем считаем $\Delta t > 0$. При $0 < t/2 \leq \Delta t$ неравенство (16) сразу следует из (14) при $k = 1$. Пусть $\Delta t < t/2$. Положим

$$\Delta_t\partial_x S\varphi(x,t) = \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \partial_x Y(x-g(\tau), t+\Delta t-\tau)\varphi(\tau)d\tau -$$

$$-\int_{t-\Delta t}^{t}\partial_x Y(x-g(\tau), t-\tau)\varphi(\tau)d\tau + \int_0^{t-\Delta t}\Delta_t\partial_x Y(x-g(\tau), t-\tau)\varphi(\tau)d\tau \equiv W_1 - W_2 + W_3.$$

$W_1$ и $W_2$ оцениваются аналогичным образом. Оценим $W_2$, используя (12):

$$\left|W_2\right| \leq C\left\|\varphi;[0,T]\right\|^0\int_{t-\Delta t}^t (t-\tau)^{-1/2}d\tau \leq C_\varphi\Delta t^{1/2}, \quad (x,t),(x,t+\Delta t)\in\bar{D}.$$

Оценим $W_3$, снова применяя оценку (12):

$$\left|W_3\right| \leq C\left\|\varphi;[0,T]\right\|^0\Delta t\int_0^{t-\Delta t}(t-\tau)^{-3/2}d\tau \leq C\left\|\varphi;[0,T]\right\|^0\Delta t^{1/2}, \quad (x,t),(x,t+\Delta t)\in\bar{D}.$$

Формула (17) следует из равенства (18) и формулы “скачка” для пространственной производной потенциала простого слоя, доказанной в [6].

**Замечание.** Утверждение леммы 2 следует из [4], [5], если повысить требование на гладкость $\varphi$, а именно, если $\varphi \in \underset{0}{H}^{\alpha/2}[0,T]$, $0 < \alpha < 1$.

Из леммы 1 следует

**Теорема 4.** *Пусть* $\varphi \in \underset{0}{C}[0,T]$, *и выполнены условия* (1), (2). *Тогда* $S\varphi \in \underset{0}{\hat{C}}^{2,1}(\bar{\Omega})$, *и справедлива оценка*

$$\left\|S\varphi;\Omega^{(2)}\right\| \leq C\left\|\varphi;[0,T]\right\|^0.$$

## 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

В силу теоремы 1 и результата из [7] существует единственное решение $u$ задачи (3) в классе $\underset{0}{C}^{1,0}(\bar{\Omega})$, если $\psi \in \underset{0}{C}[0,T]$. Пусть $\psi \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$. Докажем, что в этом случае $u \in \underset{0}{\hat{C}}^{2,1}(\bar{\Omega})$. Для этого решение задачи (3) ищем в виде потенциала $S\varphi$ из (11), где (вектор)-плотность $\varphi \in \underset{0}{C}[0,T]$ подлежит определению. В силу равенства (13) и леммы 1 потенциал $S\varphi$ удовлетворяет уравнению и начальному условию из (3). Подставляя $S\varphi$ в граничное условие из (3), для определения плотности $\varphi$ получаем систему граничных интегральных уравнений Вольтерра I рода:

$$-\int_0^t Z(g(t)-g(\tau), t-\tau)\varphi(\tau)d\tau = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Из [18] следует, что для любой $\psi \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$ эта система имеет единственное в $C[0,T]$ решение $\varphi \in \underset{0}{C}[0,T]$, и справедлива оценка

$$\left\|\varphi;[0,T]\right\|^0 \leq C\left\|\psi;[0,T]\right\|^{1/2},$$

откуда в силу теоремы 4 получаем требуемый результат.

## 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Достаточность следует из теоремы 2. Для доказательства необходимости предварительно заметим, что для любой функции $\psi \in C^1[0,T]$ справедливо равенство

$$\partial^{1/2}\partial^{1/2}\psi(t) = \psi'(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{19}$$

В самом деле, пусть $0 < t \le T$. Имеем

$$\pi^{1/2}\partial^{1/2}\psi(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t \tau^{-1/2}\psi(t-\tau)d\tau = t^{-1/2}\psi(0) + \int\limits_0^t \tau^{-1/2}\psi'(t-\tau)d\tau =$$

$$= t^{-1/2}\psi(0) + \int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2}\psi'(\tau)d\tau, \quad 0 < t \le T.$$

Поэтому

$$\pi\partial^{1/2}\partial^{1/2}\psi(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2}\tau^{-1/2}\psi(0)d\tau + \frac{d}{dt}\int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2}\left(\int\limits_0^\tau (\tau-s)^{-1/2}\psi'(s)ds\right)d\tau =$$

$$= \pi\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \psi'(s)ds = \pi\psi'(t), \quad 0 < t \le T.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $t \to 0_+$, получаем (19) и при $t = 0$.

Пусть $u \in \underset{0}{C}{}^{2,1}(\bar{D}_+)$ – решение задачи (4). Из теоремы 1 и результата из [7] следует, что $u$ имеет вид потенциала простого слоя

$$u(x,t) = -2\int\limits_0^t Z(x,t-\tau)A\psi(\tau)d\tau, \quad (x,t) \in \bar{D}_+.$$

Для $(x,t) \in D_+$ рассмотрим дробную производную порядка 1/2:

$$\sqrt{\pi}\partial_t^{1/2}u(x,t) = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2}u(x,\tau)d\tau = -2\frac{d}{dt}\int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2}\left(\int\limits_0^\tau Z(x,\tau-\theta)A\psi(\theta)d\theta\right)d\tau =$$

$$= -2\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\left(\int\limits_\tau^t (t-\theta)^{-1/2}Z(x,\theta-\tau)d\theta\right)A\psi(\tau)d\tau =$$

$$= -2\int\limits_0^t \frac{d}{dt}\left(\int\limits_\tau^t (t-\theta)^{-1/2}Z(x,\theta-\tau)d\theta\right)A\psi(\tau)d\tau + \lim_{\tau\to t}\int\limits_\tau^t (t-\theta)^{-1/2}Z(x,\theta-\tau)A\psi(\tau)d\theta.$$

Так как $x > 0$, второе слагаемое в последнем выражении обращается в нуль, откуда получаем

$$\partial_t^{1/2}u(x,t) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^{t-\tau} (t-\tau-\theta)^{-1/2}Z(x,\theta)d\theta\right)A\psi(\tau)d\tau =$$

$$= -2\int\limits_0^t \partial_t^{1/2}Z(x,t-\tau)A\psi(\tau)d\tau, \quad (x,t) \in D_+.$$

Пользуясь равенством (см. [18])

$$\partial_t^{1/2}Z(x,t) = -\mathrm{sign}(x)\partial_x Z(x,t)M^{-1}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

где $M^{-1}$ – матрица, обратная к матрице $M \equiv \pi^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} \exp\{-y^2A\}dy$, получаем, что

$$\partial_t^{1/2}u(x,t) = 2\int\limits_0^t \partial_x Z(x,t-\tau)M^{-1}A\psi(\tau)d\tau \equiv v(x,t), \quad (x,t) \in D_+. \tag{20}$$

Из формулы “скачка” для пространственной производной потенциала простого слоя (см. [6]) следует, что

$$\lim_{x\to 0_+} v(x,t) = -A^{-1}M^{-1}A\psi(t), \quad 0 \le t \le T,$$

причем сходимость равномерна по $t \in [0,T]$. Кроме того, в силу (19), (20)

$$\partial_t u(x,t) = \pi^{-1/2}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-\tau)^{-1/2} v(x,\tau)d\tau \equiv \partial_t F(x,t), \quad x > 0, \quad t \ge 0. \tag{21}$$

Из равенства

$$\lim_{x\to 0_+} F(x,t) = -\pi^{-1/2}A^{-1}M^{-1}A\int_0^t (t-\tau)^{-1/2}\psi(\tau)d\tau, \quad 0 \le t \le T,$$

и условия $\partial_t u \in \underset{0}{C}(\overline{D_+})$, переходя к пределу в (21) при $x \to 0_+$, и получаем, что существует $\partial^{1/2}\psi \in \underset{0}{C}[0,T]$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 83. С. 3–163.
2. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
3. *Baderko E.A.* Schauder estimates for oblique derivative problems // Comptes Rendus de l’Académie des Sciences. Série I. Mathématique. Paris. 1998. T. 326. № 12. P. 1377–1380.
4. *Семаан Х.* О решении второй краевой задачи для параболических систем в областях на плоскости с негладкой боковой границей. М., 1999, Деп. ВИНИТИ РАН 26.02.99. № 567–В99.
5. *Семаан Х.* О решении второй краевой задачи для параболических систем на плоскости. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, механ.-матем. факультет, 1999.
6. *Тверитинов В.А.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка. М., 1988. Деп. в ВИНИТИ 30.09.88. № 6850–В88.
7. *Тверитинов В.А.* Решение второй краевой задачи для параболических систем с одной пространственной переменной методом граничных элементов. М., 1989. Деп. в ВИНИТИ 15.11.89. № 6906–В89.
8. *Зейнеддин М.* О потенциале простого слоя для параболической системы в классах Дини. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, мех.-мат. факультет, 1992.
9. *Зейнеддин М.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини. М., 1992. Деп в ВИНИТИ РАН 16.04.92. № 1294–В92.
10. *Мазья В.Г., Кресин Г.И.* О принципе максимума для сильно эллиптических и параболических систем второго порядка с постоянными коэффициентами// Матем. сб. 1984. Т. 125(167). № 4(12). С. 458–480.
11. *Ворошнин Л.Г., Хусид Б.М.* Диффузионный массоперенос в многокомпонентных системах. Минск: Наука и техн., 1971.
12. *Hackbusch W.* Integral Equations. Berlin: Birkhauser, 1995.
13. *Chen G., Zhou J.* Boundary Element Methods. London: Acad. Press, 1992.
14. *Петровский И.Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. МГУ. 1938. Секция А. Т. 1. Вып. 7. С. 1–72.
15. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
16. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. М.: Наука, 1964.
17. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Первая краевая задача для параболических систем в плоских областях с негладкими боковыми границами // Докл. АН. 2014. Т. 458. № 4. С. 379–381.
18. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифференц. ур-ния. 2016. Т. 52. № 2. С. 197–208.
19. *Камынин Л.И.* О решении методом потенциалов основных краевых задач для одномерного параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. матем. ж. 1974. Т. 15. № 4. С. 806–834.

20. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* О единственности решения задачи Коши для параболических систем // Дифференц. ур-ния. 2019. Т. 55. № 6. С. 822–830.
21. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Uniqueness theorem for parabolic Cauchy problem // Applicable Analys. 2016. T. 95. № 7. P. 1570–1580.
22. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Единственность решения первой начально-краевой задачи для параболических систем на плоскости в модельном случае // Докл. АН. 2018. Т. 483. № 3. С. 247–249.
23. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* О единственности решения первой начально-краевой задачи для параболических систем с постоянными коэффициентами в полуограниченной области на плоскости // Дифференц. ур-ния. 2019. Т. 55. № 5. С. 673–682.
24. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Задача Дирихле для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами на плоскости // Докл. АН. 2017. Т. 476. № 1. С. 7–10.