ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 3, с. 462–477

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.95

# ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НОВОЙ МОДЕЛИ АГРЕГАЦИИ-ДРОБЛЕНИЯ В СЛУЧАЕ РАВНЫХ КОНСТАНТ РЕАКЦИЙ


**Я. Г. Батищева**

*125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В. Келдыша, Россия*

*e-mail: janina.batisheva@gmail.com*

Поступила в редакцию 07.06.2021 г.
Переработанный вариант 15.08.2021 г.
Принята к публикации 17.11.2021 г.

Доказаны существование и единственность решения задачи Коши для случая равных констант в новой модели агрегации-дробления. Исследованы собственные состояния оператора в правой части, отвечающие действительной части спектра, построен оператор эволюции. Библ. 15.

**Ключевые слова:** процесс агрегации-дробления, кинетические уравнения, бесконечномерные системы ОДУ, линейный оператор, оператор эволюции задача Коши.

**DOI:** 10.31857/S0044466922030048

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Процессы агрегации-дробления являются частным случаем столкновительных процессов в газовой среде, основы кинетики которых были заложены еще в работах Л. Больцмана (см. [1]). Классическая модель агрегации-дробления была разработана в 30-х годах прошлого столетия Р. Беккером и В. Дёрингом (см. [2]) и была хорошо развита в последующие десятилетия (см. [3], [4]). Но интерес к исследованию этих процессов не угасает по сей день, и базовым принципом для описания столкновений остается классический закон действующих масс, согласно которому скорость протекания каждой реакции прямо пропорциональна концентрациям реагентов в степенях, равных количеству молекул или частиц одного типа, вступающих во взаимодействие. Здесь следует указать на важные труды современных исследователей по этой теме [5] и [6].

## 2. ОПИСАНИЕ НОВОЙ МОДЕЛИ АГРЕГАЦИИ-ДРОБЛЕНИЯ

Рассмотрим модель агрегации-дробления (см. [7]), описывающую систему, в которой протекают процессы присоединения мономера к агрегатам и распада агрегатов, инициированного столкновением с мономером:

$$\{n\} + \{1\} \to \{n+1\} \quad \text{с константой} \quad \alpha_n > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\{n\} + \{1\} \to \{n-1\} + 2\{1\} \quad \text{с константой} \quad \beta_n > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1.$$

Как было показано в [7], соответствующая динамика может быть описана с помощью бесконечномерной системы

$$\begin{gathered}\frac{dc_1}{dt} = -2\alpha_1 c_1^{\,2} + \beta_2 c_1 c_2 + \sum_{n=2}^{\infty} (\beta_n - \alpha_n)\, c_1 c_n,\\ \frac{dc_n}{dt} = \alpha_{n-1} c_1 c_{n-1} - (\alpha_n + \beta_n)\, c_1 c_n + \beta_{n+1} c_1 c_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1\,.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь $c_n$ — концентрация агрегата, состоящего из $n$ мономеров, а скорости отдельных процессов определяются законами химической кинетики (см. [8]). Отметим два важнейших свойства системы (2.1).

1. Наличие линейного инварианта (см. [7]), имеющего физический смысл массы системы:

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(\tau) = \text{const}. \tag{2.2}$$

2. При условии $c_1 > 0$ динамическая система (2.1) сводится к линейной с помощью замены времени $d\tau = c_1(t)\,dt$:

$$\frac{dc_1}{d\tau} = -2\alpha_1 c_1 + \beta_2 c_2 + \sum_{n=2}^{\infty}(\beta_n - \alpha_n)c_n,$$

$$\frac{dc_n}{d\tau} = \alpha_{n-1}c_{n-1} - (\alpha_n + \beta_n)c_n + \beta_{n+1}c_{n+1}, \quad n > 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

## 3. ОСНОВНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Целью настоящей работы является исследование важного частного случая, при котором все константы реакций равны. Тогда без ограничения общности значения констант можно считать равными единице.

Итак, рассмотрим ситуацию, при которой $\alpha_n = \beta_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда динамическая система примет вид

$$\begin{gathered} \frac{dc_1}{d\tau} = -2c_1 + c_2, \\ \frac{dc_n}{d\tau} = c_{n-1} - 2c_n + c_{n+1}, \quad n > 1, \quad n \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Определим множества, на которых мы будем рассматривать решения.

Определим пространство $\Omega$ как совокупность всех последовательностей $\{c_n(\tau)\}$, $n \in \mathbb{N}$, для каждого фиксированного $\tau \in \mathbb{R}$. Траектории системы (3.1) будем искать в виде функциональных последовательностей $\{c_n(\tau)\} \subset \Omega$ с непрерывно дифференцируемыми компонентами $\forall n \in \mathbb{N}$ $c_n(\tau) \in C^1(\mathbb{R})$.

В свою очередь, выделим в пространстве $\Omega$ конус $\Omega^+ \subset \Omega$ последовательностей с неотрицательными компонентами $c_n \geq 0$. И особый интерес для нас будут представлять траектории системы (3.1) такие, что для всех $\tau \geq 0$ будет верно $c_n(\tau) \geq 0$, т.е. $\{c_n(\tau)\} \in \Omega^+$.

Кроме того, нам понадобятся пространства $\Omega_M \subset \Omega$ элементов конечной массы, т.е. таких, что величина $M = \sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|$ есть конечная неотрицательная величина.

Наиболее интересным с точки зрения поиска решений нашей динамической системы является множество $\Omega_M^+ = \Omega^+ \cap \Omega_M$. Нашей целью является построение решения задачи Коши для системы (3.1) и соответственно (2.1) на этом множестве.

## 4. СВОЙСТВА ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ

### *4.1. Существование решения в $\Omega$*

Структура системы (3.1) позволяет первое уравнение разрешить относительно $c_2(\tau)$, выразив его через $c_1(\tau)$, и далее по цепочке каждое уравнение можно разрешить относительно $c_{n+1}(\tau)$, представив его как дифференциальный полином от младших компонент. Таким образом, для любой функции $\varphi(\tau) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ можно построить решение, положив $c_1(\tau) = \varphi(\tau)$, а остальные компоненты $c_2(\tau)$, $c_3(\tau)$, ... можно будет установить, последовательно разрешая систему относительно старших компонент.

Тем самым, мы установили факт существования решения системы (3.1), которое является бесконечно дифференцируемым по $\tau$, а значит, принадлежит пространству $\Omega$.

Однако такой способ построения решения не отвечает физическому смыслу задачи, так как вопрос об условиях на функцию $\varphi(\tau)$, которые обеспечили бы неотрицательность решений и ограниченность массы (2.2), остается открытым. Далее эта сложность будет преодолена посредством другого подхода.

### *4.2. Сохранение неотрицательности решений*

Если для $\tau = 0$ решение системы (2.1) принадлежит множеству $\Omega^+$, то и все решения $\{c_n(\tau)\} \subset \Omega^+$, а значит, справедливо неравенство $c_n(\tau) \geq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\tau \geq 0$.

Это свойство решения системы (3.1) наследуют от системы (2.1), которая имеет структуру уравнений химической кинетики и удовлетворяет условиям положительности (см. [9]).

### *4.3. Закон сохранения массы*

Данное свойство также наследуется от системы (2.1) и является следствием того, что и система (2.1), и система (3.1) имеют линейный инвариант (2.2).

### *4.4. Потенциальность*

Рассмотрим функционал

$$U[c] = \frac{c_1^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(c_k - c_{k+1})^2.$$

Этот функционал имеет квадратичную структуру, является положительно-определенным и определен на любом решении из $\Omega_M$, поскольку, если сходится ряд из суммы модулей с положительными коэффициентами, не стремящимися к нулю при $n \to \infty$, то сходится и ряд из квадратов компонент, а значит, ряд в определении функционала тоже сходится.

Видно, что правая часть каждого уравнения системы (3.1) совпадает с частной производной функционала $U[c]$ по соответствующей компоненте $c_n$, а именно, систему (3.1) можно переписать в виде

$$\frac{dc_n}{d\tau} = -\frac{\partial U}{\partial c_n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{или} \quad \frac{dc}{d\tau} = -\frac{\delta U}{\delta c}.$$

Важным следствием этого является то, что для всех решений из $\Omega_M$ функционал $U[c]$ монотонно убывает по $\tau$. Поскольку единственный глобальный минимум достигается при $c_n(\tau) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, единственным устойчивым стационарным решением системы является нулевое, т.е. такое, в котором все компоненты равны нулю.

### *4.5. Единственность решения*

Это свойство легко доказывается на основании предыдущего методом от противного. Действительно, предположим, что некоторому начальному условию $\{c_n(0)\}$ соответствуют две различные траектории $\{c'_n(\tau)\}$ и $\{c''_n(\tau)\}$. Тогда в силу линейности их разность тоже будет решением с нулевым начальным условием, которая, очевидно, принадлежит $\Omega_M$, и в силу свойства 4.4 будет нулевым. А следовательно, решения $\{c'_n(\tau)\}$ и $\{c''_n(\tau)\}$ должны совпасть.

## 5. ЗАДАЧА О СПЕКТРЕ И СОБСТВЕННЫХ СОСТОЯНИЯХ ОПЕРАТОРА В ПРАВОЙ ЧАСТИ ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ

Представим систему (3.1) в виде

$$\frac{dc}{d\tau} = \hat{L}c, \tag{5.1}$$

где линейный оператор $\hat{L}$ может иметь вид трехдиагональной матричной структуры:

$$\begin{Vmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & -2 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & -2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix}.$$

### *5.1. Задача о нахождении спектра и собственных состояний оператора $\hat{L}$*

Рассмотрим уравнение $\hat{L}h = \lambda h,$ где $\lambda$ – некоторое число, а $h = \{h_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, – числовая последовательность, которую будем называть *собственным состоянием оператора* $\hat{L}$. В силу первого уравнения системы (5.1) первая компонента $h$ не может равняться нулю, следовательно, без ограничения общности можно положить $h_1 = 1$.

Тогда для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ все последующие компоненты $h$ можно вычислить из уравнений системы (5.1):

$$h_2 = (\lambda + 2)h_1,$$
$$h_3 = (\lambda + 2)h_2 - h_1,$$
$$\dots$$
$$h_{n+1} = (\lambda + 2)h_n - h_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1.$$

Отсюда следует, что, во-первых, спектр оператора $\hat{L}$ содержит все действительные числа, во-вторых, для всех собственных значений компоненты собственного состояния могут быть представлены в виде полиномов от $\lambda$, причем степень полинома будет на единицу меньше номера компоненты.

Заметим, что проделанное построение возможно над полем как действительных, так и комплексных чисел. И в первом случае все компоненты собственной последовательности будут действительными.

### *5.2. Общий вид последовательности полиномов*

Исследуем структуру полиномов, составляющих компоненты собственного состояния. Для простоты в исходном рекуррентном соотношении заменим величину $\lambda$ на $\mu = \lambda + 2$. Тогда получим рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} h_1 &= 1, \\ h_2 &= \mu h_1, \\ h_{n+1} &= \mu h_n - h_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Вычислим несколько первых полиномов:

$$h_1 = 1,$$
$$h_2 = \mu,$$
$$h_3 = \mu^2 - 1,$$
$$h_4 = \mu^3 - 2\mu,$$
$$h_5 = \mu^4 - 3\mu^2 + 1,$$
$$h_6 = \mu^5 - 4\mu^3 + 3\mu,$$
$$h_7 = \mu^6 - 5\mu^4 + 6\mu^2 - 1,$$
$$h_8 = \mu^7 - 6\mu^5 + 10\mu^3 - 4\mu,$$
$$h_9 = \mu^8 - 7\mu^6 + 15\mu^4 - 10\mu^2 + 1,$$
$$h_{10} = \mu^9 - 8\mu^7 + 21\mu^5 - 20\mu^3 + 5\mu,$$
$$\dots$$

Если расположить коэффициенты полиномов в виде треугольника

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr}
&&&&&&&&&1\\
&&&&&&&&1&0\\
&&&&&&&1&0&-1\\
&&&&&&1&0&-2&-\\
&&&&&1&0&-3&0&1\\
&&&&1&0&-4&0&3&0\\
&&&1&0&-5&0&6&0&-1\\
&&1&0&-6&0&10&0&-4&0\\
&1&0&-7&0&15&0&-10&0&1\\
1&0&-8&0&21&-&-20&0&5&0
\end{array}$$

можно заметить, что ненулевые коэффициенты, расположенные на линиях, идущих от единиц слева в направлении вправо-вниз “по диагонали”, отличаются от биномиальных коэффициентов только чередующимися знаками. Отсюда можно сделать предположение, что общий вид полиномов для всех $k \in \mathbb{N}$ следующий:

$$h_{2k-1} = \sum_{m=1}^{k} \binom{k+m-2}{k-m} (-1)^{k-m} \mu^{2m-2},$$

$$h_{2k} = \sum_{m=1}^{k} \binom{k+m-1}{k-m} (-1)^{k-m} \mu^{2m-1}.$$

Доказательство этих формул сводится к проверке случая $k = 1$ и простой подстановке формул в рекуррентные соотношения (5.2), которая превращает их в верные тождества.

**5.2.1. Важным свойством собственных последовательностей является следующее:** *Если некоторому значению* $\mu'$ *соответствует собственная последовательность* $h' = \{h'_n\}$*, то* $\mu'' = -\mu'$ *будет соответствовать* $h'' = \{h''_n\}$ *такое, что* $h''_n = (-1)^{n+1} h'_n$.

**Доказательство** этого факта можно построить как на общих формулах для $h_n$, так и с помощью рекуррентного соотношения (5.2). Второй способ является более простым. Действительно, для $n = 1$, $h''_1 = h'_1 = 1$ наше утверждение справедливо, запишем рекуррентное соотношение для $n > 1$:

$$h'_{n+1} = \mu' h'_n - h'_{n-1}.$$

Умножив его на $(-1)^n$, сможем найти

$$(-1)^{n+2} h'_{n+1} = (-1)^{n+1} (-\mu') h'_n - (-1)^n h'_{n-1},,$$

что в точности дает

$$h''_{n+1} = \mu'' h''_n - h''_{n-1}.$$

### *5.3. Интересные примеры собственных последовательностей*

Если $\lambda = -2$, т.е. $\mu = 0$, то $\forall k \in \mathbb{N}$ $h_{2k-1} = (-1)^k$, $h_{2k} = 0$.

Если $\lambda = 0$, т.е. $\mu = 2$, то $\forall k \in \mathbb{N}$ $h_k = k$.

Если $\lambda = 1$, т.е. $\mu = 3$, то $\forall k \in \mathbb{N}$ $h_k = F_{2k}$ – числа Фибоначчи с четными номерами.

Если $\lambda = -2 + \sqrt{2}$, т.е. $\mu = \sqrt{2}$, то $\{h_k\} = \{1, \sqrt{2}, 1, 0, -1, -\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}, 1, \ldots\}$ – периодическая последовательность с периодом 8.

*5.4. Второе представление собственных последовательностей*

Рассмотрим снова рекуррентное соотношение (5.2).

**5.4.1.** Положим, что $\mu \in (-2; 2)$. Выполним подстановку в (4.2) искомой собственной последовательности в виде

$$h_n = A\cos\omega n + B\sin\omega n.$$

Найдем, что соотношения (5.2) становятся верными тождествами при $A = 0$, $B = \left(1 - \frac{\mu^2}{4}\right)^{-1/2}$, $\omega = \arccos\frac{\mu}{2}$, следовательно,

$$h_n(\mu) = \left(1 - \frac{\mu^2}{4}\right)^{-1/2} \sin\left(n\arccos\frac{\mu}{2}\right).$$

**5.4.2.** Пусть $\mu = 2$. Выполним подстановку в (5.2) искомой собственной последовательности в виде

$$h_n = A + Bn.$$

Найдем, что соотношения (5.2) становятся верными тождествами при $A = 0$, $B = 1$, следовательно,

$$h_n(2) = n.$$

Пусть $\mu = -2$. Тогда, согласно свойству, описанному в п. 5.2.1, найдем, что

$$h_n(-2) = (-1)^{n+1} n.$$

**5.4.3.** Пусть $\mu > 2$. Выполним подстановку в (5.2) искомой собственной последовательности в виде

$$h_n = Ae^{\omega n} + Be^{-\omega n}.$$

Снова найдем, что соотношения (5.2) становятся верными тождествами при

$$A = -B = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{4} - 1\right)^{-1/2}, \quad \omega = \ln\left(\frac{\mu}{2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - 1}\right),$$

следовательно,

$$h_n(\mu) = \left(\frac{\mu^2}{4} - 1\right)^{-1/2} \operatorname{sh}\left[n\ln\left(\frac{\mu}{2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - 1}\right)\right].$$

Если $\mu < -2$, то по свойству, описанному в п. 5.2.1, найдем, что

$$h_n(\mu) = (-1)^{n+1}\left(\frac{\mu^2}{4} - 1\right)^{-1/2} \operatorname{sh}\left[n\ln\left(-\frac{\mu}{2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - 1}\right)\right].$$

*5.5. Доказательство эквивалентности двух представлений*

Воспользовавшись несложными алгебраическими преобразованиями, найдем, что для всех значений $\mu \in \mathbb{R}$ верно $h_1 = 1$ и $h_2 = \mu$. Тогда, поскольку рекуррентные соотношения определяют последующие элементы последовательности $\{h_n(\mu)\}$ единственным образом, найдем, что все формулы для собственных последовательностей в п. 5.4 определяют те же самые многочлены, которые были найдены в п. 5.2.

*5.6. Свойства многочленов, определяющих собственные последовательности оператора $\hat{L}$*

**5.6.1. Связь с детерминантом трехдиагональной матрицы.** *Для каждого $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ многочлен $h_n(\mu)$ есть детерминант матрицы порядка $(n-1)$, полученной ограничением размерности системы* (3.1):

$$h_n(\mu) = A_{n-1},$$

*где*

$$A_n = \begin{vmatrix} \mu & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \mu & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \mu \end{vmatrix}$$

*есть определитель трехдиагональной матрицы размера n на n.*

Точно такие же структуры возникают при исследовании квантовых систем (см. [10]).

**Доказательство** легко провести по индукции. При $n = 2$ верно $h_2(\mu) = \mu = A_1$, при $n = 3$ верно $h_3(\mu) = \mu^2 - 1 = A_2$, в то же время, раскладывая определитель $\det A_n$ по первой строке, легко установить рекуррентное соотношение

$$A_n = \mu A_{n-1} - A_{n-2},$$

которое имеет тот же вид, что и рекуррентное соотношение (5.2) для полиномов, откуда и следует требуемое равенство.

**5.6.2. Число и расположение корней.** *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ многочлен $h_n(\mu)$ имеет $(n-1)$ различных корней, множество которых симметрично относительно нуля и принадлежит интервалу* $(-2;2)$.

**Доказательство.** Симметричность расположения корней относительно начала координат следует из того, что для всех нечетных $n \in \mathbb{N}$ многочлен $h_n(\mu)$ имеет ненулевые коэффициенты только при четных степенях $\mu$, и для всех четных $n \in \mathbb{N}$ многочлен $h_n(\mu)$ имеет ненулевые коэффициенты только при нечетных степенях $\mu$. Оба эти класса многочленов обладают тем свойством, что если $h_n(\mu) = 0$, то и $h_n(-\mu) = 0$.

Определим, какое количество корней имеют многочлены $h_n(\mu)$ на интервале $(-2;2)$. Рассмотрим их в виде, найденном в пп. 5.4.1:

$$h_n(\mu) = \left(1 - \frac{\mu^2}{4}\right)^{-1/2} \sin\left(n \arccos\frac{\mu}{2}\right).$$

Поскольку $\mu \in (-2;2)$, то $\arccos\frac{\mu}{2} \in (0;\pi)$, а значит, аргумент синуса $\left(n\arccos\frac{\mu}{2}\right)$ изменяется непрерывно на интервале $(0;\pi n)$, следовательно, нулевые значения будут достигаться тогда, когда аргумент синуса принимает значения на множестве $\{\pi, 2\pi, \ldots, (n-1)\pi\} \subset (0;\pi n)$, т.е. ровно $(n-1)$ раз. Итак, мы нашли, что $h_n(\mu)$ имеет $(n-1)$ различный корень, а так как $h_n(\mu)$ есть многочлен степени $(n-1)$, то других корней быть не может, и все корни находятся на нужном нам интервале. Доказательство завершено.

**5.6.3. Делимость.** *Если $m, k \in \mathbb{N}$ такие, что $m \vdots k$, то многочлены $h_m(\mu) \vdots h_k(\mu)$.*

Действительно, это можно заметить, представив многочлены из п. 5.2 в частично факторизованном виде

$$h_1 = 1,$$

$$h_2 = \mu,$$

$$h_3 = \mu^2 - 1,$$

$$h_4 = \mu\left(\mu^2 - 2\right),$$

$$h_5 = \left(\mu^2 + \mu - 1\right)\left(\mu^2 - \mu - 1\right),$$

$$h_6 = \mu\left(\mu^2 - 1\right)\left(\mu^2 - 3\right),$$

$$h_7 = \left(\mu^3 + \mu^2 - 2\mu - 1\right)\left(\mu^3 - \mu^2 - 2\mu + 1\right),$$

$$h_8 = \mu\left(\mu^2 - 2\right)\left(\mu^2 - 2 - \sqrt{2}\right)\left(\mu^2 - 2 + \sqrt{2}\right),$$

$$h_9 = \left(\mu^2 - 1\right)\left(\mu^3 - 3\mu - 1\right)\left(\mu^3 - 3\mu + 1\right),$$

$$h_{10} = \mu\left(\mu^2 + \mu - 1\right)\left(\mu^2 - \mu - 1\right)\left(\mu^2 - \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\mu^2 - \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right),$$

$$\ldots$$

Приведем строгое доказательство, но прежде нам понадобятся две леммы.

**Лемма 1.** *Для любого* $n \in \mathbb{N}$ *функция* $\cos^n x$ *представляется в виде линейной комбинации косинусов*:

$$\cos^n x = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos\left((2k-n)x\right).$$

**Доказательство** сводится к представлению косинуса в виде $\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$ и вычислению степени по формуле бинома Ньютона.

**Лемма 2.** *Для любого* $n \in \mathbb{N}$ *функция* $\cos(nx) = P_n(\cos x)$ *— многочлен степени* $n$ *от* $\cos x$.

**Доказательство** построим по индукции. Для $n = 1$ справедливо $\cos x = P_1(\cos x)$ — многочлен первой степени. Пусть существует некоторое натуральное $n$ такое, что утверждение леммы справедливо для всех $k < n$, $k \in \mathbb{N}$. Покажем, что отсюда следует и то, что утверждение справедливо и для $k = n$. Из предыдущей леммы следует, что

$$\cos^n x = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos\left((2k-n)x\right) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(nx) + \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\cos\left((2k-n)x\right).$$

Следовательно,

$$\cos(nx) = 2^{n-1}\cos^n x + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\cos\left((2k-n)x\right) =$$

$$= 2^{n-1}\cos^n x + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}P_{|2k-n|}(\cos x) = P_n(\cos x).$$

Что и требовалось доказать.

**Доказательство свойства 5.6.3.** Пусть даны некоторые натуральные $m, k \in \mathbb{N}$ такие, что $m \vdots k$, т.е. существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $m = nk$. Здесь мы временно ограничимся интервалом $\mu \in (-2; 2)$, поскольку будет удобно обратиться к представлению 5.4.1 для многочленов $h_n(\mu)$. Запишем отношение

$$\frac{h_m(\mu)}{h_k(\mu)} = \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}, \quad \text{где} \quad x = k\arccos\frac{\mu}{2}.$$

Докажем, что это отношение является многочленом. Для этого представим синусы по формулам Эйлера (через экспоненту мнимого аргумента) и выполним деление:

$$\frac{h_m(\mu)}{h_k(\mu)} = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{e^{ix} - e^{-ix}} = \sum_{l=0}^{n}\left(e^{ix}\right)^l\left(e^{-ix}\right)^{n-l} = \sum_{l=0}^{n} e^{i(2l-n)x} =$$

Последнюю сумму преобразуем, сложив ее с суммой, в которой слагаемые взяты в обратном порядке, и разделив результат пополам. Продолжим предыдущее равенство:

$$= \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{n}\left(e^{i(2l-n)x} + e^{-i(2l-n)x}\right) = \sum_{l=0}^{n}\cos\left((2l-n)\,x\right) =$$

И, согласно лемме 2,

$$= \sum_{l=0}^{n} P_{|2l-n|}(\cos x) = \sum_{l=0}^{n} P_{|2l-n|}\left(\cos\left(k\arccos\frac{\mu}{2}\right)\right) = \sum_{l=0}^{n} P_{|2l-n|}\left(P_k\left(\frac{\mu}{2}\right)\right) = Q(\mu),$$

где $Q(\mu)$ – многочлен, поскольку сумма и суперпозиция многочленов есть многочлен. В силу того, что исходное представление многочленов $h_m(\mu)$ является одним и тем же на всем множестве $\mu \in \mathbb{R}$, то и свойство $h_m(\mu) \vdots h_k(\mu)$ будет справедливым при всех значениях аргумента $\mu$. Утверждение доказано.

**5.6.4.** *Последовательность $h_n(\mu)$ является ограниченной при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда $\mu \in (-2; 2)$.*

**Доказательство** этого свойства является наиболее простым из пяти рассмотренных в этой работе. Если $\mu \in (-2; 2)$, то из представления 5.4.1 для всех $n \in \mathbb{N}$ верно

$$|h_n(\mu)| \le \left(1 - \frac{\mu^2}{4}\right)^{-1/2}.$$

Очевидно, это ограниченная величина для любого фиксированного $\mu$ при $n \to \infty$. Рассмотрим остальные значения $\mu$.

Если $|\mu| = 2$, то, согласно 5.4.2, имеем

$$|h_n(\mu)| = n,$$

$$|h_n(\mu)| \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

И, наконец, если $|\mu| > 2$, то, согласно 5.4.3, имеем

$$|h_n(\mu)| = \left(\frac{\mu^2}{4} - 1\right)^{-1/2} \operatorname{sh}\left[n\ln\left(\frac{|\mu|}{2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - 1}\right)\right].$$

Также $|h_n(\mu)| \to \infty$ при $n \to \infty$, поскольку $\ln\left(\frac{|\mu|}{2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - 1}\right) > 0$ для всех $\mu$ таких, что $|\mu| > 2$. Доказательство завершено.

**5.6.5. Периодичность по** $n$. *Последовательность $\{h_n(\mu)\}$ является периодической тогда и только тогда, когда $\mu$ есть корень многочлена $h_k(\mu)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, причем ее минимальный период не превосходит $2k$.*

**Доказательство.** Пусть $\mu$ есть корень многочлена $h_k(\mu)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, тогда, во-первых, $\mu \in (-2; 2)$, согласно свойству 5.6.2, во-вторых, существует такое $m \in \mathbb{N}$, что аргумент под синусом во втором представлении для $h_k(\mu)$, кратный числу $\pi$, есть $k\arccos\frac{\mu}{2} = \pi m$. Тогда рассмотрим

$$h_n(\mu) = \left(1 - \frac{\mu^2}{4}\right)^{-1/2} \sin\left(n\frac{\pi m}{k}\right).$$

Вычислим разность

$$h_{n+2k}(\mu) - h_n(\mu) = \left(1 - \frac{\mu^2}{4}\right)^{-1/2} \left(\sin\left((n+2k)\frac{\pi m}{k}\right) - \sin\left(n\frac{\pi m}{k}\right)\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{\mu^2}{4}\right)^{-1/2} \left(\sin\left(\frac{\pi n m}{k} + 2\pi m\right) - \sin\left(\frac{\pi n m}{k}\right)\right) = 0.$$

Достаточность доказана.

Теперь рассмотрим некоторую периодическую последовательность $h_n(\mu)$ с периодом $t$ при некотором фиксированном значении $\mu$. Периодичность означает ограниченность, следовательно, $\mu \in (-2; 2)$, и для любых $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$h_n(\mu) = h_{n+t}(\mu),$$

$$\sin\left(n \arccos\frac{\mu}{2}\right) = \sin\left((n+t)\arccos\frac{\mu}{2}\right).$$

Далее из равенства синусов следует рассмотреть два варианта.

1. Для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ такие, что

$$n \arccos\frac{\mu}{2} + (n+t)\arccos\frac{\mu}{2} = (2m_1 + 1)\pi,$$

$$(n+1)\arccos\frac{\mu}{2} + (n+t+1)\arccos\frac{\mu}{2} = (2m_2 + 1)\pi.$$

Вычтем одно равенство почленно из второго и разделим результат на $2\pi$, получим

$$\frac{1}{\pi}\arccos\frac{\mu}{2} = m_2 - m_1.$$

Поскольку $\mu \in (-2; 2)$, левая часть $\frac{1}{\pi}\arccos\frac{\mu}{2} \in (0;1)$, а разность в правой части равенства есть целое число, т.е. это равенство недостижимо, мы получили противоречие. Первый вариант с аргументами синуса не реализуется.

2. Для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что

$$(n+t)\arccos\frac{\mu}{2} = n\arccos\frac{\mu}{2} + 2\pi m,$$

т.е.

$$\arccos\frac{\mu}{2} = \frac{2\pi m}{t}.$$

Тогда для любого $k$ из $\mathbb{N}$ такого, что $(2k) \vdots t$, многочлен

$$h_k(\mu) = \left(1 - \frac{\mu^2}{4}\right)^{-1/2} \sin\left(k\frac{2\pi m}{t}\right) = 0.$$

Таким образом, $\mu$ есть корень многочлена $h_k(\mu)$, что завершает доказательство свойства 5.6.5.

**5.6.6. Постоянство интеграла от модуля**. *Для всех $n \in \mathbb{N}$ верно*

$$\int_{-2}^{2} |h_n(\mu)|\, d\mu = 4.$$

**Доказательство** сводится к непосредственному вычислению интеграла

$$\int_{-2}^{2} |h_n(\mu)|\, d\mu = \int_{-2}^{2} \left|\sin\left(n\arccos\frac{\mu}{2}\right)\right| \left(1 - \frac{\mu^2}{4}\right)^{-1/2} d\mu.$$

Поскольку подынтегральное выражение имеет конечный предел на границах интегрирования, интеграл сходится и допускает замену переменных $\eta = \arccos\dfrac{\mu}{2}$, которая дает

$$\int_{-2}^{2} |h_n(\mu)|\, d\mu = 2\int_{0}^{\pi} |\sin(n\eta)|\, d\eta = 2n\int_{0}^{\pi/n} |\sin(n\eta)|\, d\eta = 4.$$

Что и требовалось доказать.

**5.6.7. Ортонормированность и полнота $\{h_n(\mu)\}$ как системы функций.** *На отрезке* $\mu \in [-2;2]$ *введем меру с плотностью*

$$g(\mu) = \frac{1}{\pi}\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{4}}. \tag{5.6}$$

*Система полиномов* $h_n(\mu)$ *является ортонормированной по этой мере системой функций*:

$$\int_{-2}^{2} h_n(\mu)\, h_k(\mu)\, g(\mu)\, d\mu = \delta_{nk},$$

*где* $\delta_{nk}$ *– символ Кронекера*.

**Доказательство** свойства проводится непосредственным вычислением интеграла с использованием второго представления 5.4.1 для полиномов $h_n(\mu)$. Также легко заметить, что поскольку функции $h_n(\mu)$ представляют собой полиномы с последовательно возрастающими степенями, то их система полна на множестве функций, допускающих представление в виде степенного ряда, сходящегося на интервале $(-2;2)$.

Плотность меры (5.6) позволяет установить близкую связь построенной системы полиномов с полиномами Чебышёва II рода (см. [11], [12]), у которых для сравнения плотность меры пропорциональна функции $\sqrt{1-\mu^2}$, а сами полиномы рассматриваются на отрезке $[-1;1]$. Более подробные сведения о них можно найти в [11], [12].

**5.6.8. Ортогональность $\{h_n(\mu)\}$ как континуума последовательностей.** *Рассмотрим последовательность полиномов* $\{h_n(\mu)\}$ *как обобщенные функции на множестве бесконечно дифференцируемых функций с носителем, содержащимся в интервале* $(-2;2)$. *Тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n(\mu)\, h_n(\mu') = \frac{\delta(\mu - \mu')}{g(\mu)}$$

*будет сходиться в слабом смысле к дельта-функции Дирака, нормированной на плотность меры, введенной в* п. 5.6.7. Не исключено, что класс объектов, для которого справедливо указанное равенство, можно расширить, однако это выходит за рамки настоящего исследования.

**Доказательство.** Возьмем пробную функцию $\varphi(\mu')$, относящуюся к классу бесконечно дифференцируемых функций с носителем, содержащимся в интервале $(-2;2)$. Вычисляя непосредственно с использованием свойства 5.6.7 интегралы от обеих частей предыдущего равенства, умноженных на $\varphi(\mu')$:

$$\int_{-2}^{2} \sum_{n=1}^{\infty} h_n(\mu)\, h_n(\mu')\, \varphi(\mu')\, d\mu' = \int_{-2}^{2} \frac{\delta(\mu - \mu')}{g(\mu)}\, \varphi(\mu')\, d\mu',$$

получим, что обе части равенства равны величине $\varphi(\mu)/g(\mu)$, т.е. верное равенство. Что и требовалось доказать.

## 6. ОПЕРАТОР ЭВОЛЮЦИИ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ

Итак, мы нашли, что каждому $\lambda \in \mathbb{R}$ соответствует собственная последовательность $h_n(\mu)$, где $\mu = \lambda + 2$, и, таким образом, найдется решение системы (3.1)

$$c_n(\tau) = e^{(\mu-2)\tau}\, h_n(\mu),$$

или, что то же самое,

$$c_n(\tau) = e^{\lambda\tau} h_n(\lambda + 2).$$

Отметим, что с точки зрения исходной модели интерес представляют только те решения, в которых $c_n(\tau)$ – ограниченная величина при $n \to \infty$, т.е. по свойству 4.6.4 такие, что $\mu \in (-2;2)$ или $\lambda \in (-4;0)$. Встает вопрос о классе решений, представимых в виде

$$c_n(\tau) = \int_{-2}^{2} \varphi(\mu) h_n(\mu) e^{(\mu-2)\tau} d\mu, \tag{6.1}$$

где $\varphi(\mu)$ – некоторая интегрируемая на интервале $(-2;2)$ функция. Как такое решение будет соотноситься с множествами, введенными вначале, а именно, $\Omega^+$ и $\Omega_M$? Далее будет дан ответ на этот вопрос, но прежде рассмотрим решение (6.1), соотнеся его с начальным условием, которое, очевидно, соответствует $\tau = 0$. Итак,

$$c_n(0) = \int_{-2}^{2} \varphi(\mu) \left(1 - \frac{\mu^2}{4}\right)^{-1/2} \sin\left(n \arccos\frac{\mu}{2}\right) d\mu.$$

Выполним замену $\xi = \arccos\frac{\mu}{2}$, получим

$$c_n(0) = 2\int_{0}^{\pi} \varphi(2\cos\xi) \sin(n\xi)\, d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sin(n\xi)\, d\xi,$$

где $f_1(\xi) = \pi\,\mathrm{sign}(\xi)\varphi(2\cos\xi)$ – нечетная интегрируемая функция. Заметим, что $c_n(0)$ есть не что иное, как коэффициент ряда Фурье (см. [13]) для функции $f_1(\xi)$. Одновременно $c_n(0)$ – это начальное условие задачи Коши для системы (3.1). Следовательно, по коэффициентам $c_n(0)$ мы можем восстановить функцию $f_1(\xi)$, а значит, и функцию $\varphi(\mu)$:

$$f_1(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) \sin(n\xi), \quad \xi \in (-\pi;\pi),$$

$$\varphi(\mu) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) \sin\left(n \arccos\frac{\mu}{2}\right), \quad \mu \in (-2;2),$$

и с помощью (6.1) построить решение, отвечающее начальному условию $\{c_n(0)\}$:

$$c_n(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2} \sum_{k=1}^{\infty} c_k(0) \sin\left(k \arccos\frac{\mu}{2}\right) \sin\left(n \arccos\frac{\mu}{2}\right) e^{(\mu-2)\tau} \left(1 - \frac{\mu^2}{4}\right)^{-1/2} d\mu.$$

Наложим на начальное условие требование, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(0)$ сходился, в частности, это требование выполняется для любых $\{c_n(0)\} \in \Omega_M$. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(0) \sin\left(k \arccos\frac{\mu}{2}\right)$ будет сходиться равномерно по параметру $\mu \in (-2;2)$, и интегрирование можно будет внести под знак суммы. Получим

$$c_n(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} H_{nk}(\tau) c_k(0), \tag{6.2}$$

где

$$H_{nk}(\tau) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} e^{(\cos\xi - 1)2\tau} \sin(n\xi) \sin(k\xi)\, d\xi. \tag{6.3}$$

Согласно свойству (4.5), построенное решение будет единственным для задачи Коши с начальным условием $\{c_n(0)\} \in \Omega_M$, кроме того, мы можем в пространстве $\Omega$ определить оператор $\hat{H}(\tau)$ с матричными элементами $H_{nk}(\tau)$ – это будет оператор эволюции для системы (5.1):

$$\frac{d\hat{H}}{d\tau} = \hat{L}\hat{H}.$$

Заметим, что условие принадлежности $\{c_n(0)\}$ множеству $\Omega_M$ можно ослабить, но это выходит за рамки задачи, поставленной в этой работе.

## 7. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА ЭВОЛЮЦИИ

**7.1. Симметрия.** Оператор $\hat{H}$ обладает симметрией относительно перестановки индексов в матричных элементах: $H_{nk} = H_{kn}$.

**7.2. Сходимость.** Матричный элемент оператора $\hat{H}(\tau)$, используя четность подынтегрального выражения по переменной $\xi$, можно представить в виде

$$H_{nk}(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(\cos\xi-1)2\tau}\sin(n\xi)\sin(k\xi)\,d\xi.$$

Получим, что для всякого $n$ элементы $H_{nk}$ будут коэффициентами ряда Фурье (см. [5]) для функции $f_2(\xi) = e^{(\cos\xi-1)2\tau}\sin(n\xi)$ с параметром $\tau$. Так как для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\tau > 0$ функция $f_2(\xi)$ является бесконечно дифференцируемой по $\xi$, то $H_{nk} = H_{kn} \to 0$ быстрее любой степени $k$.

**7.3. Положительность.** Для того чтобы выполнялось свойство сохранения неотрицательности решения, следует потребовать, чтобы оператор эволюции отображал конус $\Omega^+$ в себя: $\hat{H}(\tau) : \Omega^+ \to \Omega^+$, для этого необходимо и достаточно доказать неотрицательность матричных элементов $H_{nk}$.

**Утверждение 7.3.** *Для любых* $n,k \in \mathbb{N}$ *и* $\tau \ge 0$ *верно* $H_{nk}(\tau) \ge 0$*, причем равенство нулю достигается только при* $\tau = 0$ *и* $n \ne k$.

**Доказательство.** Пусть $\tau = 0$, тогда

$$H_{nk}(0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\xi)\sin(k\xi)\,d\xi = \delta_{nk},$$

где $\delta_{nk}$ – символ Кронекера, так как функции $\sin(n\xi)$ и $\sin(k\xi)$ являются ортогональными на $[-\pi;\pi]$ при $n \ne k$ в $L_2([-\pi;\pi])$ (см. [5]).

Будем рассматривать случай $\tau > 0$. Воспользуемся тем, что $2\sin(n\xi)\sin(k\xi) = \cos((n-k)\xi) - \cos((n+k)\xi)$, тогда $H_{nk}(\tau)$ можно будет представить в виде

$$H_{nk} = \Delta_{n-k} - \Delta_{n+k}, \tag{7.1}$$

где

$$\Delta_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(\cos\xi-1)2\tau}\cos(m\xi)\,d\xi. \tag{7.2}$$

Причем в силу четности косинуса для любого целого $m$ верно равенство $\Delta_{-m} = \Delta_m = \Delta_{|m|}$.

Заметим, что разность индексов $\Delta_m$ в представлении $H_{nk}$ всегда четная:

$$(n-k) - (n+k) = -2k.$$

Поэтому для доказательства того, что $H_{nk} > 0$, достаточно будет показать, что $\Delta_m$ есть величина положительная и строго убывающая к нулю при возрастании индекса $m$ с шагом 2:

$$\Delta_{m+2} - \Delta_m < 0. \tag{7.3}$$

Проще всего здесь показать, что $\Delta_m$ есть бесконечно малая величина при $m \to \infty$. Действительно $\Delta_m \to 0$ как коэффициент Фурье бесконечно дифференцируемой функции $f_3 = e^{(\cos\xi - 1)2\tau}$.

Теперь следует оценить знак величин $\Delta_0$ и $\Delta_1$:

$$\Delta_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(\cos\xi-1)2\tau} d\xi > 0,$$

как интеграл от положительной функции. И после несложных преобразований аналогично найдем

$$\Delta_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(\cos\xi-1)2\tau}\cos\xi d\xi = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} e^{(\cos\xi-1)2\tau}\cos\xi d\xi = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} e^{(\cos\xi-1)2\tau}\cos\xi d\xi + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} e^{(\cos\xi-1)2\tau}\cos\xi d\xi =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} e^{(\cos\xi-1)2\tau}\cos\xi d\xi - \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} e^{(-\cos\xi-1)2\tau}\cos\xi d\xi = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \left(e^{(\cos\xi-1)2\tau} - e^{(-\cos\xi-1)2\tau}\right)\cos\xi d\xi > 0.$$

В результате простого преобразования мы также получили интеграл от положительной функции.

Снова воспользуемся тем, что $\Delta_m$ есть коэффициенты Фурье функции $f_3$, и найдем их в явном виде. Причем удобнее здесь будет воспользоваться не явным интегрированием, а разложением экспоненты в ряд Тейлора по степеням косинусов, а затем воспользоваться леммой 2. Итак,

$$f_3 = e^{(\cos\xi-1)2\tau} = e^{-2\tau}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(2\tau)^m \cos^m\xi.$$

Согласно лемме 2, для степеней косинуса найдем, что

$$f_3 = e^{-2\tau}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\tau^m}{m!}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\cos\left((2k-m)\xi\right).$$

Далее будет удобно поменять порядок суммирования и затем внешнюю сумму разбить на три группы слагаемых, соответствующих, во-первых, косинусу с нулевым аргументом, во-вторых, косинусам $\cos(n\xi)$ с четным индексам $n$, и, в-третьих, нечетным индексам $n$. Упрощая, получим

$$f_3 = e^{-2\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}\frac{\tau^{2k}}{(2k)!} + e^{-2\tau}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\tau^{2m}}{(2m)!}\binom{2m}{m+k}\cos(2k) +$$
$$+ e^{-2\tau}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\tau^{2m+1}}{(2m+1)!}\binom{2m+1}{m+k}\cos((2k+1)).$$

Выражая биномиальные коэффициенты через факториалы, найдем следующие величины:

$$\Delta_{2k} = 2e^{-2\tau}\sum_{l=k}^{\infty}\frac{\tau^{2l}}{(l+k)!(l-k)!},$$

$$\Delta_{2k+1} = 2e^{-2\tau}\sum_{l=k}^{\infty}\frac{\tau^{2l+1}}{(l+k+1)!(l-k)!}$$

для всех $k \in \{0;\mathbb{N}\}$.

Завершающим шагом доказательства будет оценка знака разности (7.3), исходя из полученных представлений для $\Delta_m$. Выполним ее отдельно для четных и нечетных индексов:

– для четных

$$\Delta_{2k+2} - \Delta_{2k} = 2e^{-2\tau}\left[\sum_{l=k+1}^{\infty}\frac{\tau^{2l}}{(l+k+1)!(l-k-1)!} - \sum_{l=k}^{\infty}\frac{\tau^{2l}}{(l+k)!(l-k)!}\right] =$$

$$= 2e^{-2\tau}\left[-\frac{\tau^{2k}}{(2k)!} + \sum_{l+1=k}^{\infty}\tau^{2l}\left(\frac{1}{(l+k+1)!(l-k-1)!} - \frac{1}{(l+k)!(l-k)!}\right)\right] =$$

$$= 2e^{-2\tau}\left[-\frac{\tau^{2k}}{(2k)!} + \sum_{l+1=k}^{\infty}\tau^{2l}\left(-\frac{2k+1}{(l+k+1)!(l-k)!}\right)\right] < 0;$$

— для нечетных

$$\Delta_{2k+3} - \Delta_{2k+1} = 2e^{-2\tau}\left[\sum_{l=k+1}^{\infty}\frac{\tau^{2l+1}}{(l+k+2)!(l-k-1)!} - \sum_{l=k}^{\infty}\frac{\tau^{2l+1}}{(l+k+1)!(l-k)!}\right] =$$

$$= 2e^{-2\tau}\left[-\frac{\tau^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{l=k+1}^{\infty}\tau^{2l+1}\left(\frac{1}{(l+k+2)!(l-k-1)!} - \frac{1}{(l+k+1)!(l-k)!}\right)\right] =$$

$$= 2e^{-2\tau}\left[-\frac{\tau^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{l=k+1}^{\infty}\tau^{2l+1}\left(-\frac{2k+2}{(l+k+1)!(l-k)!}\right)\right] < 0.$$

Итак, мы получили требуемое. Доказательство завершено.

### *7.4. Связь с модифицированными функциями Бесселя*

Из выражения (7.2) можно заключить, что величина $\Delta_m$ отличается от интегрального представления модифицированных функций Бесселя I рода (см. [14], [15]) только экспоненциальным множителем, не зависящим от переменной интегрирования, и может быть представлена в виде

$$\Delta_m = 2e^{-2\tau}I_m(2\tau).$$

Следовательно, для элементов оператора эволюции (7.3) получим следующее представление:

$$H_{nk}(\tau) = 2e^{-2\tau}\left(I_{|n-k|}(2\tau) - I_{n+k}(2\tau)\right). \tag{7.4}$$

## 8. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Обратимся снова к замене времени, выполненной в п. 2.2. Для возврата к исходной переменной времени $t$ необходимо указать связь между переменными времени $t$ и $\tau$. Исходя из дифференциального равенства $d\tau = c_1(t)\,dt$ и выражая $c_1(\tau)$ из (6.2), найдем, что

$$t(\tau) = \int_0^{\tau}\frac{d\tau'}{c_1(\tau')}, \tag{8.1}$$

где

$$c_1(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty}H_{1k}(\tau)c_k(0). \tag{8.2}$$

В силу свойства положительности, если $c_1(0) > 0$ и $c_n(0) \geq 0$ для всех натуральных $n > 1$, то подынтегральная функция в (8.1) строго положительна, и $t = t(\tau)$ есть строго монотонная функция, а следовательно, существует единственная обратная ей функция $\tau = \tau(t)$, позволяющая в выражениях для концентраций $\{c_n(\tau)\}$ вернуться к исходной переменной времени:

$$c_n(t) = c_n(\tau(t)).$$

Уточнить эту зависимость в общем виде не представляется возможным, однако не исключено, что в частных случаях ее можно будет представить в относительно не слишком сложных функциях.

В заключение сформулируем основной результат.

**Теорема.** *Для любого начального условия* $\{c_n(0)\} \in \Omega_{\mathrm{M}}^{+}$ *существует единственное решение* $\{c_n(t)\} \in \Omega_{\mathrm{M}}^{+}$ *задачи Коши для системы* (3.1), *определяемое формулами* (6.2) *с оператором эволюции, имеющим элементы* (7.4), *с учетом замены времени* (8.1), (8.2).

**Доказательство.** Существование решения конструктивно показано в разд. 5, принадлежность множеству $\Omega_{\mathrm{M}}^{+}$ следует из свойства 7.3. И, наконец, единственность доказана в п. 4.5. Доказательство завершено.

## 9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье простроен оператор эволюции и решена задача Коши для важнейшего из частных случаев системы (2.1). Можно предположить, что на основании этого результата можно будет расширить допустимое множество констант и получить результаты, относящиеся к задаче Коши в более общем случае. Также представляют интерес другие свойства системы (2.1), которые еще только предстоит исследовать.

Автор выражает глубокую признательность Ю.Н. Орлову и В.В. Веденяпину за обсуждения этой работы, которые, несомненно, способствовали ее улучшению.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Больцман Л.* Дальнейшие исследования теплового равновесия между молекулами газа, Избранные труды. М.: Наука, 1984, с. 125–189. пер. с нем.: *L. Boltzmann*, Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen. Wien. Ber. 1872. V. 66. P. 275–370.
2. *Becker R., Döring W.* Kinetische behandlung der keimbil-dung in übersättigen dämpfern // Ann. Physik. 1935. V. 24. P. 719–752.
3. *Flory P.J.* Principles of Polymer Chemistry. Cornell Univer. New York: Press, Ithaca, 1953.
4. *Ball J., Carr J., Penrose O.* The Becker-Döring cluster equations: basic properties and asymptotic behavior of solutions // Comm. Math. Phys. 1986. V. 104. P. 657–692.
5. *Малышев В.А., Пирогов С.А.* Обратимость и необратимость в стохастической химической кинетике // Успехи матем. наук. 2008. Т. 63. № 1. С. 3–36.
6. *Веденяпин В.В., Аджиев С.З.* Энтропия по Больцману и Пуанкаре // Успехи матем. наук. 2014. Т. 69. № 6. С. 45–80.
7. *Батищева Я.Г.* Кинетические уравнения и подходы к их анализу в новой модели процессов агрегации-дробления // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 36. 19 с.
8. *Вольперт А.И., Худяев С.И.* Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. М.: Наука, 1975. 394 с.
9. *Веденяпин В.В.* О разрешимости в целом задачи Коши для некоторых дискретных моделей уравнения Больцмана // Докл. АН СССР. 1974. Т. 215. № 1. С. 21–23.
10. *Борисов Л.А., Орлов Ю.Н.* Анализ зависимости конечнократных аппроксимаций равновесной матрицы плотности гармонического осциллятора и функции Вигнера от правил квантования // Теор. и матем. физ. 2015. Т. 184. № 1. С. 106–116.
11. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. Долгопрудный: “Интеллект”, 2007. 344 с.
12. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 1962. 500 с.
13. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. М.: Наука, 1983. Т. 2. 448 с.
14. *Ватсон Г.* Теория бесселевых функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. Т. 1. 799 с.
15. *Abramowitz M., Stegun I.A.* (Eds.). Modified Bessel function ***I*** and ***K*** / Handbook of Mathematical Function with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9$^{\text{th}}$ printing. New York: Dover, 1972. § 9.6. P. 374–377.