ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 3, с. 381–390

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.977.5

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА С ФРЕНЕЛЕВСКИМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ[1)]

 А. Ю. Чеботарев

690041 Владивосток, ул. Радио, 7, Институт прикладной математики ДВО РАН, Россия

e-mail: cheb@iam.dvo.ru, chebotarev.ayu@dvfu.ru

Поступила в редакцию 13.04.2021 г.
Переработанный вариант 31.05.2021 г.
Принята к публикации 09.10.2021 г.

Рассматривается класс задач оптимального управления для системы нелинейных эллиптических уравнений, моделирующих радиационный теплообмен с френелевскими условиями сопряжения на поверхностях разрыва коэффициента преломления. На основе оценок решения краевой задачи доказана разрешимость задач оптимального управления. Выполнен анализ существования и единственности решения линеаризованной задачи с условиями сопряжения и доказана невырожденность условий оптимальности. В качестве примера рассмотрена задача управления с граничным наблюдением и показана релейность оптимального управления. Библ. 37.

Ключевые слова: стационарные уравнения радиационного теплообмена, френелевские условия сопряжения, задачи оптимального управления, условия оптимальности, релейное управление.

DOI: 10.31857/S004446692203005X

1. ВВЕДЕНИЕ

Оптимизация процессов радиационно-диффузионного (сложного) теплообмена важна для инженерных и медицинских приложений (см. [1]–[6]). При моделировании таких процессов хорошую эффективность показало использование диффузионного P_1-приближения для уравнения переноса излучения. Анализ краевых задач, задач оптимального управления и обратных задач для уравнений сложного теплообмена с P_1-приближением уравнения переноса излучения представлен в [7]–[25]. Отметим также интересные результаты А.А. Амосова по анализу краевых задач, связанных с радиационным теплообменом (см. [26]–[31]).

Дальнейшее развитие моделирования и анализа процессов сложного теплообмена связано с рассмотрением многокомпонентных областей с кусочно-постоянными параметрами среды. В [32]–[34] представлены построение модели сложного теплообмена с учетом эффектов отражения и преломления на поверхностях разрыва коэффициента преломления и анализ краевых и обратных задач.

Настоящая работа посвящена анализу задач оптимального управления для указанной нелинейной модели сложного теплообмена.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 формулируется краевая задача для уравнений сложного теплообмена с условиями сопряжения, определяются пространства и операторы. Задача оптимального управления формализуется как задача минимизации слабо полунепрерывного снизу функционала на решениях системы уравнений с операторными коэффициентами. Разрешимость задачи управления доказана в разд. 3. Невырожденные условия оптимальности получены в разд. 4 на основе доказанной эпиморфности производной оператора ограничений. В разд. 5 рассмотрено приложение полученных результатов к задаче оптимального управления с граничным наблюдением. Показано, что условия оптимальности влекут релейность оптимального

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-01-00113а) и Минобрнауки РФ (доп. соглашение 075-02-2020-1482-1).

управления. Доказательство важных результатов о существовании и единственности линеаризованной задачи с условиями сопряжения и положительности температурного поля представлено в разд. 6.

2. ПОСТАНОВКА И ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Для описания процесса радиационного теплообмена в многокомпонентной среде рассмотрим, следуя [32], ограниченную липшицеву область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, содержащую конечное число липшицевых подобластей Ω_j, $j = 1,2,\ldots,m$, замыкания которых не пересекаются. Подобласть

$$\Omega_0 = \Omega \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{m} \bar{\Omega}_j \right)$$

является внешней, при этом $\Gamma = \partial\Omega \subset \Gamma_0 = \partial\Omega_0$, $\Gamma_j = \partial\Omega_j \subset \Gamma_0$, $j = 1,2,\ldots,m$.

В каждой из областей Ω_j, $j = 0,1,\ldots,m$, температура θ и интенсивность теплового излучения φ удовлетворяют уравнениям

$$-a\Delta\theta + b(\theta^3|\theta| - \varphi) = f, -\alpha\Delta\varphi + \beta(\varphi - \theta^3|\theta|) = g_0. \tag{1}$$

Положительные физические параметры a, b, α и β, описывающие свойства среды, определяются стандартным образом (см. [32]). Указанные параметры так же, как и коэффициент преломления $n > 0$, принимают постоянные значения в областях Ω_j, $j = 0,1,\ldots,m$, и при этом, что важно, $b = \sigma\beta n^2$, $\sigma = \mathrm{Const} > 0$. Функции f и g_0 моделируют тепловые источники и источники излучения соответственно.

На внешней границе $\Gamma = \partial\Omega$ задаются граничные условия

$$\{a\partial_\nu\theta + c(\theta - \theta_b)\}\big|_\Gamma = 0, \quad \{\alpha\partial_\nu\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4)\}\big|_\Gamma = 0, \tag{2}$$

где θ_b – заданная температура, c – коэффициент теплопередачи, $0 < \gamma \le 1/2$ – параметр, зависящий от коэффициента излучения. Через ∂_ν обозначаем производную в направлении внешней нормали ν к границе.

Выведенные в [32] условия сопряжения для температуры $\theta_j = \theta|_{\Omega_j}$ и интенсивности излучения $\varphi_j = \varphi|_{\Omega_j}$ на внутренних границах $\Gamma_j = \partial\Omega_j$, $j = 1,2,\ldots,m$, имеют вид

$$\theta_0 = \theta_j, \quad a_0\partial_\nu\theta_0 = a_j\partial_\nu\theta_j, \tag{3}$$

$$n_0^2\alpha_0\partial_\nu\varphi_0 = n_j^2\alpha_j\partial_\nu\varphi_j, \quad h_j(\varphi_j - \varphi_0) = \alpha_0\partial_\nu\varphi_0. \tag{4}$$

Здесь $\{a_j, \alpha_j, n_j\} = \{a, \alpha, n\}|_{\Omega_j}$, $h_j > 0$ – параметры, зависящие от коэффициентов отражения на внутренних границах (см. [32]).

Далее через L^s, $1 \le s \le \infty$, обозначаем пространства Лебега, через $H^s = W_2^s$ – пространства Соболева. Пусть $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$ и

$$W = \{w \in H : w_j = w|_{\Omega_j} \in H^1(\Omega_j),\ j = 0,1,\ldots,m\} \subset L^6(\Omega).$$

Пространство H отождествляем с сопряженным пространством H', $V \subset W \subset H = H' \subset \subset W' \subset V'$. Здесь W', V' – пространства, сопряженные с W и V соответственно. Через (f, v) обозначаем значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$ и скалярное произведение в H, если $f, v \in H$. Для норм и скалярных произведений используем обозначения

$$\|v\|^2 = (v, v), \quad (v, w)_j = (v, w)_{L^2(\Omega_j)}, \quad \|v\|_j^2 = (v, v)_j, \quad (v, w)_W = \sum_{j=0}^{m} (v, w)_{H^1(\Omega_j)}.$$

Пусть исходные данные удовлетворяют следующим условиям:

(i) $c, \gamma \in L^\infty(\Gamma)$, $c \ge c_0 > 0$, $\gamma \ge \gamma_0 > 0$, $c_0, \gamma_0 = \mathrm{const}$;

(ii) $\{a, b, \alpha, \beta, n\}|_{\Omega_j} = \{a_j, b_j, \alpha_j, \beta_j, n_j\}$, $b = \sigma\beta n^2$, $\sigma = \text{Const} > 0$;

(iii) $0 \le \theta_b \in L^\infty(\Gamma)$; $f \in H$, $g := \sigma n^2 g_0 \in H$.

Согласно [33], [34], введем следующие операторы и функционалы $A_1 : V \to V'$, $A_2 : W \to W'$, $f_b \in V'$, $g_b \in W'$, используя равенства

$$(A_1\theta, \eta) = (a\nabla\theta, \nabla\eta) + \int_\Gamma c\theta\eta d\Gamma,$$

$$(A_2\varphi, w) = \sigma\sum_{j=0}^{m}\alpha_j n_j^2(\nabla\varphi, \nabla w)_j + \sigma n_0^2\int_\Gamma \gamma\varphi w d\Gamma + \sigma n_0^2\sum_{j=1}^{m} h_j\int_{\Gamma_j}(\varphi_0 - \varphi_j)(w_0 - w_j)d\Gamma,$$

$$(f_b, \eta) = \int_\Gamma c\theta_b\eta d\Gamma, \quad (g_b, w) = \sigma n_0^2\int_\Gamma \gamma\theta_b^4 w d\Gamma,$$

которые справедливы для всех $\theta, \eta \in V$ и $\varphi, w \in W$. Здесь $\{\varphi_j, w_j\} = \{\varphi, w\}|_{\Omega_j}$.

Билинейная форма $(A_1 u, v)$ определяет норму, эквивалентную стандартной норме пространства V, и поэтому полагаем $\|v\|_V^2 = (A_1 v, v)$. Справедливы следующие неравенства о непрерывности вложений $V \subset L^s(\Omega)$, $W \subset L^s(\Omega)$, $1 \le s \le 6$:

$$\|v\|_{L^s(\Omega)} \le K_1\|v\|_V, \quad v \in V, \quad \|w\|_{L^s(\Omega)} \le K_2\|w\|_W, \quad w \in W, \quad 1 \le s \le 6.$$

Через $[t]^q = |t|^q \operatorname{sign} t$, $q > 0$, $t \in \mathbb{R}$, обозначаем монотонную степенную функцию. Используя краевые условия (2) и условия сопряжения (3), (4) так же, как и в [33], получаем операторную формулировку краевой задачи.

Определение. Пара $\{\theta, \varphi\} \in V \times W$ называется *слабым решением* задачи (1)–(4), если

$$A_1\theta + b([\theta]^4 - \varphi) = f_b + f, \quad A_2\varphi + b(\varphi - [\theta]^4) = g_b + g. \tag{5}$$

В [33] доказано, что при выполнении условий (i)–(iii) задача (5) однозначно разрешима.

Для постановки задачи оптимального управления системой (5) рассмотрим пространство управлений $U = H \times H$, множество допустимых управлений U_{ad}, пространство состояний $Y = V \times W$ и целевой функционал $J : Y \times U_{ad} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям

(j) $U_{ad} \subset U$ – непустое, выпуклое и замкнутое множество;

(jj) J слабо полунепрерывен снизу;

(jjj) $U_{ad} \subset U$ ограничено или $\forall r > 0$ множество $\{u \in U_{ad} : J(y, u) \le r, y \in Y\}$ ограничено в U.

Определим оператор ограничений $F : Y \times U \to V' \times W'$, полагая для $y = \{\theta, \varphi\}, u = \{f, g\}$,

$$F(y, u) = \{A_1\theta + b([\theta]^4 - \varphi) - f_b - f, A_2\varphi + b(\varphi - [\theta]^4) - g_b - g\}.$$

Задача (OC). Найти $\hat{y} = \{\hat{\theta}, \hat{\varphi}\} \in Y$, $\hat{u} = \{\hat{f}, \hat{g}\} \in U_{ad}$ такие, что $F(\hat{y}, \hat{u}) = 0$,

$$J(\hat{y}, \hat{u}) = \inf\{J(y, u) : u \in U_{ad}, F(y, u) = 0\}. \tag{6}$$

Типичным примером задачи оптимального управления, которая возникает при моделировании процессов лазерной абляции (см. [4]–[6]), является задача нахождения интенсивностей тепловых источников и источников излучения, локализованных в Ω_1 при условиях

$$J = \int_{\Omega_2}(\theta - \theta_d)^2 dx \to \inf, \quad F(y, u) = 0, \quad u \in U_{ad},$$

$$U_{ad} = \{u = \{f, g\} \in U, f \ge 0, g \ge 0, f + g \le P, \operatorname{supp} f \subset \Omega_1, \operatorname{supp} g \subset \Omega_1\}.$$

Здесь θ_d – требуемое распределение температуры в подобласти Ω_2, P – ограничение на мощность источников.

3. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (i)–(iii), (j)–(jjj). *Тогда существует решение задачи* (OC).

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{y_j, u_j\} \in Y \times U_{ad}$:

$$J(y_j, u_j) \to \hat{J} = \inf\left\{J(y,u) : u \in U_{ad},\ F(y,u) = 0\right\},$$

где $y_j = \{\theta_j, \varphi_j\}$, $u_j = \{f_j, g_j\}$ и при этом

$$A_1\theta_j + b([\theta_j]^4 - \varphi_j) = f_b + f_j, \quad A_2\varphi_j + b(\varphi_j - [\theta_j]^4) = g_b + g_j. \tag{7}$$

Из условия (jjj) следует, что $\{u_j\}$ ограничена в U и поэтому, в силу оценок решения задачи (7), полученных в [33], заключаем, что последовательность $\{y_j\}$ ограничена в $V \times W$. Переходя при необходимости к подпоследовательностям, получаем сходимости

$$f_j \to \hat{f}, \quad g_j \to \hat{g} \ \text{ слабо в } \ H, \quad \theta_j \to \hat{\theta} \ \text{ слабо в } \ V, \quad \text{сильно в } \ L^3(\Omega), \tag{8}$$

$$\varphi_j \to \hat{\varphi} \ \text{ слабо в } \ W, \quad \varphi_j|_{\Gamma_k} \to \hat{\varphi}|_{\Gamma_k} \ \text{ сильно в } \ L^2(\Gamma_k), \quad k = 0,1,\ldots,m. \tag{9}$$

Результатов о сходимости (8), (9) достаточно для предельного перехода в (7), причем переход в нелинейных членах гарантируется оценкой

$$|(b([\theta_j]^4 - [\hat{\theta}]^4), v)| \le 2\max b\left(\|\theta_j\|^3_{L^6(\Omega)} + \|\hat{\theta}\|^3_{L^6(\Omega)}\right)\|v\|_{L^6(\Omega)}\|\theta_j - \hat{\theta}\|_{L^3(\Omega)} \qquad \forall v \in L^6(\Omega).$$

Следовательно, $A_1\hat{\theta} + b([\hat{\theta}]^4 - \hat{\varphi}) = f_b + \hat{f}, A_2\hat{\varphi} + b(\hat{\varphi} - [\hat{\theta}]^4) = g_b + \hat{g}$, т.е. $F(\hat{y}, \hat{u}) = 0$. В силу условий (j),(jj) $\hat{u} \in U_{ad}$ и

$$\hat{J} \le J(\hat{y}, \hat{u}) \le \underline{\lim}\, J(y_j, u_j) = \hat{J}.$$

Поэтому $\hat{y}, \hat{u}$ – решение задачи (OC).

4. УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Для получения системы оптимальности будем использовать принцип Лагранжа для гладко-выпуклых экстремальных задач (см. [35], [36]). Невырожденность условий оптимальности следует из того, что образ производной оператора ограничений $\operatorname{Im} F_y'(\hat{y}, \hat{u})$, где $\hat{y}$, $\hat{u}$ – решение задачи (OC), совпадает с пространством $V' \times W'$.

Напомним, что

$$F(y,u) = \{A_1\theta + b([\theta]^4 - \varphi) - f_b - f, A_2\varphi + b(\varphi - [\theta]^4) - g_b - g\}.$$

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* (i)–(iii). *Для любой пары* $y \in Y$, $u \in U$ *справедливо равенство*

$$\operatorname{Im} F_y'(y,u) = V' \times W'.$$

Доказательство. Пусть $y = \{\theta, \varphi\}$. Для доказательства леммы достаточно проверить, что линейная система

$$A_1\xi + b(4|\theta|^3\xi - \zeta) = \eta_1, \quad A_2\zeta + b(\zeta - 4|\theta|^3\xi) = \eta_2 \tag{10}$$

разрешима для всех $\eta_1 \in V'$, $\eta_2 \in W'$.

Билинейная форма $\{\varphi, \psi\} \to (A_2\varphi + b\varphi, \psi)$ является непрерывной, симметричной и положительно-определенной в пространстве W. Поэтому из леммы Лакса–Мильграма следует, что для каждого $\eta \in W'$ существует единственное решение $\varphi \in W$ уравнения $A_2\varphi + b\varphi = \eta$ и оператор $(A_2 + bI)^{-1} : W' \to W$ непрерывен. Тогда из второго уравнения в (10) следует $\zeta = (A_2 + bI)^{-1}(4b|\theta|^3\xi + \eta_2)$. Кроме того, $A_1\xi + A_2\zeta = \eta_1 + \eta_2$. Следовательно, задача (10) эквивалентна системе

$$\xi + B\xi = \eta_3, \quad \zeta = (A_2 + bI)^{-1}(4b|\theta|^3\xi + \eta_2). \tag{11}$$

Здесь $B\xi = A_1^{-1}A_2(A_2 + bI)^{-1}(4b|\theta|^3\xi)$, $\eta_3 = A_1^{-1}(\eta_1 + \eta_2 - A_2(A_2 + bI)^{-1}\eta_2) \in V$.

В силу лемм 3, 4, доказанных в конце статьи, оператор $B : V \to V$ является компактным, и ядро фредгольмовского оператора $I + B$ нулевое. Поэтому первое уравнение в (11) однозначно разрешимо для любой правой части, что означает разрешимость задачи (10) и справедливость утверждения данной леммы.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (i)–(iii), $\{\hat{y},\hat{u}\}$ – *решение задачи* (OC) *и при этом* $\forall u \in U_{ad}$ *отображение* $y \to J(y,u)$ *непрерывно дифференцируемо в окрестности* $\hat{y}$, $\forall y$ *в окрестности* $\hat{y}$ *функция* $u \to J(y,u)$ *выпукла,* J *дифференцируема по Гато по* u *в точке* $\{\hat{y},\hat{u}\}$. *Тогда существует сопряженное состояние* $p = \{p_1, p_2\} \in Y$, *удовлетворяющее системе уравнений*

$$A_1 p_1 + 4b|\hat{\theta}|^3(p_1 - p_2) = -J'_\theta(\hat{y},\hat{u}), \quad A_2 p_2 + b(p_2 - p_1) = -J'_\varphi(\hat{y},\hat{u}) \tag{12}$$

такое, что $\forall u = \{v, w\} \in U_{ad}$

$$(J'_f(\hat{y},\hat{u}) - p_1, v - \hat{f}) \geq 0, \quad (J'_g(\hat{y},\hat{u}) - p_2, w - \hat{g}) \geq 0. \tag{13}$$

Здесь $\hat{y} = \{\hat{\theta},\hat{\varphi}\}$ – *оптимальное состояние,* $\hat{u} = \{\hat{f},\hat{g}\}$ – *оптимальное управление.*

Доказательство. Утверждение теоремы следует из [35, гл. 2, теорема 1.5]. В силу леммы 1 функция Лагранжа задачи (OC) определяется равенством

$$L(y,u,p) = J(y,u) + (A_1\theta + b([\theta]^4 - \varphi) - f_b - f, p_1) + (A_2\varphi + b(\varphi - [\theta]^4) - g_b - g, p_2),$$

где $y = \{\theta,\varphi\} \in Y$, $u = \{f, g\} \in U$, $p = \{p_1, p_2\} \in Y$. В соответствии с принципом Лагранжа равенства $L'_\theta(\hat{y},\hat{u},p) = 0$, $L'_\varphi(\hat{y},\hat{u},p) = 0$ дают сопряженную систему (12), а вариационное неравенство $(L'_u(\hat{y},\hat{u},p), u - \hat{u})_U \geq 0 \ \forall u \in U_{ad}$ влечет условия (13).

5. ПРИЛОЖЕНИЕ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ. РЕЛЕЙНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Рассмотрим процесс радиационного теплообмена в области Ω с одним включением $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$. В качестве примера задачи (OC) изучим следующую задачу оптимального управления:

$$\frac{1}{2}\int_\Gamma (\theta - \theta_d)^2 d\Gamma \to \inf, \tag{14}$$

$$A_1\theta + b([\theta]^4 - \varphi) = f_b + f, \quad A_2\varphi + b(\varphi - [\theta]^4) = g_b, \tag{15}$$

$$f \in \{v \in H : \operatorname{supp} v \subset \bar{\Omega}_1,\ 0 \leq f_1(x) \leq v(x) \leq f_2(x),\ x \in \Omega_1\}. \tag{16}$$

Здесь $\theta_d \in L^2(\Gamma)$, $f_1, f_2 \in L^2(\Omega_1)$ – заданные функции.

Согласно теоремам 1, 2, справедлива

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (i)–(iii). *Тогда существует решение* $\{\hat{\theta},\hat{\varphi},\hat{f}\}$ *задачи* (14)–(16) *и соответствующее сопряженное состояние* $\{p_1, p_2\}$ *такие, что*

$$A_1\hat{\theta} + b([\hat{\theta}]^4 - \hat{\varphi}) = f_b + \hat{f}, \quad A_2\hat{\varphi} + b(\hat{\varphi} - [\hat{\theta}]^4) = g_b, \tag{17}$$

$$A_1 p_1 + 4b|\hat{\theta}|^3(p_1 - p_2) = g_d, \quad A_2 p_2 + b(p_2 - p_1) = 0, \tag{18}$$

$$\int_{\Omega_1} p_1(v - \hat{f})dx \leq 0 \quad \forall v \in L^2(\Omega_1), \quad 0 \leq f_1 \leq v \leq f_2. \tag{19}$$

Здесь $g_d \in V'$ *задается выражением* $(g_d,\eta) = -\int_\Gamma (\hat{\theta} - \theta_d)\eta d\Gamma \ \forall \eta \in V$.

Система оптимальности (17)–(19) позволяет обосновать релейность оптимального управления (принцип bang-bang), используя следующий результат.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия* (i)–(iii), *тройка* $\{\hat{\theta},\hat{\varphi},\hat{f}\}$ – *решение задачи* (14)–(16), $\{p_1, p_2\}$ – *сопряженное состояние и при этом* $\theta_b \geq \mu = \text{Const} > 0$. *Тогда либо* $p_1(x) \neq 0$ *почти всюду на* Ω_1, *либо* $p_1 = p_2 = 0$ *в* Ω.

Доказательство. Отметим сразу, и это важно для дальнейшего, что в силу леммы 5, доказанной в разд. 6, $\hat{\theta} \geq \mu > 0$ в Ω. Из уравнений (18) следует, что почти всюду в Ω_1 справедливы равенства

$$-a_1\Delta p_1 + 4b_1\hat{\theta}^3(p_1 - p_2) = 0, \quad -\sigma\alpha_1 n_1^2\Delta p_2 + b_1(p_2 - p_1) = 0. \tag{20}$$

Поэтому $\Delta p_{1,2} \in L^2(\Omega_1)$ и, как следует из (20),

$$-\sigma\alpha_1 n_1^2\Delta^2 p_2 + b_1(\Delta p_2 - \Delta p_1), \quad \Delta p_1 = -\frac{4\sigma\alpha_1 n_1^2\hat{\theta}^3}{a_1}\Delta p_2.$$

Таким образом, функция $\xi = \Delta p_2$ удовлетворяет в Ω_1 уравнению

$$-\sigma\alpha_1 n_1^2\Delta\xi + b_1(1 + 4\sigma\alpha_1 n_1^2\hat{\theta}^3/a_1)\xi = 0. \tag{21}$$

Если на некоторой подобласти $D \subset \Omega_1$ положительной меры $p_1 = 0$, то $\Delta p_1|_D = 0$. Тогда из первого уравнения (20) в силу положительности $\hat{\theta}$ следует, что $p_2|_D = 0$, $\xi|_D = \Delta p_2|_D = 0$. Из (20), используя свойство единственности продолжения для эллиптических уравнений (см. [37]), заключаем, что $\xi = \Delta p_2 = 0$ в Ω_1. Поэтому $p_2|_{\Omega_1} = 0$, а значит, и $p_1|_{\Omega_1} = 0$.

Покажем, что $(p_2)_0|_{\Gamma_1} = 0$, т.е. след $p_2|_{\Omega_0}$ на Γ_1 равен нулю. С учетом того, что $p_2|_{\Omega_1} = 0$, это будет означать, что $p_2 \in V = H^1(\Omega)$. Действительно, умножим скалярно второе уравнение (18) на $w \in W$, $w|_{\Omega_0} = 0$. Поскольку $p_1|_{\Omega_1} = p_2|_{\Omega_1} = 0$, получаем

$$\int_{\Gamma_1}(p_2)_0 w_1 d\Gamma = 0.$$

Следовательно, $(p_2)_0|_{\Gamma_1} = 0$ и $p_2 \in H^1(\Omega)$. Из уравнений (18) теперь следует, что почти всюду в Ω справедливы равенства

$$-a_0\Delta p_1 + 4b_0\hat{\theta}^3(p_1 - p_2) = 0, \quad -\sigma\alpha_0 n_0^2\Delta p_2 + b_0(p_2 - p_1) = 0 \tag{22}$$

и, что важно, $p_1|_{\Omega_1} = p_2|_{\Omega_1} = 0$. Повторяя рассуждения первой части доказательства, заключаем, что $p_1 = p_2 = 0$ в Ω.

Заметим, что если $p_1 \equiv 0$, то можно найти такое управление $\hat{f}$, что $\hat{\theta} - \theta_d = 0$ на внешней границе Γ.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* (i)–(iii) *и при этом* $\theta_b \geq \mu = \mathrm{Const} > 0$. *Если точная нижняя грань целевого функционала в задаче* (14)–(16) *положительна, то* $p_1 \neq 0$ *почти всюду в* Ω_1 *и оптимальное управление является релейным*:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{если } p_1(x) < 0, \\ f_2(x), & \text{если } p_1(x) > 0. \end{cases}$$

Доказательство. Если $p_1 = p_2 = 0$ в Ω, то, как следует из первого уравнения (18), справедливо равенство $\hat{\theta} = \theta_d$ на внешней границе Γ, которое противоречит положительности минимального значения целевого функционала. Следовательно, в силу леммы 2, $p_1 \neq 0$ почти всюду в Ω_1.

Из вариационного неравенства (19) вытекает, что

$$p_1(x)(s - \hat{f}(x)) \leq 0 \quad \forall s \in [f_1(x), f_2(x)] \quad \text{для почти всех} \quad x \in \Omega_1.$$

Из полученного неравенства следует утверждение теоремы.

6. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Лемма 3. *Пусть выполняются условия* (i)–(iii). *Для любой функции* $\theta \in V$ *оператор* $B : V \to V$, *определяемый равенством*

$$B\xi = A_1^{-1}A_2(A_2 + bI)^{-1}(4b|\theta|^3\xi),$$

является компактным.

Доказательство. Для $\xi, \eta \in V$ справедливо равенство

$$(B\xi, \eta)_V = (A_2(A_2 + bI)^{-1}(4b|\theta|^3\xi), \eta) = (4b|\theta|^3\xi, \eta) - (bw, \eta), \tag{23}$$

где $w = (A_2 + bI)^{-1}(4b|\theta|^3\xi)$.

Оценим функцию $w \in W$. Уравнение $(A_2 + bI)w = 4b|\theta|^3\xi$ умножим скалярно на w и оценим левую и правую части снизу и сверху соответственно:

$$\nu\|w\|_W^2 \le ((A_2 + bI)w, w) = 4(b|\theta|^3\xi, w) \le 4\max b\|\theta\|_{L^6(\Omega)}^3 \|\xi\|_{L^4(\Omega)} \|w\|_{L^4(\Omega)}.$$

Здесь $\nu = \min\{\alpha\sigma n^2, b\}$. С учетом непрерывности вложения $W \subset L^s(\Omega)$, $1 \le s \le 6$, получаем

$$\|w\| \le K_2\|w\|_W \le \frac{4}{\nu}K_2^2 \max b\|\theta\|_{L^6(\Omega)}^3 \|\xi\|_{L^4(\Omega)}.$$

Тогда из (23) следует, что

$$(B\xi, \eta)_V \le 4\max b\|\theta\|_{L^6(\Omega)}^3 \|\xi\|_{L^4(\Omega)} \|\eta\|_{L^4(\Omega)} + \max b\|w\|\|\eta\| \le C\|\xi\|_{L^4(\Omega)} \|\eta\|_V.$$

Здесь $C = 4K_1 \max b\|\theta\|_{L^6(\Omega)}^3 (1 + K_2^2 \max b/\nu)$.

Полагая в последнем неравенстве $\eta = B\xi$, получаем оценку $\|B\xi\|_V \le C\|\xi\|_{L^4(\Omega)}$, из которой, в силу компактности вложения $V \subset L^4(\Omega)$, следует компактность оператора B.

Лемма 4. $\ker(I + B) = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $\xi \in \ker(I + B)$, $\zeta = (A_2 + bI)^{-1}(z\xi)$, где $0 \le z = 4b|\theta|^3 \in L^2(\Omega)$. Тогда справедливы равенства

$$A_1\xi + z\xi - b\zeta = 0, \quad A_2\zeta + b\zeta - z\xi = 0. \tag{24}$$

Определим регуляризацию функции $\operatorname{sign}: \mu_\delta(s) = s/|s|$, если $|s| \ge \delta$; $\mu_\delta(s) = s/\delta$, если $|s| < \delta$. Умножим скалярно первое уравнение в (24) на $\mu_\delta(\xi)$, второе на $\mu_\delta(\zeta)$ и сложим полученные равенства:

$$(a\nabla\xi, \mu'_\delta(\xi)\nabla\xi) + \int_\Gamma c\xi\mu_\delta(\xi)d\Gamma + \sigma\sum_{j=0}^m \alpha_j n_j^2(\nabla\zeta, \mu'_\delta(\zeta)\nabla\zeta)_j + \sigma n_0^2\int_\Gamma \gamma\zeta\mu_\delta(\zeta)d\Gamma +$$

$$+ \sigma n_0^2\sum_{j=1}^m h_j\int_{\Gamma_j}(\zeta_0 - \zeta_j)(\mu_\delta(\zeta_0) - \mu_\delta(\zeta_j))d\Gamma + (z\xi - b\zeta, \mu_\delta(\xi) - \mu_\delta(\zeta)) = 0.$$

Заметим, что функция μ_δ неубывающая: $\mu'_\delta(s) \ge 0$, $s \in \mathbb{R}$, и поэтому, отбросив неотрицательные слагаемые, получаем неравенство

$$\int_\Gamma c\xi\mu_\delta(\xi)d\Gamma + \sigma n_0^2\int_\Gamma \gamma\zeta\mu_\delta(\zeta)d\Gamma + (z\xi - b\zeta, \mu_\delta(\xi) - \mu_\delta(\zeta)) \le 0.$$

В пределе при $\delta \to +0$ получаем

$$\int_\Gamma c_1|\xi|d\Gamma + \sigma n_0^2\int_\Gamma \gamma|\zeta|d\Gamma + (z\xi - b\zeta, \operatorname{sign}\xi - \operatorname{sign}\zeta) \le 0.$$

Заметим, что последнее слагаемое здесь неотрицательно, поскольку $z \ge 0$ и

$$(z\xi - b\zeta)(\operatorname{sign}\xi - \operatorname{sign}\zeta) = z(|\xi| - \xi\operatorname{sign}\zeta) + b(|\zeta| - \zeta\operatorname{sign}\xi) \ge 0.$$

Поэтому $\xi|_\Gamma = \zeta|_\Gamma = 0$. Далее, умножим скалярно уравнения в (24) на $\psi \in V$ и сложим равенства, учитывая полученные граничные значения на Γ, а также, что $\psi_0 = \psi_j$ на Γ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$. Тогда

$$(a\nabla\xi, \nabla\psi) + \sigma\sum_{j=0}^m \alpha_j n_j^2(\nabla\zeta, \nabla\psi)_j = 0. \tag{25}$$

Рассмотрим открытый шар $\mathcal{B}$, $\bar{\Omega} \subset \mathcal{B}$. В области $D = \mathcal{B} \backslash (\Omega \backslash \Omega_0)$ определим функцию η так, что $\eta|_{\Omega_0} = a_0\xi + \sigma\alpha_0 n_0^2\zeta$, $\eta|_{\mathcal{B}\backslash\bar{\Omega}_0} = 0$. Заметим, что $\eta \in H^1(D)$, поскольку $\xi|_\Gamma = \zeta|_\Gamma = 0$. Поэтому в силу (25)

$$\int_D \nabla\eta\nabla\psi dx = \int_{\Omega_0} \nabla\eta\nabla\psi dx = 0 \quad \forall\psi \in C_0^\infty(D).$$

Следовательно, $\eta = 0$ в D как гармоническая функция, равная нулю на части области, и поэтому

$$a_0\xi + \sigma\alpha_0 n_0^2 \zeta|_{\Omega_0} = 0. \tag{26}$$

Определим $\tilde{\xi} \in H^1(D)$ так, что $\tilde{\xi} = \xi$ в Ω_0, $\tilde{\xi} = 0$ в $D \backslash \bar{\Omega}_0$, и функцию z продолжим нулем вне Ω. Используя первое уравнение в (24) и равенство (26), выводим

$$\int_D \left(\nabla\tilde{\xi}\nabla\psi + \left(z + \frac{a_0 b_0}{\alpha_0\sigma n_0^2} \right) \tilde{\xi}\psi \right) dx = 0 \quad \forall\psi \in C_0^\infty(D).$$

Так как функция $\tilde{\xi}$ равна нулю на подобласти в D, то в силу свойства единственности продолжения для эллиптических уравнений (см. [37]) заключаем, что $\xi = 0$ в Ω_0 и соответственно $\zeta = 0$ в Ω_0.

Далее, умножим скалярно второе уравнение в (24) на функцию $\psi \in W$ такую, что $\psi|_{\Omega_j} = 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, учитывая полученные равенства $\xi, \zeta|_{\Omega_0} = 0$. Тогда получим

$$\sum_{j=1}^m h_j \int_{\Gamma_j} \zeta_j \psi_0 d\Gamma = 0.$$

Следовательно, $\zeta_j|_{\Gamma_j} = 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, и поэтому $\zeta \in H^1(\Omega)$. Из (25) вытекает, что функция $a_j\xi + \sigma\alpha_j n_j^2\zeta$ является гармонической в Ω_j, $j = 1, 2, \dots, m$, и при этом равна нулю на Γ_j, т.е. $a_j\xi + \sigma\alpha_j n_j^2\zeta = 0$. Таким образом, почти всюду в Ω справедливо равенство $a\xi + \sigma\alpha n^2\zeta = 0$. Поэтому из первого уравнения в (24) следует, что

$$\left(A_1\xi + \left(z + \frac{ab}{\sigma\alpha n^2} \right) \xi, \xi \right) = 0.$$

Это означает, что функция ξ равна нулю в Ω, что доказывает утверждение леммы.

Лемма 5. *Пусть выполняются условия* (i)–(iii) *и при этом*

$$\theta_b \geq \mu = \text{Const} > 0, \quad f \geq 0, \quad g = 0.$$

Если $\{\theta, \varphi\} \in V \times W$ *– слабое решение задачи* (1)–(4), *то* $\theta \geq \mu$ *почти всюду в* Ω.

Доказательство. Пусть $0 < \varepsilon < \mu$. Определим неубывающую функцию $\mu_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая является аппроксимацией функции $\min\{t - \mu, 0\}$, $t \in \mathbb{R}$:

$$\mu_\varepsilon(t) = \begin{cases} t + 2\varepsilon - \mu, & \text{если} \quad t < -\varepsilon, \\ \varepsilon - \mu, & \text{если} \quad |t| \leq \varepsilon, \\ t - \mu, & \text{если} \quad t \in (\varepsilon, \mu), \\ 0, & \text{если} \quad t \geq \mu. \end{cases}$$

Умножим скалярно первое уравнение в (5) на $\mu_\varepsilon(\theta) \in V$, второе на $\mu_\varepsilon([\varphi]^{1/4}) \in W$ и сложим полученные равенства. Тогда

$$(a\nabla\theta, \nabla\mu_\varepsilon(\theta)) + \int_\Gamma c(\theta - \theta_d)\mu_\varepsilon(\theta)d\Gamma + \sigma\sum_{j=0}^m \alpha_j n_j^2(\nabla\varphi, \nabla\mu_\varepsilon([\varphi]^{1/4}))_j +$$
$$+ \int_\Gamma \gamma(\varphi - \theta_b^4)\mu_\varepsilon([\varphi]^{1/4})d\Gamma + \sigma n_0^2\sum_{j=1}^m h_j\int_{\Gamma_j} (\varphi_0 - \varphi_j)(\mu_\varepsilon([\varphi_0]^{1/4}) - \mu_\varepsilon([\varphi_j]^{1/4}))d\Gamma + \tag{27}$$
$$+ (b([\theta]^4 - \varphi), \mu_\varepsilon(\theta) - \mu_\varepsilon([\varphi]^{1/4})) = (f, \mu_\varepsilon(\theta)) \le 0.$$

В силу монотонности функции μ_ε справедливы неравенства

$$(\theta - \theta_d)\mu_\varepsilon(\theta) \ge (\theta - \mu)\mu_\varepsilon(\theta) \ge 0, \quad \nabla\varphi \cdot \nabla\mu_\varepsilon([\varphi]^{1/4}) \ge 0,$$
$$(\varphi_0 - \varphi_j)(\mu_\varepsilon([\varphi_0]^{1/4}) - \mu_\varepsilon([\varphi_j]^{1/4})) \ge 0, \quad ([\theta]^4 - \varphi)(\mu_\varepsilon(\theta) - \mu_\varepsilon([\varphi]^{1/4})) \ge 0.$$

Поэтому, отбросив в (27), в силу указанных неравенств, неотрицательные слагаемые, получим

$$(a\nabla\theta, \nabla\mu_\varepsilon(\theta)) + \int_\Gamma c(\theta - \mu)\mu_\varepsilon(\theta)d\Gamma \le 0. \tag{28}$$

Переходя в (28) к пределу при $\varepsilon \to +0$, заключаем

$$(a\nabla\psi, \nabla\psi) + \int_\Gamma c\psi^2 d\Gamma \le 0, \quad \text{где} \quad \psi = \min\{\theta - \mu, 0\}.$$

Следовательно, $\psi = 0$, что означает справедливость почти всюду неравенства $\theta \ge \mu$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Modest M.F.* Radiative heat transfer. New York: Acad. Press, 2003.
2. *Thömmes G., Pinnau R., Sead M., Götz M., Klar A.* Numerical methods and optimal control for glass cooling processes // Transport Theory and Statist. Phys. 2002. V. 31. № 4–6. P. 513–529.
3. *Tse O., Pinnau R.* Optimal control of a simplified natural convection-radiation model // Comm. Math. Sci. 2013. V. 11. № 3. P. 679–707.
4. *Ковтанюк А.Е., Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.* Использование диффузионного приближения для моделирования радиационных и тепловых процессов в кожном покрове // Оптика и спектроскопия. 2017. Т. 123. № 2. С. 194–199.
5. *Kovtanyuk A., Chebotarev A., Astrakhantseva A.* Inverse extremum problem for a model of endovenous laser ablation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2020. https://doi.org/10.1515/jiip-2020-0118
6. *Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю., Астраханцева А.А., Сущенко А.А.* Оптимальное управление внутривенной лазерной абляцией // Оптика и спектроскопия. 2020. Т. 128. Вып. 9. С. 1396–1404.
7. *Pinnau R.* Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modeled by SP_1-system // Comm. Math. Sci. 2007. V. 5. № 4. P. 951–969.
8. *Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.* Нестационарная задача сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 11. С. 1806–1816.
9. *Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.* Неоднородная нестационарная задача сложного теплообмена // Сиб. электрон. матем. изв. 2015. Т. 12. С. 562–576.
10. *Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.* Нестационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 2. С. 275–282.
11. *Grenkin G.V., Chebotarev A.Yu., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Boundary optimal control problem of complex heat transfer model // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 433. № 2. P. 1243–1260.
12. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu.* An iterative method for solving a complex heat transfer problem // Appl. Math. Comput. 2013. V. 219. № 17. P. 9356–9362.
13. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 409. № 2. P. 808–815.
14. *Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю.* Стационарная задача сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 4. С. 711–719.
15. *Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю.* Стационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом // Дифференц. ур-ния. 2014. Т. 50. № 12. С. 1590–1597.

16. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive-convective-radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 412. № 1. P. 520–528.

17. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model // Comm. Nonlin. Sci. Numer. Simul. 2015. V. 20. № 3. P. 776–784.

18. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Optimal boundary control of a steady-state heat transfer model accounting for radiative effects // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 439. № 2. P. 678–689.

19. *Chebotarev A.Yu., Kovtanyuk A.E., Grenkin G.V., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model // Appl. Math. Comput. 2016. V. 289. P. 371–380.

20. *Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю.* Нелокальная однозначная разрешимость стационарной задачи сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 5. С. 816–823.

21. *Chebotarev A.Yu., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E.* Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer // ESAIM Math. Model. Numer. Anal. 2017. V. 51. № 6. P. 2511–2519.

22. *Chebotarev A.Yu., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange // J. Math. Anal. Appl. 2018. V. 460. № 2. P. 737–744.

23. *Chebotarev A.Y., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D.* Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type // Comm. Nonlin. Sci. Numer. Simul. 2019. V. 75. P. 262–269.

24. *Chebotarev A.Yu., Pinnau R.* An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 472. № 1. P. 314–327.

25. *Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.* Обратная задача для уравнений сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 8. С. 1420–1430.

26. *Амосов А.А.* Глобальная разрешимость одной нелинейной нестационарной задачи с нелокальным краевым условием типа теплообмена излучением // Дифференц. ур-ния. 2005. Т. 41. № 1. С. 93–104.

27. *Amosov A.A.* Stationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on the radiation frequency // J. Math. Sci. 2010. V. 164. № 3. P. 309–344.

28. *Amosov A.* Unique Solvability of a Nonstationary Problem of Radiative-Conductive Heat Exchange in a System of Semitransparent Bodies // Rus. J. Math. Phys. 2016. V. 23. № 3. P. 309–334.

29. *Amosov A.A.* Unique Solvability of Stationary Radiative-Conductive Heat Transfer Problem in a System of Semitransparent Bodies // J. Math. Sci. (United States). 2017. V. 224. № 5. P. 618–646.

30. *Amosov A.A.* Asymptotic behavior of a slution to the radiative transfer equation in a multilayered medium with diffuse reflection and refraction conditions // J. Math. Sci. 2020. V. 244. P. 541–575.

31. *Amosov A.A., Krymov N.E.* On a nonstandard boundary value problem arising in homogenization of complex heat transfer problems // J. Math. Sci. (United States). 2020. V. 244. P. 357–377.

32. *Chebotarev A.Y., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions // Comm. Nonlin. Sci. and Numer. Simul. 2018. V. 57. P. 290–298.

33. *Чеботарев А.Ю.* Неоднородная краевая задача для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения // Дифференц. ур-ния. 2020. Т. 56. № 12. С. 1660–1665.

34. *Чеботарев А.Ю.* Обратная задача для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 2. Р. 303–311.

35. *Fursikov A.V.* Optimal control of distributed systems // Theory and Appl., Am. Math. Soc., 2000.

36. *Ioffe A.D., Tikhomirov V.M.* Theory of extremal problems. North-Holland: Amsterdam, 1979.

37. *Wolff T.H.* A Property of measure in R^n and an application to unique continuation // Geomet. and Function. Anal. 1992. V. 2. № 2. P. 225–284.