ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 3, с. 478–487

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.634

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ЛЭМБА В СЛУЧАЕ ПРЕДЕЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПУАССОНА

Х. Х. Ильясов[1,*], А. В. Кравцов[2,], Ал. В. Кравцов[3,***], С. В. Кузнецов[1,****]**

[1] 117526 Москва, пр-т Вернадского, 101, ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН, Россия

[2] 119992 Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, физ. фак-т, Россия

[3] 119049 Москва, Ленинский пр-т, 4, НИТУ “МИСиС”, Россия

*e-mail: ilyasov@ipmnet.ru

**e-mail: avkravtsow@rambler.ru

***e-mail: suvmalex@yandex.ru

****e-mail: kuzn-sergey@gmail.com

Поступила в редакцию 25.06.2021 г.
Переработанный вариант 25.06.2021 г.
Принята к публикации 17.11.2021 г.

Рассматривается нестационарная задача Лэмба для упругого полупространства в случае, когда коэффициент Пуассона принимает предельное значение 1/2. Для осевой симметрии решение представляется в виде повторного несобственного интеграла. Внутренний интеграл по вертикальной прямой на комплексной плоскости приводится к сумме вычетов и сумме нескольких интегралов от действительной переменной. Получена оценка решения при больших значениях полярного радиуса. Библ. 6. Фиг. 1.

Ключевые слова: упругая среда, уравнения Ламэ, коэффициент Пуассона, интеграл Фурье–Бесселя, преобразование Лапласа, оценки интегралов.

DOI: 10.31857/S0044466922030073

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В упругой среде, занимающей полупространство, малые относительные перемещения описываются уравнениями Ламэ

$$(\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2},$$

где $\mathbf{u}$ – вектор перемещений, λ и μ – параметры Ламэ, ρ_0– плотность упругой среды. Пусть на свободную поверхность S упругой среды действует внешнее давление $\mathbf{n}p$, где $\mathbf{n}$ – вектор внешней нормали к S, p – заданная функция точки поверхности и времени t. В соответствии с [1], граничные условия на свободной поверхности зададим в виде

$$2\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + \lambda \mathbf{n}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \rho_0 g \mathbf{n}(\mathbf{u}, \mathbf{n}) + \mu[\mathbf{n}, \mathrm{rot}\,\mathbf{u}] = \mathbf{n}p,$$

где g– ускорение силы тяжести (вектор силы тяжести противоположен вектору $\mathbf{n}$).

Параметры Ламэ связаны с коэффициентом Пуассона ν и модулем Юнга E соотношениями

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Согласно *теории предельного перехода* считаем, что $\nu \to \frac{1}{2} - 0$, а $E \to +0$, но так, что отношение $\frac{E}{1-2\nu} \to k > 0$. Поэтому $\mu \to +0$, $\lambda \to \frac{k}{3} > 0$, что означает отсутствие в упругой среде волн сдвига.

Для отличного от нуля параметра Ламэ мы сохраним прежнее обозначение λ. Тогда уравнения для перемещений и граничные условия на свободной поверхности принимают вид

$$\lambda \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + \rho_0 g(\mathbf{u}, \mathbf{n}) = p.$$

Представим вектор перемещений в виде $\mathbf{u} = \operatorname{grad} \varphi$. Введем цилиндрическую систему координат (r, θ, z), для которой поверхность S совпадает с плоскостью $z = 0$ и орт оси z сонаправлен с вектором $\mathbf{n}$.

Пусть внешнее давление имеет вид $p(r,t) = p_0 f(r) \mathrm{e}^{-\alpha t} \sin \omega t$, где $f(r)$ – заданная функция, p_0, α, ω – заданные положительные постоянные величины. Заметим, что задача установившихся колебаний упругого полупространства в случае предельного значения коэффициента Пуассона и осевой симметрии рассматривалась в [2], где было доказано существование классического решения при $r > 0$, $z \le 0$ и получены асимптотические формулы для компонент вектора перемещений при достаточно больших r. Формальное интегральное представление решения задачи Лэмба в случае распределенной гармонической нагрузки для $0 < \nu < \frac{1}{2}$ представлено в [3], где было проведено сравнение аналитического и численного решений. В работе [4] начально-краевая задача Лэмба для полупространства решалась методом конечных элементов.

Для функции φ получим уравнение и граничное условие на свободной поверхности:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi, \quad r > 0, \quad z < 0, \quad t > 0, \quad a = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_0}},$$

$$\rho_0 \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right|_{z=0} + \rho_0 g \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = p_0 f(r) \mathrm{e}^{-\alpha t} \sin \omega t, \quad r > 0, \quad t > 0.$$

Дополним их граничным условием на бесконечности и начальными условиями

$$\varphi \to +0, \quad \sqrt{r^2 + z^2} \to +\infty, \quad t > 0,$$

$$\left. \varphi \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad r > 0, \quad z \le 0.$$

Кроме того, считаем, что решение φ ограничено при $r > 0$, $z \le 0$, $t > 0$, а функция $f(r)$ имеет вид

$$f(r) = \frac{l^3}{(r^2 + l^2)^{3/2}}, \quad l > 0.$$

Перейдем к безразмерным переменным по формулам

$$r_a = \frac{\omega}{a} r, \quad z_a = \frac{\omega}{a} z, \quad t_a = \omega t, \quad \varphi^{(a)} = \frac{\omega^2}{a^2} \varphi.$$

В безразмерных переменных получим задачу

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(a)}}{\partial t_a^2} = \Delta_a \varphi^{(a)}, \quad r_a > 0, \quad z_a < 0, \quad t_a > 0, \tag{1}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi^{(a)}}{\partial t_a^2} \right|_{z_a=0} + \beta \left. \frac{\partial \varphi^{(a)}}{\partial z_a} \right|_{z_a=0} = \frac{p_0}{\rho_0 a^2} f(r_a) \mathrm{e}^{-\gamma t_a} \sin t_a, \quad r_a > 0, \quad t_a > 0,$$

$$\varphi^{(a)} \to +0, \quad \sqrt{r_a^{\,2} + z_a^{\,2}} \to +\infty, \quad t_a > 0, \quad \left|\varphi^{(a)}\right| \le C, \quad r_a > 0, \quad z_a \le 0, \quad t_a > 0, \tag{2}$$

$$\left. \varphi^{(a)} \right|_{t_a=0} = \left. \frac{\partial \varphi^{(a)}}{\partial t_a} \right|_{t_a=0} = 0, \quad r_a > 0, \quad z_a \le 0, \quad \beta = \frac{g}{\omega a}, \quad f(r_a) = \frac{l_a^3}{(r_a^2 + l_a^2)^{3/2}}, \quad l_a = \frac{\omega}{a} l, \quad \gamma = \frac{\alpha}{\omega}.$$

Далее для краткости у безразмерных переменных индексы будем опускать.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Так как правая часть в граничном условии при $z = 0$ не зависит от θ, то и искомая функция φ не будет зависеть от θ. Пусть искомая функция допускает представление в виде интеграла Фурье–Бесселя

$$\varphi(r,z,t) = \int_0^{+\infty} J_0(xr)\Phi(x,z,t)x dx, \quad r > 0, \quad z \le 0, \quad t > 0,(3) \tag{3}$$

где $J_0(u)$ – функция Бесселя нулевого порядка, $\Phi(x,z,t)$ – образ Фурье–Бесселя функции $\varphi(r,z,t)$.

Далее будем считать, что дифференцирование достаточное число раз по r, z, t интеграла (3) под знаком интеграла законно. Подставим интеграл (3) в уравнение (1):

$$\int_0^{+\infty} \left(x^2 J_0''(xr) + \frac{x}{r} J_0'(xr)\right)\Phi(x,z,t)x dx + \int_0^{+\infty} J_0(xr)\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} x dx = \int_0^{+\infty} J_0(xr)\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} x dx.$$

Воспользуемся соотношениями [5]: $J_0'(u) = -J_1(u)$, $J_1'(u) = J_0(u) - \dfrac{J_1(u)}{u}$, где $J_1(u)$ – функция Бесселя первого порядка. Откуда

$$\int_0^{+\infty} J_0(xr)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - x^2\Phi\right) x dx = \int_0^{+\infty} J_0(xr)\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} x dx.$$

Тогда образ Фурье–Бесселя будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - x^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}, \quad z < 0, \quad t > 0, \quad x > 0. \tag{4}$$

Подставим интеграл (3) в граничные и начальные условия и воспользуемся равенством из [5] $\int_0^{+\infty} J_0(xr)\,e^{-lx}\, x dx = l(r^2 + l^2)^{-3/2}$, $r > 0$. Окончательно будем иметь

$$\begin{gathered}
\left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right|_{z=0} + \beta\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0} = A\,e^{-\gamma t - lx}\sin t, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad A = \frac{p_0 l^2}{\rho_0 a^2}, \\
\Phi|_{t=0} = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad z \le 0, \quad x > 0, \\
\Phi \to 0, \quad z \to -\infty, \quad t > 0, \quad x > 0.
\end{gathered} \tag{5}$$

Предположим, что функции Φ, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}$, $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$, $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$ удовлетворяют условиям существования изображения по Лапласу при фиксированных x, z. Применим к задаче (4), (5) преобразование Лапласа по переменной t. Пусть

$$\Psi(p,z,x) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\,\Phi(x,z,t)dt, \quad p = \xi + i\eta.$$

Тем самым, для определения функции Ψ получим задачу

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} - x^2\Psi = p^2\Psi, \quad z < 0, \quad x > 0, \tag{6}$$

$$p^2\Psi|_{z=0} + \beta\left.\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{A\,e^{-lx}}{(p+\gamma)^2 + 1}, \quad x > 0, \tag{7}$$

$$\Psi \to 0, \quad z \to -\infty, \quad x > 0, \tag{8}$$

где $\frac{1}{(p+\gamma)^2+1}$ – изображение по Лапласу функции $e^{-\gamma t}\sin t$, продолженное на всю комплексную плоскость, из которой удалены точки $p=-\gamma\pm i$. Решение уравнения (6), удовлетворяющее условию (8), будем искать в виде $\Psi(p,x,z)=Y(p,x)e^{zy(p,x)}$, где $y(p,x)=\sqrt{p^2+x^2}$ – аналитическая в области D: $p\notin(-i\infty,-ix]\cup[ix,+i\infty)$ функция и такая, что $y(p,x)>0\ \forall\operatorname{Re}p$ при фиксированном $x>0$. Исследование функции $y(p,x)$ показывает, что $\operatorname{Re}\{y(p,x)\}>0\ \forall p\in D$ и $\forall x>0$. Поэтому для указанных p, x $\left|e^{zy(p,x)}\right|=e^{z\operatorname{Re}\{y(p,x)\}}\to+0$ при $z\to-\infty$ и для любого $z\le 0$ и тех же p, x выполняется неравенство $\left|e^{zy(p,x)}\right|\le 1$. Из условия (7) будем иметь

$$Y(p,x)=\frac{Ae^{-lx}}{[(p+\gamma)^2+1]\left(p^2+\beta\sqrt{p^2+x^2}\right)}.$$

Тогда

$$\Phi(x,z,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{Ae^{pt-lx+z\sqrt{p^2+x^2}}\,dp}{[(p+\gamma)^2+1]\left(p^2+\beta\sqrt{p^2+x^2}\right)},\tag{9}$$

где $b>0$ – любое.

Таким образом, для решения $\varphi(r,z,t)$ задачи (1), (2) получаем формальное интегральное представление (3), где $\Phi(x,z,t)$ при $x>0$ определяется интегралом (9) – интегралом Меллина. При этом мы считаем, что подынтегральная функция в (3) имеет предел в точках $(0,r,z,t)$, равный нулю. Далее мы установим этот факт.

3. ОЦЕНКА ВНУТРЕННЕГО ИНТЕГРАЛА

Докажем, что интеграл Меллина сходится абсолютно. Подынтегральная функция в (9), обозначим ее $F(p,x,z,t)$, аналитична в области D при фиксированных x, z, t, за исключением четырех точек – полюсов первого порядка:

$$p_k(x)=\pm i\sigma(x),\quad \sigma(x)=\sqrt{\sqrt{\frac{\beta^4}{4}+\beta^2x^2}-\frac{\beta^2}{2}},\quad k=1,2,\quad p_m=-\gamma\pm i,\quad m=3,4,$$

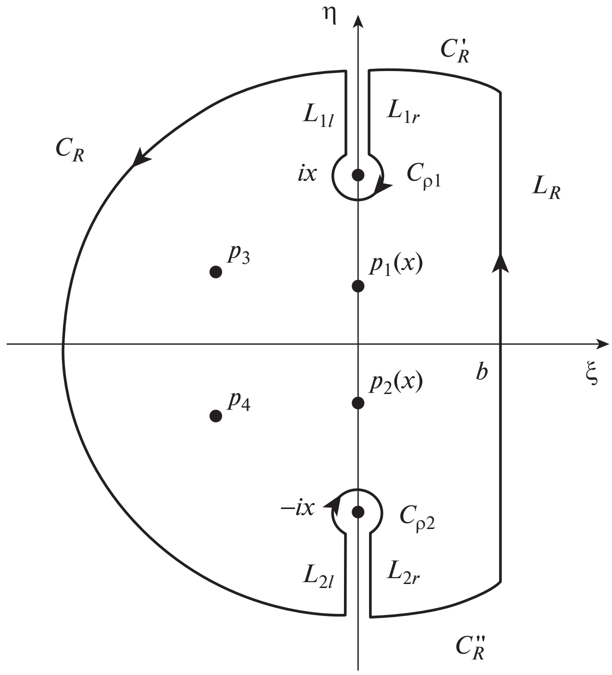
где $0<\sigma(x)<x$. Тогда при достаточно больших $|p|=|b+i\eta|$ будем иметь

$$|F(p,x,z,t)|\le\frac{Be^{bt}}{\left|(p+\gamma)^2+1\right|\left|p^2+\beta y(p,x)\right|}\le\frac{Be^{bt}}{\left[(|p|-\gamma)^2-1\right]\left(|p|^2-\beta\sqrt{|p|^2+x^2}\right)}=$$

$$=\frac{Be^{bt}}{\left[\left(\sqrt{b^2+\eta^2}-\gamma\right)^2-1\right]\left(b^2+\eta^2-\beta\sqrt{b^2+\eta^2+x^2}\right)}=O^*\left(\frac{1}{\eta^4}\right),\quad |\eta|\to+\infty,\quad B=\frac{A}{2\pi}.$$

Откуда следует, что интеграл Меллина сходится абсолютно по признаку сравнения, причем сходимость равномерная по z на полупрямой $(-\infty,0]$ и по t на любом отрезке $[0,T]$. Выразим этот интеграл через сумму вычетов функции F и сумму интегралов от данной функции вдоль берегов разрезов $(-i\infty,-ix]$, $[ix,+i\infty)$. Рассмотрим замкнутый контур Γ, состоящий из вертикального отрезка L_R, дуг C_R, C_R', C_R'' окружности радиуса R с центром в точке $p=0$, отрезков L_{1r}, L_{1l}, L_{2r}, L_{2l} по берегам разрезов и окружностей $C_{\rho 1}$, $C_{\rho 2}$ радиусов ρ с центрами в точках $p=\pm ix$ соответственно (фиг. 1). По основной теореме теории вычетов

$$\int\limits_\Gamma F\,dp=2\pi i\sum_{n=1}^{4}\operatorname{res}[F,p_n].\tag{10}$$



Фиг. 1.

При всех $p \in C_R, C'_R, C''_R$ для достаточно больших R и всех $p \in C_{\rho k}$, $k = 1, 2$, для достаточно малых ρ справедливы соответственно оценки

$$\frac{1}{\left|(p+\gamma)^2+1\right|\left|p^2+\beta y(p,x)\right|} \le \frac{1}{\left[(R-\gamma)^2-1\right]\left(R^2-\beta\sqrt{R^2+x^2}\right)}, \tag{11}$$

$$\frac{1}{\left|(p+\gamma)^2+1\right|\left|p^2+\beta y(p,x)\right|} < \frac{h(\rho,x)}{(x-\rho)^2-\beta\sqrt{\rho(x+2\rho)}}, \tag{12}$$

где

$$h(\rho,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\left(\sqrt{x^2+\gamma^2}+\rho\right)^2}, & 0 < x+\gamma \le 1, \\ \dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+\gamma^2}-\rho\right)^2-1}, & x+\gamma > 1. \end{cases}$$

Покажем, что интегралы по C_R, C'_R, C''_R стремятся к нулю при $R \to +\infty$. Из неравенства (11), согласно лемме Жордана для левой полуплоскости (см. [6]), следует, что $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R} Fdp = 0$. Для интеграла по C'_R: $p = R\mathrm{e}^{is}$, $s \in \left[s_0(R), \dfrac{\pi}{2}\right]$, $s_0(R) = \arccos\left(\dfrac{b}{R}\right)$ с учетом (11) имеем

$$\left|\int\limits_{C'_R} Fdp\right| \le \int\limits_{C'_R} |F| dl \le \frac{BR\mathrm{e}^{bt}\left(\dfrac{\pi}{2}-s_0(R)\right)}{\left[(R-\gamma)^2-1\right]\left(R^2-\beta\sqrt{R^2+x^2}\right)} \to +0, \quad R \to +\infty.$$

Точно так же доказывается, что интеграл по C''_R стремится к нулю при $R \to +\infty$.

Покажем, что интегралы по окружностям $C_{\rho k}$, $k = 1,2$, стремятся к нулю при $\rho \to +0$. Для интеграла по $C_{\rho 1}$: $p = ix + \rho\,\mathrm{e}^{is}$, $s \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ с учетом (12) имеем

$$\left|\int\limits_{C_{\rho 1}} F dp\right| \le \int\limits_{C_{\rho 1}} |F| dl < \frac{B\rho h(\rho, x)}{(x-\rho)^2 - \beta\sqrt{\rho(x+2\rho)}} \int\limits_{-3/2\pi}^{\pi/2} \mathrm{e}^{t\rho\cos s}\, ds \to +0, \quad \rho \to +0.$$

Точно так же доказывается, что интеграл по $C_{\rho 2}$ стремится к нулю при $\rho \to +0$.

Обозначим через Γ_{1l}, Γ_{1r} соответственно левый и правый берега разреза $[ix, +i\infty)$, а через Γ_{2l}, Γ_{2r} соответственно левый и правый берега разреза $(-i\infty, -ix]$. Значения функции $y(p,x)$ на берегах разрезов следующие:

$$y(p,x) = -i\sqrt{\eta^2 - x^2}, \quad p \in \Gamma_{1l}; \quad y(p,x) = i\sqrt{\eta^2 - x^2}, \quad p \in \Gamma_{1r};$$

$$y(p,x) = i\sqrt{\eta^2 - x^2}, \quad p \in \Gamma_{2l}; \quad y(p,x) = -i\sqrt{\eta^2 - x^2}, \quad p \in \Gamma_{2r},$$

где квадратный корень – арифметический.

Перейдем в (10) к пределу при $R \to +\infty$, $\rho \to +0$. В силу сходимости интеграла Меллина получим

$$\Phi(x,z,t) = -I_{1l}(x,z,t) - I_{1r}(x,z,t) - I_{2l}(x,z,t) - I_{2r}(x,z,t) + 2\pi i \sum_{n=1}^{4} \operatorname{res}[F(p,x,z,t), p_n], \tag{13}$$

где $I_{1l}(x,z,t)$, ... , $I_{2r}(x,z,t)$ – интегралы по Γ_{1l}, ... , Γ_{2r} соответственно. Эти интегралы имеют вид

$$I_{1l}(x,z,t) = -\int\limits_{x}^{+\infty} \frac{B\,\mathrm{e}^{i\eta t - lx - iz\sqrt{\eta^2 - x^2}}\, d\eta}{\left[(i\eta + \gamma)^2 + 1\right]\left(\eta^2 + i\beta\sqrt{\eta^2 - x^2}\right)},$$

$$I_{1r}(x,z,t) = -\int\limits_{x}^{+\infty} \frac{B\,\mathrm{e}^{i\eta t - lx + iz\sqrt{\eta^2 - x^2}}\, d\eta}{\left[(i\eta + \gamma)^2 + 1\right]\left(-\eta^2 + i\beta\sqrt{\eta^2 - x^2}\right)},$$

$$I_{2l}(x,z,t) = \int\limits_{x}^{+\infty} \frac{B\,\mathrm{e}^{-i\eta t - lx + iz\sqrt{\eta^2 - x^2}}\, d\eta}{\left[(-i\eta + \gamma)^2 + 1\right]\left(-\eta^2 + i\beta\sqrt{\eta^2 - x^2}\right)},$$

$$I_{2r}(x,z,t) = \int\limits_{x}^{+\infty} \frac{B\,\mathrm{e}^{-i\eta t - lx - iz\sqrt{\eta^2 - x^2}}\, d\eta}{\left[(-i\eta + \gamma)^2 + 1\right]\left(\eta^2 + i\beta\sqrt{\eta^2 - x^2}\right)}.$$

Докажем, что каждый из интегралов, умноженный на x, имеет предел в точках $(0,z,t)$, равный нулю, и получим для указанных произведений оценку по переменной $x \ge 0$, равномерную относительно переменных $z \le 0$, $t > 0$. Рассмотрим, например, произведение $xI_{1l}(x,z,t)$. Сделаем замену $s = \eta - x$. Тогда

$$xI_{1l}(x,z,t) = -\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{Bx\,\mathrm{e}^{i(s+x)t - lx - iz\sqrt{s(s+2x)}}\, ds}{\left[(i(s+x) + \gamma)^2 + 1\right]\left[(s+x)^2 + i\beta\sqrt{s(s+2x)}\right]} := \int\limits_{0}^{+\infty} f_0(s,x,z,t)ds =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} + \cdots + \int\limits_{1}^{+\infty} + \cdots = I_1 + I_2.$$

Заметим, что функция f_0 непрерывна на множестве $s \ge 0$, $x > 0$, $z \le 0$, $t > 0$, а интеграл I_2 сходится равномерно на множестве $0 < x \le x_1$, $z \le 0$, $t > 0$ $\forall x_1 > 0$ по признаку Вейерштрасса в силу оценки $|f_0| < \frac{Bx_1}{2\gamma s^3}$. Поэтому функция $xI_{1l}(x,z,t)$ непрерывна на множестве $G: x > 0$, $z \le 0$, $t > 0$.

Пусть δ– любое число из интервала $\left(0, \sqrt{1+\gamma^2}-1\right)$. Тогда для всех $0 < s \le 1$, $0 < x \le \delta$, $z \le 0$, $t > 0$ имеем оценку

$$|f_0| < \frac{B\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-lx}}{\left[1+\gamma^2-(1+\delta)^2\right]\beta\sqrt{2s}}.$$

Отсюда, в силу того, что интеграл I_1 – собственный, а интеграл $\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s}}$ – сходящийся, для всех $0 < x \le \delta$, $z \le 0$, $t > 0$ имеем неравенство $0 \le |I_1| \le C_1\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-lx}$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $x \to +0$, получаем, что $I_1 \to 0$ при $x \to +0$ равномерно относительно z, t. Тогда для всех $0 \le x \le \delta$, $z \le 0$, $t > 0$ будем иметь оценку $|I_1| \le C_1\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-lx}$. Для всех $s \ge 1$, $0 < x \le \delta$, $z \le 0$, $t > 0$ имеем неравенство $|f_0| < \frac{Bx\,\mathrm{e}^{-lx}}{2\gamma s^3}$. Поэтому, рассуждая как и выше, получаем, что $I_2 \to 0$ при $x \to +0$ равномерно относительно z, t и $|I_2| \le C_2 x\,\mathrm{e}^{-lx}$ для всех $0 \le x \le \delta$, $z \le 0$, $t > 0$. Следовательно, $xI_{1l} \to 0$ при $x \to +0$ также равномерно, и поэтому существует предел данной функции в точках $(0, z, t)$, равный нулю, а для указанных x, z, t имеет место неравенство

$$x|I_{1l}| \le |I_1| + |I_2| \le C_3\left(\sqrt{x}+x\right)\mathrm{e}^{-lx}.$$

Если же $x \ge \delta$, то при всех $s \ge 0$, $z \le 0$, $t > 0$: $|f_0| \le \frac{Bx\,\mathrm{e}^{-lx}}{2\gamma(s+\delta)^3}$. Поэтому $x|I_{1l}| \le C_4 x\,\mathrm{e}^{-lx}$ для всех $x \ge \delta$, $z \le 0$, $t > 0$. Тогда для всех $x \ge 0$ и тех же z, t: $x|I_{1l}| \le C_5\left(\sqrt{x}+x\right)\mathrm{e}^{-lx}$.

Доопределяя функцию $xI_{1l}(x,z,t)$ в точках $(0,z,t)$ нулем, получаем функцию, непрерывную на множестве G': $x \ge 0$, $z \le 0$, $t > 0$.

Точно так же доказывается, что остальные интегралы по берегам разрезов, умноженные на x, можно доопределить до непрерывных на G' функций, для которых справедливы аналогичные оценки.

Оценим вычеты в полюсах p_n, $n = 1,2,3,4$. Так как $y(\eta, x) = \sqrt{x^2-\eta^2} > 0$, $-x < \eta < x$, то вычеты в полюсах $p_k(x)$, $k = 1,2$, имеют вид

$$\operatorname{res}[F, p_k] = \mp\frac{B\,\mathrm{e}^{\pm i\sigma(x)t - lx + z\sqrt{x^2-\sigma^2(x)}}\sqrt{x^2-\sigma^2(x)}}{\sigma(x)\left[\left(\pm i\sigma(x)+\gamma\right)^2+1\right]\left(2\sqrt{x^2-\sigma^2(x)}+\beta\right)},$$

где верхний знак соответствует индексу $k = 1$, а нижний – $k = 2$. Отсюда

$$\left|\operatorname{res}[F, p_k]\right| \le \frac{B\sqrt{x^2-\sigma^2(x)}\,\mathrm{e}^{-lx}}{\sigma(x)\sqrt{\left(\gamma^2+1-\sigma^2(x)\right)^2+4\gamma^2\sigma^2(x)}\left(2\sqrt{x^2-\sigma^2(x)}+\beta\right)} := f_1(x)\,\mathrm{e}^{-lx}.$$

Так как $\sigma(x) = O^*(x)$, $\sqrt{x^2-\sigma^2(x)} = O^*(x^2)$ при $x \to +0$, то $f_1(x) \to +0$ при $x \to +0$. Поэтому $\operatorname{res}[F, p_k] \to 0$ при $x \to +0$ равномерно относительно z, t, т.е. $\operatorname{res}[F, p_k]$ непрерывны на G'. Кроме того, $f_1(x) < \frac{B}{4\gamma\sigma^2(x)}$ для всех $x > 0$. Поскольку $\sigma(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, то $f_1(x) \to +0$ при $x \to +\infty$. Следовательно, в силу непрерывности, $|f_1(x)| \le C_6$ для всех $x \ge 0$ и, стало быть, $\left|\operatorname{res}[F, p_k]\right| \le C_6\,\mathrm{e}^{-lx}$ на G'.

В показательной форме значения функции $y(p,x)$ в полюсах p_m, $m = 3,4$, следующие:

$$y(p_m,x) = \sqrt[4]{\left(x^2+\gamma^2-1\right)^2+4\gamma^2}\,\mathrm{e}^{i\psi_m(x)},$$

где непрерывная функция $\psi_m(x)$ имеет вид

$$\psi_m(x) = \begin{cases} \mp\dfrac{\pi}{2} \pm \dfrac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{\gamma}{1-x} + \operatorname{arctg}\dfrac{\gamma}{1+x}\right), & 0 < x < 1, \\ \mp\dfrac{\pi}{4} \pm \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\gamma}{2}, & x = 1, \\ \pm\dfrac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{\gamma}{x+1} - \operatorname{arctg}\dfrac{\gamma}{x-1}\right), & x > 1. \end{cases}$$

Здесь верхний знак соответствует индексу $m = 3$, а нижний — $m = 4$. Заметим, что

$$\lim_{x\to+0} y(p_m,x) = \mp i\sqrt{\gamma^2+1}\,\mathrm{e}^{\pm i\operatorname{arctg}\gamma} := y_m.$$

При этом $p_m^2 + \beta y_m \neq 0$ для любых $\beta > 0$, $\gamma > 0$. В самом деле,

$$\left|p_m^2+\beta y_m\right|^2 = (\gamma^2+1)^2 + \beta^2(\gamma^2+1) + 2\beta\sqrt{\gamma^2+1}\left[2\gamma\cos(\operatorname{arctg}\gamma) + (\gamma^2-1)\sin(\operatorname{arctg}\gamma)\right] > 0,$$

поскольку выражение в квадратных скобках положительно при любом $\gamma > 0$.

Вычеты в полюсах p_m имеют вид

$$\operatorname{res}[F,p_m] = \mp\frac{B\,\mathrm{e}^{(-\gamma\pm i)t-lx+zy(p_m,x)}}{2\left[(-\gamma\pm i)^2+\beta y(p_m,x)\right]}.$$

Отсюда

$$\sqrt{x}\left|\operatorname{res}[F,p_m]\right| \le \frac{B\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-lx}}{2\left|(-\gamma\pm i)^2+\beta y(p_m,x)\right|} := f_2(x)\,\mathrm{e}^{-lx}.$$

Так как $f_2(x) \to +0$ при $x \to +0$, то $\sqrt{x}\operatorname{res}[F,p_m] \to 0$ при $x \to +0$ равномерно относительно z, t, т.е. $\sqrt{x}\operatorname{res}[F,p_m]$, а следовательно, и $x\operatorname{res}[F,p_m]$ непрерывны на G'. Так как при достаточно больших x $\beta\left|y(p_m,x)\right| > \left|p_m\right|^2 = 1+\gamma^2$, то при этих же x

$$\left|f_2(x)\right| < \frac{B\sqrt{x}}{2\left(\beta\left|y(p_m,x)\right|-\gamma^2-1\right)}.$$

Поскольку $\left|y(p_m,x)\right| = O^*(x)$ при $x \to +\infty$, то $f_2(x) \to +0$ при $x \to +\infty$. Тогда, в силу непрерывности, $\left|f_2(x)\right| \le C_7$, и на G' имеет место неравенство $x\left|\operatorname{res}[F,p_m]\right| \le C_7\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-lx}$. Поэтому подынтегральную функцию в (3) можно доопределить до непрерывной при $r \in (0,+\infty)$, $(x,z,t) \in G'$ функции и всюду на G' справедливо неравенство

$$x\left|\Phi(x,z,t)\right| \le C_8\left(\sqrt{x}+x\right)\mathrm{e}^{-lx}. \tag{14}$$

Из неравенства (14), в свою очередь, следует, что решение $\varphi(r,z,t)$ равномерно ограничено при $r > 0$, $z \le 0$, $t > 0$:

$$\left|\varphi(r,z,t)\right| \le C_8\int_0^{+\infty}\left|J_0(xr)\right|\mathrm{e}^{-lx}\left(\sqrt{x}+x\right)dx \le C_8\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-lx}\left(\sqrt{x}+x\right)dx = C.$$

4. ОЦЕНКА ВНЕШНЕГО ИНТЕГРАЛА

Получим оценку интеграла в правой части (3) при больших r. Представим его в виде

$$\int_0^{+\infty} J_0(xr)\Phi(x,z,t)xdx = \int_0^{1/\sqrt{r}} \cdots + \int_{1/\sqrt{r}}^{+\infty} \cdots = I' + I'', \quad r \gg 1.$$

Тогда

$$|I'| \le C_8 \int_0^{1/\sqrt{r}} |J_0(xr)|\left(\sqrt{x}+x\right)dx \le C_8 \int_0^{1/\sqrt{r}} \left(\sqrt{x}+x\right)dx = \frac{C_9}{r^{3/4}} + \frac{C_{10}}{r} < \frac{C'}{r^{3/4}}, \quad r \gg 1, \quad z \le 0, \quad t > 0.$$

Если $\frac{1}{\sqrt{r}} \le x < +\infty$, где $r \gg 1$, то $xr \gg 1$. Поэтому для функции Бесселя в интеграле I'' можно воспользоваться асимптотикой на бесконечности (см. [5])

$$I'' = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \int_{1/\sqrt{r}}^{+\infty} \cos\left(xr - \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{x}\Phi(x,z,t)dx + \int_{1/\sqrt{r}}^{+\infty} g(xr)x\Phi(x,z,t)dx,$$

где $|g(xr)| \le C_{11} \cdot (xr)^{-3/2}$ при $xr \gg 1$. С помощью полученных ранее оценок будем иметь

$$|I''| \le C_{12}/\sqrt{r} \int_{1/\sqrt{r}}^{+\infty} \left(1+\sqrt{x}\right)e^{-lx}\,dx + C_{13}/r^{3/2} \int_{1/\sqrt{r}}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right)e^{-lx}\,dx < C_{12}/\sqrt{r} \int_0^{+\infty} \left(1+\sqrt{x}\right)e^{-lx}\,dx +$$

$$+ C_{13}/r^{7/4} \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{u}} + \frac{r^{1/4}}{u}\right)e^{-\frac{lu}{\sqrt{r}}}\,du < C_{14}/\sqrt{r} + C_{15}/r^{3/2} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\frac{lu}{\sqrt{r}}}}{\sqrt{u}}\,du = C_{14}/\sqrt{r} + C_{16}/r^{3/2} \int_1^{+\infty} e^{-\frac{ls^2}{\sqrt{r}}}\,ds <$$

$$< C_{14}/\sqrt{r} + C_{16}/r^{3/2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{ls^2}{\sqrt{r}}}\,ds = C_{14}/\sqrt{r} + C_{17}/r^{5/4} < C''/\sqrt{r}, \quad r \gg 1, \quad z \le 0, \quad t > 0,$$

где $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{ls^2}{\sqrt{r}}}\,ds = \sqrt{\frac{\pi}{l}}\frac{r^{1/4}}{2}$ – интеграл Пуассона. Отсюда для решения $\varphi(r,z,t)$ будем иметь равномерную оценку при больших значениях полярного радиуса:

$$|\varphi(r,z,t)| \le |I'| + |I''| < \frac{\tilde{C}}{\sqrt{r}}, \quad r \gg 1, \quad z \le 0, \quad t > 0.$$

Подынтегральная функция в (3) непрерывна по совокупности переменных $x \ge 0$, $r > 0$, $z \le 0$, $t > 0$ вместе с частной производной по r. Интегралы

$$\int_0^{+\infty} J_0(xr)\Phi(x,z,t)xdx, \quad -\int_0^{+\infty} J_1(xr)\Phi(x,z,t)x^2dx$$

сходятся равномерно по r, согласно признаку Вейерштрасса. Поэтому для компоненты $u_r(r,z,t)$ вектора перемещений будем иметь интегральное представление

$$u_r(r,z,t) = -\int_0^{+\infty} J_1(xr)\Phi(x,z,t)x^2dx.$$

Рассуждая как и выше, получаем, что для $u_r(r,z,t)$ справедлива равномерная оценка

$$|u_r(r,z,t)| < \frac{\tilde{C}_1}{\sqrt{r}}, \quad r \gg 1, \quad z \le 0, \quad t > 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bromwich T.J.I'A.* On the influence of gravity on elastic waves and, in particular, on the vibrations of an elastic Globe // Proc. London Math. Soc. 1898. V. 30. P. 98–120.
2. *Ильясов Х.Х., Кравцов А.В., Кузнецов С.В., Секерж-Зенькович С.Я.* Аналитическое решение задачи Лэмба в случае предельного значения коэффициента Пуассона // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 4. С. 597–610.
3. *Ильясов Х.Х., Кравцов А.В., Кузнецов С.В., Секерж-Зенькович С.Я.* Внешняя пространственная задача Лэмба. Распределенная по поверхности гармоническая нагрузка // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2016. № 1. С. 50–56.
4. *Кравцов А.В., Кузнецов С.В., Секерж-Зенькович С.Я.* Конечноэлементные модели в задаче Лэмба // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2011. № 6. С. 160–169.
5. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963.
6. *Свешников А.Г., Тихонов А.Н.* Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1967.