ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 3, с. 403–420

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 519.634

О НОРМАЛЬНЫХ МОДАХ ВОЛНОВОДА[1)]

© 2022 г. О. К. Кройтор[1], М. Д. Малых[1,*], Л. А. Севастьянов[1]

[1] 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия

*e-mail: malykh_md@pfur.ru

Поступила в редакцию 13.05.2021 г.
Переработанный вариант 13.05.2021 г.
Принята к публикации 16.10.2021 г.

Рассматриваются электромагнитные волны, распространяющиеся в волноводе постоянного односвязного сечения S при условии, что заполняющее волновод вещество характеризуется диэлектрической и магнитной проницаемостями, меняющимися плавно на сечении S, но постоянными вдоль оси волновода. На стенках волновода взяты условия идеальной проводимости. Показано, что любое электромагнитное поле в таком волноводе можно представить с помощью четырех скалярных функций: двух электрических и двух магнитных потенциалов. Если проницаемости являются константами, то электрические потенциалы совпадают друг с другом с точностью до мультипликативной константы, равно как и магнитные потенциалы. Уравнения Максвелла записаны относительно потенциалов, а затем и относительно продольных компонент поля в виде пары интегродифференциальных уравнений, расщепляющихся на два несвязанных волновых уравнения в оптически однородном случае. Общая теория применена к задаче об отыскании нормальных мод волновода, которую удается сформулировать как задачу на собственные значения для самосопряженного квадратичного пучка. При малых возмущениях оптически однородного заполнения волновода линейный член пучка становится малым. При этом гибридизация мод происходит уже в первом порядке, а показатели фазового замедления нормальных мод покидают вещественную и мнимую оси разве лишь во втором. Библ. 40.

Ключевые слова: волновод, нормальные моды, спектр оператора, пространство Соболева.

DOI: 10.31857/S0044466922030085

ВВЕДЕНИЕ

Исследование волноводных задач в полной электромагнитной постановке было начато в работах А.Н. Тихонова и А.А. Самарского (см. [1]–[5]), написанных во второй половине XX в., где было строго доказано, что монохроматическая электромагнитная волна, распространяющаяся в регулярном волноводе (т.е. цилиндре постоянного односвязного сечения, имеющем идеально проводящие стенки и заполненном веществом с постоянными диэлектрической и магнитной проницаемостями), может быть представлена как суперпозиция так называемых нормальных волн. Само понятие нормальной волноводной волны или моды было введено заметно позже П.Е. Краснушкиным (см. [6]). Эти результаты позволи А.Г. Свешникову (см. [7]–[9]) ввести парциальные условия излучения и строго математически поставить задачу о дифракции волн на неоднородности, помещенной внутрь волновода. Результаты А.Н. Тихонова и А.А. Самарского частично были обобщены на случай волноводов с сердечниками, т.е. цилиндров, заполнение которых не меняется вдоль сечения, но остается постоянным вдоль оси (см. [10]–[16]). Такую конструкцию мы будем называть *регулярным волноводом*, заполненным оптически неоднородным веществом.

Желая избежать неоднозначности, напомним, что нормальной модой волновода называют нетривиальные решения уравнений Максвелла вида

$$\mathbf{E}(x, y)e^{ik\beta z - i\omega t}, \quad \mathbf{H}(x, y)e^{ik\beta z - i\omega t}, \tag{1}$$

удовлетворяющие условиям идеальной проводимости стенок волновода. Здесь и далее условимся работать в декартовой системе координат, ось Oz которой совпадает с осью волновода, поло-

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 20-11-20257).

жительный параметр ω – круговая частота волны, $k = \omega/c$ – волновое число, а комплексный параметр β – коэффициент фазового замедления.

В случае волновода с постоянными ε и μ электромагнитное поле можно описать с помощью двух скалярных потенциалов – электрической и магнитной функции Боргниса (см. [7], [17]). При этом уравнения Максвелла, записанные относительно потенциалов, расщепляются на две скалярные задачи, что дает сразу теорему о представлении поля в виде суммы полей трансверсально электрического (TE) и трансверсально магнитного (TM) типов. Теорема Стеклова, записанная для этих двух скалярных задач, позволяет разложить потенциалы по собственным функциям оператора Лапласа, взятым с соответствующими граничными условиями, и отсюда получается разложение произвольного поля по нормальным волнам.

В случае регулярных волноводов, заполненных оптически неоднородным веществом, мы можем сформулировать задачу об отыскании нормальных волн как задачу на собственные значения: дана частота ω, а требуется отыскать такие комплексные значения спектрального параметра β, при которых уравнения Максвелла, дополненные граничными условиями идеальной проводимости стенок волновода, допускают нетривиальное решение вида (1). Это дает восемь линейных уравнений в частных производных первого порядка относительно шести неизвестных функций, дополненных тремя граничными условиями. Поэтому традиционно выбирают три из шести компонент векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ и записывают задачу на собственные значения как систему трех уравнений 2-го порядка относительно этих компонент. А.Н. Боголюбов и Т.В. Едакина, Ф. Шмидт берут компоненты вектора $\mathbf{H}$ (см. [18]–[21]), Е. Лезар и Д. Девидсон – компоненты вектора $\mathbf{E}$ (см. [22]), А.Л. Делицын – компоненты H_x, H_y, E_z (см. [16]).

Заметим, что в любом случае получается несамосопряженный дифференциальный оператор 2-го порядка с бесконечномерным ядром. Путем введения подходящих функциональных пространств удается переписать эту спектральную задачу как обобщенную задачу на собственные значения для квадратичного несамосопряженного операторного пучка, удовлетворяющего условиям теоремы Келдыша о полноте системы собственных и присоединенных векторов (см. [23]). Тем самым удается доказать дискретность спектра этой задачи и полноту системы нормальных волн при условии, что к ним добавлены присоединенные собственные векторы спектральной задачи (см. [13]–[16]). Следует, однако, иметь в виду, что эта система не является ортогональной, поэтому ее использование сопряжено со значительными трудностями.

Поскольку задача об отыскании нормальных мод сводится к исследованию спектра несамосопряженного пучка, заранее не ясно, бывают ли случаи, в которых коэффициенты фазового замедления нормальных мод имеют и вещественную, и мнимую части. Нормальные моды осесимметричного волновода с диэлектрическим сердечником, рассмотренные в серии численных экспериментов (см. [24]–[26]), указали на такую возможность. Однако применение метода усечения для несамосопряженной задачи приводит к несамосопряженной алгебраической задаче на собственные значения. Современные численные алгоритмы решения этой задачи не позволяют уверенно распознавать вещественные составленные значения и значения с малой мнимой частью.

В свободном доступе имеется весьма немного программ для вычисления нормальных мод волноводов, заполненных оптически неоднородным веществом. Вероятно, наиболее доступная – программа Е. Лезара и Д. Девидсона (см. [22]), выполненная в рамках The FEniCS Project. Бесконечномерное ядро приводит при дискретизации к появлению ложных мод, для борьбы с которыми используют метод смешанных конечных элементов. Названные авторы сравнили свои результаты с результатами, полученными ранее Джином (см. [27]), для одного и того же волновода – прямоугольного волновода, заполненного наполовину. На дисперсионной кривой лишь первая ветвь совпала с графической точностью, следующие три ветви у Джина слились в две. Поэтому достигнутую точность едва ли можно считать приемлемой.

Возвращаясь к классическим работам А.Н. Тихонова и А.А. Самарского, нельзя не заметить, что в их основе лежит возможность представления электромагнитного поля с помощью двух скалярных функций, предложенная еще в XIX в. Попытки обобщения этого на случай сред, заполненных оптически неоднородным веществом, были начаты весьма давно и естественность такого подхода периодически заставляет к ним возвращаться, как при рассмотрении резонаторов (см. [28]), так и при рассмотрении волноводов (см. [29]). В настоящее время уверенно можно отбросить лишь одну гипотезу – о разложении поля на поля TE- и TM-типов, поскольку существование гибридных мод доказано аналитически для волноводов, заполненных наполовину (см. [30, § 3.5]). Принимая, что система уравнений для потенциалов не расщепляется в общем случае, мы не можем исключить того, что эта система записывается в самосопряженном виде.

В случае полого волновода потенциалы позволяли решить две задачи: уменьшить число неизвестных функций и работать с функциями, удовлетворяющими классическим краевым задачам математической физики. Мы решили пожертвовать первым свойством, но сохранить второе, с поправкой на появление члена, описывающего явление гибридизации мод. На этом пути удалось доказать, что любое поле в волноводе, в том числе заполненном оптически неоднородным веществом, представимо с помощью не двух, а четырех потенциалов – двух электрических и двух магнитных (см. [31]). На основе этого представления А.А. Тютюнник (см. [32]) разработал численный метод отыскания нормальных мод, его сравнение с другими методами обсуждается в [33].

В случае разрывного заполнения эти потенциалы остаются непрерывными функциям с непрерывной производной по нормали (точнее говоря, принадлежат пространству Соболева W_2^1), т.е. остаются в отличие от полей классическими объектами математической физики. В случае же постоянных ε и μ одноименные потенциалы совпадают друг с другом с точностью до мультипликативной константы и поэтому в классической теории их остается только два.

Доказав, что при переходе к потенциалам мы не теряем решения, можно переписать уравнения Максвелла относительно потенциалов и в самосопряженной форме, как мы надеялись с самого начала. На наш взгляд, в случае разрывных ε и μ аккуратное изложение теории требует рассматривать потенциалы как функции переменных z,t со значениями в соответствующих пространствах Соболева. Хотя эта конструкция уже рассматривалась в теории волноводов (см. [34], [35]), все же ее нельзя назвать легкой для восприятия. Поэтому в этой статье мы решили ограничиться случаем гладких ε и μ и односвязного сечения волновода. При этом мы стремились сделать изложение как можно более приближенным к классическим представлениям, в том числе использовали функцию Грина там, где напрашивалось применение теории операторов.

В разд. 1 мы вводим четыре потенциала и обсуждаем теорему о представлении (6) произвольного поля в волноводе с помощью этих потенциалов, доказательство которой выглядит много проще, чем для разрывного случая, рассмотренного в [31]. В разд. 2 уравнения Максвелла записываем относительно потенциалов и получаем основную систему уравнений (19). Затем в небольшом разд. 3 кратко обсуждается частный случай, когда показатель преломления остается константой, а в разд. 4 для оптически неоднородного заполнения основная система записана в самосопряженном виде (28) относительно E_z и H_z. Итоговый результат – теорема 3 – не содержит прямой отсылки к потенциалам, но получен он именно с помощью четырех потенциалов. В разд. 5 этот результат приложен к исследованию свойств нормальных мод волновода.

1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Пусть S – плоская односвязная область с гладкой границей ∂S, а Z,T – отрезки конечной или бесконечной длины. Под волноводом будем понимать цилиндр $S\times Z$, ось Oz декартовой системы координат направим по оси цилиндра. Заполнение волновода будем характеризовать диэлектрической и магнитной проницаемостями ε и μ; будем предполагать, что эти величины не зависят от z и времени t и принимают только положительные значения. Единичную внешнюю нормаль к кривой ∂S будем обозначать как $n=(n_x,n_y,0)^{\mathrm{T}}$, а тангенциальный вектор, лежащий в плоскости xy – как

$$\tau=(-n_y,n_x,0)^{\mathrm{T}}.$$

Пусть $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ – пара векторных полей в волноводе, компоненты которых принадлежат классу

$$\mathscr{C}^1=C^1(\bar{S}\times Z\times T),$$

удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\mu}{c}\partial_t\mathbf{H},\\
&\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{\varepsilon}{c}\partial_t k\mathbf{E},\\
&\operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E}=0,\\
&\operatorname{div}\mu\mathbf{H}=0
\end{aligned}\tag{2}$$

в $S\times Z\times T$ и условиям идеальной проводимости стенок волновода:

$$\mathbf{E}\times\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{H}\cdot\mathbf{n} = 0 \tag{3}$$

на $\partial S\times Z\times T$. Для волноводных задач естественным будет противопоставление переменных x, y и z, t. В этом случае координаты полей распадаются на две группы: четыре разрывные функции E_x, E_y, H_x, H_y и две непрерывные E_z, H_z, а уравнения Максвелла естественно расщепляются на две системы: первая система

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E} = 0,\\
&\operatorname{div}\mu\mathbf{H} = 0,\\
&(\operatorname{rot}\mathbf{E}, e_z) = -\partial_t\mu H_z,\\
&(\operatorname{rot}\mathbf{H}, e_z) = +\partial_t\varepsilon E_z
\end{aligned} \tag{4}$$

не содержит производных H_z, E_z по x, y, а вторая система

$$\begin{aligned}
&(\operatorname{rot}\mathbf{E}, e_x) = -\partial_t\mu H_x,\\
&(\operatorname{rot}\mathbf{E}, e_y) = -\partial_t\mu H_y,\\
&(\operatorname{rot}\mathbf{H}, e_x) = +\partial_t\varepsilon E_x,\\
&(\operatorname{rot}\mathbf{H}, e_y) = +\partial_t\varepsilon E_y
\end{aligned} \tag{5}$$

не содержит производных H_z, E_z по z, t. Здесь и далее $\partial_s = \dfrac{\partial}{\partial s}$ во всех случаях, кроме $\partial t = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}$.

Определение 1. Скалярную функцию $u(x,y,z,t)$ будем называть *электрическим потенциалом*, если эта функция принадлежит классу

$$C^2(S\times Z\times T)\cap C(\bar{S}\times Z\times T)$$

и удовлетворяет условию Дирихле $u = 0$ на границе $\partial S\times Z\times T$.

Определение 2. Скалярную функцию $v(x,y,z,t)$ будем называть *магнитным потенциалом*, если эта функция принадлежит классу

$$C^2(S\times Z\times T)\cap C^1(\bar{S}\times Z\times T)$$

и удовлетворяет условию Неймана $\partial_n v = 0$ на границе $\partial S\times Z\times T$.

Здесь и далее условимся обозначать эклектические потенциалы буквой u с различными индексами, а магнитные потенциалы – буквой v.

Примем, что

$$\mathbf{A}_\perp = (A_x, A_y, 0)^{\text{т}} \quad \text{и} \quad \nabla = (\partial_x, \partial_y, 0)^{\text{т}}, \quad \nabla' = (-\partial_y, \partial_x, 0)^{\text{т}}$$

и

$$\Delta_q u = \operatorname{div}(q\nabla u) = \frac{\partial}{\partial x}q\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}q\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Определение 3. Будем говорить, что электромагнитное поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ представимо с помощью четырех потенциалов: двух электрических потенциалов u_e, u_h и двух магнитных потенциалов v_e, v_h, если верно

$$\mathbf{E}_\perp = \nabla\partial_z u_e + \frac{1}{\varepsilon}\nabla'\partial_t v_e, \quad \mathbf{H}_\perp = \nabla\partial_z v_h - \frac{1}{\mu}\nabla'\partial_t u_h. \tag{6}$$

Лемма 1. *Если поле* $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ *допускает представление* (6)*, то оно удовлетворяет двум из трех краевых условий* (3)*, а именно*,

$$\tau\cdot\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{H} = 0. \tag{7}$$

Доказательство. В самом деле

$$\tau\cdot\mathbf{E} = \partial_z\frac{\partial u_e}{\partial\tau} + \frac{1}{\varepsilon}\partial_t\frac{\partial v_e}{\partial n} = 0$$

и

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{H} = \partial_z \frac{\partial v_h}{\partial n} - \frac{1}{\mu}\partial_t \frac{\partial u_h}{\partial \tau} = 0.$$

Первая четверка (4) задает связь между потенциалами и продольными компонентами поля E_z и H_z, которые мы намерены использовать для восстановления потенциалов по продольным компонентам. Мы специально так подобрали коэффициенты представления (6), чтобы уравнения первой четверки (4) расщепились на четыре уравнения, содержащие по одному потенциалу.

Лемма 2. *Если поле* **E**, **H** *допускает представление* (6), *то первая четверка уравнений Максвелла* (4) *относительно потенциалов записывается в виде*

$$\begin{aligned} &\partial_z\left(\Delta_\varepsilon u_e + \varepsilon E_z\right) = 0,\\ &\partial_t\left(\Delta_{1/\mu} u_h + \varepsilon E_z\right) = 0,\\ &\partial_t\left(\Delta_{1/\varepsilon} v_e + \mu H_z\right) = 0,\\ &\partial_z\left(\Delta_\mu v_h + \mu H_z\right) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Доказательство. Подставим представление (6) в первое уравнение первой четверки, т.е.

$$\operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E} = 0,$$

тогда получим

$$\partial_z \operatorname{div}\varepsilon\nabla u_e + \partial_t \operatorname{div}\nabla' v_e + \partial_z \varepsilon E_z = 0$$

или

$$\partial_z\left(\operatorname{div}\varepsilon\nabla u_e + \varepsilon E_z\right) = 0.$$

Таким образом, получаем уравнение, содержащее только u_e. Аналогичным образом получаются три другие уравнения.

Первое уравнение системы (8) означает, что

$$\Delta_\varepsilon u_e + \varepsilon E_z$$

не зависит от z. Это условие заведомо выполняется, если потребовать выполнения более жесткого условия

$$\Delta_\varepsilon u_e + \varepsilon E_z = 0.$$

На самом деле, при такой замене мы не теряем решения.

Теорема 1. *Пусть поле* **E**, **H**, *компоненты которого принадлежат классу* $\mathscr{C}^1$, *удовлетворяет первой четверке уравнений Максвелла* (4) *и двум краевым условиям* (7). *Если*

$$\iint\limits_S \mu H_z dxdy = 0, \tag{9}$$

то оно допускает представление (6), *причем потенциалы можно восстановить по заданным* E_z, H_z, *а по ним и однозначно все поле: электрические потенциалы восстанавливаются как решения задач Дирихле*

$$\begin{aligned} &\Delta_\varepsilon u_e + \varepsilon E_z = 0 \quad \text{в} \quad S\times Z\times T,\\ &u_e = 0 \quad \text{на} \quad \partial S\times Z\times T \end{aligned} \tag{10}$$

и

$$\begin{aligned} &\Delta_{1/\mu} u_h + \varepsilon E_z = 0 \quad \text{в} \quad S\times Z\times T,\\ &u_h = 0 \quad \text{на} \quad \partial S\times Z\times T, \end{aligned} \tag{11}$$

а магнитные потенциалы — как решения задач Неймана

$$\begin{aligned} &\Delta_{1/\varepsilon} v_e + \mu H_z = 0 \quad \text{в} \quad S\times Z\times T,\\ &\partial_n v_e = 0 \quad \text{на} \quad \partial S\times Z\times T \end{aligned} \tag{12}$$

и

$$
\begin{aligned}
&\Delta_\mu v_h + \mu H_z = 0 \quad \text{в} \quad S \times Z \times T,\\
&\partial_n v_h = 0 \quad \text{на} \quad \partial S \times Z \times T.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Доказательство. Пусть задано поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$. Свяжем с ним четыре скалярных потенциала как решения краевых задач (10)–(13). Задачи (10) и (11) имеют классические решения, причем они определены однозначно. Задачи (12) и (13) разрешимы только в том случае, когда выполнено условие (9), и в этом случае определены с точностью до функции, зависящей только от z и t.

Положим

$$
\mathbf{E}'_\perp = \nabla\partial_z u_e + \frac{1}{\varepsilon}\nabla'\partial_t v_e, \quad \mathbf{H}'_\perp = \nabla\partial_z v_h - \frac{1}{\mu}\nabla'\partial_t u_h
$$

и примем, что $E'_z = E_z$ и $H'_z = H_z$. Это новое поле в силу лемм 1 и 2 удовлетворяет первой четверке уравнений Максвелла (4) и двум краевым условиям (7). В силу линейности этих уравнений поле

$$
\mathbf{E}'' = \mathbf{E} - \mathbf{E}', \quad \mathbf{H}'' = \mathbf{H} - \mathbf{H}'
$$

тоже удовлетворяет первой четверке уравнений Максвелла (4) и двум краевым условиям (7), и при этом $E''_z = H''_z = 0$. Но тогда из уравнений Максвелла следует

$$
\partial_y E''_x - \partial_x E''_y = 0.
$$

Это влечет существование такого потенциала u, что

$$
E'' = \nabla u.
$$

Теперь уравнение $\operatorname{div}\varepsilon E'' = 0$ дает

$$
\operatorname{div}\varepsilon\nabla u = 0
$$

в волноводе, а граничное условие $\tau \cdot \mathbf{E} = 0$ – граничное условие $u = f(z,t)$. В силу единственности решения задачи Дирихле, отсюда сразу получается, что $u = f(z,t)$, и поэтому $\mathbf{E}'' = 0$. Аналогично доказывается, что $\mathbf{H}'' = 0$. Но это и означает, что $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}'$. Таким образом, заданное поле представимо с помощью четырех потенциалов.

Остается заметить, что неоднозначность в решении задач Неймана не вносит неоднозначности в определение поля по формуле (6), поскольку произвольная функция $f(z,t)$ исчезает из выражения после применения операторов ∇ и ∇'.

Условие (9) не является обременительным, поскольку в задачах о распространении монохроматических волн, когда ∂_t эквивалентно умножению на число $i\omega$, оно всегда выполнено в силу следующей леммы.

Лемма 3. *Пусть поле* $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, *компоненты которого принадлежат классу* $\mathscr{C}^1$, *удовлетворяет первой четверке уравнений Максвелла* (4) *и двум краевым условиям* (7). *Тогда*

$$
\partial_t \iint_S \mu H_z dxdy = \partial_z \iint_S \mu H_z dxdy = 0. \tag{14}
$$

Доказательство. В силу $\operatorname{div}\mu\mathbf{H} = 0$ и граничных условий

$$
\partial_z \iint_S \mu H_z dxdy = -\iint_S (\partial_x \mu H_x + \partial_y \mu H_y) dxdy = -\int_{\partial S} \mathbf{n} \cdot \mu\mathbf{H} ds = 0,
$$

а в силу $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\mu/c\partial_t\mathbf{H}$ и граничных условий

$$
\partial_t \iint_S \mu H_z dxdy = \iint_S (\partial_x E_y - \partial_y E_x) dxdy = -\int_{\partial S} (n_x E_y - n_y E_x) ds = 0.
$$

В задачах о распространении монохроматических волн оператор ∂_t превращается в оператор умножения на $i\omega$, поэтому доказанная лемма гарантирует выполнение условия (9) теоремы 1.

2. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА, ЗАПИСАННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОТЕНЦИАЛОВ

Из теоремы 1 следует, что решение уравнений Максвелла в волноводе можно искать в виде (6), не теряя общности рассмотрения. В силу леммы 2 первая четверка уравнений Максвелла эквивалентна уравнениями (8). Обратимся теперь ко второй четверке уравнений Максвелла (5).

Лемма 4. *Пусть электромагнитное поле удовлетворяет первым двум уравнениям второй четверки* (5) *и допускает представление* (6)*, тогда оно удовлетворяет уравнению*

$$\Delta_\varepsilon\left(\partial_z^2 u_e - \partial_t^2 u_h - E_z\right) = \partial_z\partial_t \frac{\partial(v_h, \varepsilon\mu)}{\partial(x, y)}. \tag{15}$$

Доказательство. Первые два уравнения этой четверки дают

$$\begin{aligned} \partial_y E_z - \partial_z E_y &= -\partial_t \mu H_x, \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z &= -\partial_t \mu H_y. \end{aligned}$$

Подставим сюда выражения (6):

$$\begin{aligned} \partial_y E_z - \partial_z^2 \partial_y u_e - \frac{1}{\varepsilon}\partial_z\partial_t\partial_x v_e &= -\partial_t\partial_z \mu\partial_x v_h - \partial_t^2\partial_y u_h, \\ \partial_z^2\partial_x u_e - \frac{1}{\varepsilon}\partial_z\partial_t\partial_y v_e - \partial_x E_z &= -\partial_t\partial_z\mu\partial_y v_h + \partial_t^2\partial_x u_h \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \partial_x\left(\partial_z^2 u_e - \partial_t^2 u_h - E_z\right) &= +\partial_z\partial_t\left(\frac{1}{\varepsilon}\partial_y v_e - \mu\partial_y v_h\right), \\ \partial_y\left(\partial_z^2 u_e - \partial_t^2 u_h - E_z\right) &= -\partial_z\partial_t\left(\frac{1}{\varepsilon}\partial_x v_e - \mu\partial_x v_h\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Если применить к первому уравнению оператор ∂_y, а ко второму — оператор $-\partial_x$, и сложить, получится

$$\partial_z\partial_t\left(\Delta_{1/\varepsilon} v_e - \Delta_\mu v_h\right) = 0,$$

что всегда выполняется в силу (12) и (13). Если же умножить оба уравнения на ε и применить к первому — оператор ∂_x, а ко второму — оператор ∂_y, и сложить, то получится

$$\Delta_\varepsilon\left(\partial_z^2 u_e - \partial_t^2 u_h - E_z\right) = \partial_z\partial_t\left(\partial_y \varepsilon\mu\partial_x - \partial_x\varepsilon\mu\partial_y\right) v_h$$

или (15).

Докажем обратное.

Лемма 5. *Пусть потенциалы удовлетворяют задачам* (10)–(13) *и уравнению* (15)*, а компонента* E_z *обращается в нуль на границе волновода, тогда поле* (6) *удовлетворяет первым двум уравнениям второй четверки* (5) *уравнений Максвелла.*

Доказательство. Первые два уравнения второй четверки эквивалентны системе (16), запишем эту систему как

$$\mathbf{A} = 0.$$

Поэтому существует такой скалярный потенциал w, что

$$\mathbf{A} = \nabla w.$$

Уравнение (15) означает, что

$$\Delta_\varepsilon w = 0.$$

Остается разобраться с граничными условиями. На границе ∂S волновода $n_x A_y - n_y A_x$ равно сумме двух слагаемых.

Первое равно

$$n_x \partial_y u - n_y \partial_x u,$$

здесь функция

$$u = \partial_z^2 u_e - \partial_t^2 u_h - E_z$$

является электрическим потенциалом, и поэтому

$$n_x \partial_y u - n_y \partial_x u.$$

Второе слагаемое равно

$$\partial_z \partial_t \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_e}{\partial n} - \mu \frac{\partial v_h}{\partial n} \right) = 0.$$

Поэтому на границе волновода

$$n_x A_y - n_y A_x = 0.$$

Как мы видели, из уравнений (12) и (13) следует, что

$$\partial_y A_x - \partial_x A_y = 0.$$

Относительно потенциала w это означает, что $w = w(z,t)$ на границе волновода. Поэтому $\mathbf{A} = 0$, т.е. выполняются оба первые уравнения второй четверки уравнений Максвелла.

Вторые два уравнения второй четверки (5) дают

$$\partial_y H_z - \partial_z H_y = \partial_t \varepsilon E_x,$$
$$\partial_z H_x - \partial_x H_z = \partial_t \varepsilon E_y.$$

Подставим сюда выражения (6):

$$\partial_y H_z - \partial_z^2 \partial_y v_h + \frac{1}{\mu} \partial_z \partial_t \partial_x u_h = \partial_t \partial_z \varepsilon \partial_x u_e - \partial_t^2 \partial_y v_e,$$
$$\partial_z^2 \partial_x v_h + \frac{1}{\mu} \partial_z \partial_t \partial_y u_h - \partial_x H_z = \partial_t \partial_z \varepsilon \partial_y u_e + \partial_t^2 \partial_x v_e$$

или

$$\partial_x \left(\partial_z^2 v_h - \partial_t^2 v_e - H_z \right) = -\partial_z \partial_t \left(\frac{1}{\mu} \partial_y u_h - \varepsilon \partial_y u_e \right),$$
$$\partial_y \left(\partial_z^2 v_h - \partial_t^2 v_e - H_z \right) = +\partial_z \partial_t \left(\frac{1}{\mu} \partial_x u_h - \varepsilon \partial_x u_e \right).$$

Отсюда сразу следует, что

$$\Delta_\mu \left(\partial_z^2 v_h - \partial_t^2 v_e - H_z \right) = -\partial_z \partial_t \frac{\partial(u_e, \varepsilon\mu)}{\partial(x, y)}. \tag{17}$$

Повторяя размышления, приведшие к леммам 4 и 5, имеем две новые леммы.

Лемма 6. *Пусть электромагнитное поле удовлетворяет последним двум уравнениям второй четверки* (5) *и допускает представление* (6)*, тогда оно удовлетворяет уравнению* (17).

Лемма 7. *Пусть потенциалы удовлетворяют задачам* (10)–(13) *и уравнению* (17)*, а компонента H_z – условию Неймана*

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0, \tag{18}$$

тогда поле (6) *удовлетворяет последним двум уравнениям второй четверки* (5) *уравнений Максвелла.*

Условие (18) должно выполняться на любом поле, удовлетворяющем всем уравнениям Максвелла всюду, в том числе на границе, и условиям (3) на границе. Поэтому его добавление к прочим краевым условиям не меняет задачу, однако оно не следует из первой четверки. Фактически его добавление позволяет понизить число уравнений второй четверки с четырех до двух.

В силу граничных условий продольные компоненты поля E_z и H_z можно рассматривать как потенциалы в смысле определений 1 и 2. Тогда, как следствие лемм 2, 5, 6, верна

Теорема 2. *Пусть u_e, u_h, E_z — электрические потенциалы, а v_e, v_h, H_z — магнитные. Если выполняются уравнения* (10)–(13) *и уравнения*

$$\begin{aligned} \Delta_\varepsilon\left(\partial_z^2 u_e - \partial_t^2 u_h - E_z\right) &= \partial_z\partial_t \frac{\partial(v_h, \varepsilon\mu)}{\partial(x, y)}, \\ \Delta_\mu\left(\partial_z^2 v_h - \partial_t^2 v_e - H_z\right) &= -\partial_z\partial_t \frac{\partial(u_e, \varepsilon\mu)}{\partial(x, y)}, \end{aligned} \tag{19}$$

то поле, восстановленное по формуле (6)*, удовлетворяет уравнениям Максвелла и краевым условиям* (3).

3. ОПТИЧЕСКИ ОДНОРОДНЫЙ СЛУЧАЙ

Уравнения (19) выглядят несколько необычно для теории волноводов, поэтому прежде всего следует убедиться в том, что для оптически однородного заполнения мы получим пару несвязанных волновых уравнений.

С этой целью преобразуем (19) к более знакомому (но не удобному для исследования общего случая) виду. В силу уравнений (10) и (11)

$$\Delta_\varepsilon u_e = -\varepsilon E_z$$

и

$$\Delta_\varepsilon u_h = \operatorname{div} \varepsilon \nabla u_h = \operatorname{div} \varepsilon\mu \cdot \frac{1}{\mu} \nabla u_h = -\varepsilon^2 \mu E_z + \frac{1}{\mu}(\nabla \varepsilon\mu, \nabla u_h).$$

Поэтому первое из уравнений (19) можно переписать в виде

$$\Delta_\varepsilon E_z + \varepsilon \partial_z^2 E_z - \varepsilon^2 \mu \partial_t^2 E_z = \partial_t^2 \frac{1}{\mu}(\nabla \varepsilon\mu, \nabla u_h) - \partial_z \partial_t \frac{\partial(v_h, \varepsilon\mu)}{\partial(x, y)}. \tag{20}$$

Аналогично, второе из этих уравнений можно переписать как

$$\Delta_\mu H_z + \mu \partial_z^2 H_z - \varepsilon \mu^2 \partial_t^2 H_z = \partial_t^2 \frac{1}{\varepsilon}(\nabla \varepsilon\mu, \nabla v_e) + \partial_z \partial_t \frac{\partial(u_e, \varepsilon\mu)}{\partial(x, y)}. \tag{21}$$

Теперь хорошо видно, что при $\nabla \varepsilon\mu = \mathbf{0}$ левые части этих уравнений обращаются в нуль и система (19) расщепляется на два независимых уравнения.

Определение 4. Будем говорить, что волновод *заполнен оптически однородным веществом*, если произведение $\varepsilon\mu$ является константой.

Приняв это определение, мы не будем предполагать, что ε и μ по отдельности являются константами. При этом, как и в случае волновода с постоянными проницаемостями, система уравнений Максвелла, записанная относительно потенциалов, расщепляется на две несвязанные системы. Как следствие теоремы 2, сразу имеем

Следствие 1. Пусть электрический потенциал E_z удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta_\varepsilon E_z + \varepsilon \partial_z^2 E_z - \varepsilon^2 \mu \partial_t^2 E_z = 0, \tag{22}$$

а магнитный потенциал H_z — волновому уравнению

$$\Delta_\mu H_z + \mu \partial_z^2 H_z - \varepsilon \mu^2 \partial_t^2 H_z = 0. \tag{23}$$

Если восстановить электрические потенциалы u_e, u_h и магнитные потенциалы как решения задач (10)–(13), а по формуле (6) поперечные компоненты поля, то полученное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла и краевым условиям (3).

Разумеется, при постоянных ε и μ уравнения (22) и (23) превращаются в обычные волновые уравнения

$$\Delta E_z + \partial_z^2 E_z - \varepsilon\mu \partial_t^2 E_z = 0$$

и

$$\Delta H_z + \partial_z^2 H_z - \varepsilon\mu\partial_t^2 H_z = 0.$$

Однако развитая выше теория потенциалов позволяет утверждать, что расщепление происходит в более общем случае, когда коэффициент преломления является константой, как это и должно быть из физических соображений.

С точки зрения теории пространств Соболева оператор Δ_ε не сложнее, чем классический лапласиан Δ, поэтому все теоремы теории волноводов с постоянными ε и μ переносятся на оптически однородный случай. Поскольку это обстоятельство, насколько нам известно, ранее не было отмечено, перечислим эти теоремы:

1) *всякое поле в волноводе представимо в виде суммы поля с* $E_z = 0$ (*TE-поле*) *и поля с* $H_z = 0$ (*TM-поле*);

2) *для всякой частоты* $\omega > 0$ *имеется счетный набор положительных значений для параметра* γ, *при которых уравнения Максвелла допускают нетривиальное решение вида*

$$\mathbf{E}(x,y)e^{i\omega t \pm i\gamma z}, \quad \mathbf{H}(x,y)e^{i\omega t \pm i\gamma z},$$

именуемых бегущими нормальными волнами;

3) *для всякой частоты* $\omega > 0$ *имеется счетный набор положительных значений для параметра* γ, *при которых уравнения Максвелла допускают нетривиальное решение вида*

$$\mathbf{E}(x,y)e^{i\omega t \pm \gamma z}, \quad \mathbf{H}(x,y)e^{i\omega t \pm \gamma z},$$

именуемых эванесцентными нормальными волнами;

4) *всякое монохроматическое поле можно представить в виде суперпозиции нормальных волн*.

4. ОПТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫЙ СЛУЧАЙ

В общем случае уравнения (20) и (21) не расщепляются. Из-за этого мы не можем строить поля с $E_z = 0$ или $H_z = 0$ и доказать теорему о представлении поля в виде суперпозиции полей TE- и TM-типов. Поэтому мы вынуждены строить решения, у которых и E_z, и H_z не равны тождественно нулю, такие поля часто называют гибридными.

Сам вид уравнений (20) и (21) не удобен для дальнейшего анализа, поэтому мы вернемся к системе (19). Запишем решение u краевой задачи

$$\Delta_s u = f, \qquad u|_{\partial S} = 0$$

с помощью функции Грина (см. [36, гл. 5, § 14]) в виде

$$u(x,y) = \iint\limits_S G_s(x,y;\xi,\eta) f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta,$$

а решение v краевой задачи

$$\Delta_s v = g, \qquad \partial_n v|_{\partial S} = 0$$

с помощью функции Грина в виде

$$v(x,y) = \iint\limits_S F_s(x,y;\xi,\eta) g(\xi,\eta)\,d\xi d\eta.$$

Тогда уравнение (10) можно записать в виде

$$u_e = -\iint\limits_S G_\varepsilon(x,y;\xi,\eta)\varepsilon(\xi,\eta)E_z(\xi,\eta)\,d\xi d\eta,$$

уравнение (13) можно записать в виде

$$v_h = -\iint\limits_S F_\mu(x,y;\xi,\eta)\mu(\xi,\eta)H_z(\xi,\eta)\,d\xi d\eta,$$

а систему (19) — в виде

$$\begin{aligned}\partial_z^2 u_e - \partial_t^2 u_h - E_z &= \partial_z \partial_t \iint\limits_S G_\varepsilon(x,y;\xi,\eta) \frac{\partial(v_h,\varepsilon\mu)}{\partial(\xi,\eta)} d\xi d\eta,\\ \partial_z^2 v_h - \partial_t^2 v_e - H_z &= -\partial_z \partial_t \iint\limits_S F_\mu(x,y;\xi,\eta) \frac{\partial(u_e,\varepsilon\mu)}{\partial(\xi,\eta)} d\xi d\eta.\end{aligned} \tag{24}$$

Рассмотрим правые части этих уравнений более подробно.

Лемма 8. *Положим*

$$K(x,y;p,q) = -\iint\limits_S \frac{\partial(G_\varepsilon(x,y;\xi,\eta), F_\mu(\xi,\eta;p,q))}{\partial(\xi,\eta)} \varepsilon(\xi,\eta)\mu(\xi,\eta) d\xi d\eta.$$

Тогда выражение

$$\iint\limits_S G_\varepsilon(x,y;\xi,\eta) \frac{\partial(v_h,\varepsilon\mu)}{\partial(\xi,\eta)} d\xi d\eta, \tag{25}$$

стоящее в правой части первого уравнения системы (24)*, равно*

$$\iint\limits_S K(x,y;p,q)\mu(p,q) H_z(p,q,z,t) dp dq,$$

а выражение

$$-\iint\limits_S F_\mu(x,y;\xi,\eta) \frac{\partial(u_e,\varepsilon\mu)}{\partial(\xi,\eta)} d\xi d\eta, \tag{26}$$

стоящее в правой части второго уравнения системы (24)*, равно*

$$\iint\limits_S K(p,q;x,y)\varepsilon(p,q) E_z(p,q,z,t) dp dq.$$

Доказательство. Выражение (25) может быть преобразовано по формуле Гаусса. Поскольку функция Грина G удовлетворяет условиям Дирихле, интеграл по границе при интегрировании обращается в нуль, и выражение (25) равно

$$\iint\limits_S \frac{\partial(G_\varepsilon(x,y;\xi,\eta), v_h)}{\partial(\xi,\eta)} \varepsilon(\xi,\eta)\mu(\xi,\eta) d\xi d\eta.$$

Подставляя сюда

$$v_h = -\iint\limits_S F_\mu(x,y;\xi,\eta)\mu(\xi,\eta) H_z(\xi,\eta) d\xi d\eta,$$

которое сразу следует из (13), и меняя порядок интегрирования, получаем выражение

$$\iint\limits_S K(x,y;p,q)\mu(p,q) H_z(p,q,z,t) dp dq.$$

Выражение (26) тоже может быть преобразовано по формуле Гаусса, но по той причине, что функция u_e удовлетворяет условиям Дирихле. Таким образом, интеграл (26) равен

$$\iint\limits_S \frac{\partial(u_e, F_\mu(x,y;\xi,\eta))}{\partial(\xi,\eta)} \mu(\xi,\eta) d\xi d\eta.$$

Подставляя сюда

$$u_e = -\iint\limits_S G_\varepsilon(x,y;\xi,\eta)\varepsilon(\xi,\eta) E_z(\xi,\eta) d\xi d\eta,$$

которое сразу следует из (10), и меняя порядок интегрирования, получаем выражение

$$\iint\limits_S K(p,q;x,y)\mu(p,q) H_z(p,q,z,t) dp dq.$$

Доказанная лемма 8 позволяет переписать уравнения (24) в виде

$$\partial_z^2 u_e - \partial_t^2 u_h - E_z = \partial_z \partial_t \iint_S K(x,y;\xi,\eta)\mu(\xi,\eta)H_z(\xi,\eta,z,t)d\xi d\eta,$$
$$\partial_z^2 v_h - \partial_t^2 v_e - H_z = \partial_z \partial_t \iint_S \varepsilon(\xi,\eta)K(\xi,\eta;x,y)E_z(\xi,\eta,z,t)d\xi d\eta.$$

Для симметризации умножим первое уравнение на ε, а второе на μ, тогда получим

$$\begin{aligned}\varepsilon\left(\partial_z^2 u_e - \partial_t^2 u_h - E_z\right) &= \partial_z \partial_t \iint_S Q(x,y;\xi,\eta)H_z(\xi,\eta,z,t)d\xi d\eta,\\ \mu\left(\partial_z^2 v_h - \partial_t^2 v_e - H_z\right) &= \partial_z \partial_t \iint_S Q(\xi,\eta;x,y)E_z(\xi,\eta,z,t)d\xi d\eta,\end{aligned} \tag{27}$$

где

$$Q(x,y;\xi,\eta) = \varepsilon(x,y)K(x,y;\xi,\eta)\mu(\xi,\eta).$$

Определение 5. Пусть ядро Q равно

$$Q(x,y;\xi,\eta) = \varepsilon(x,y)K(x,y;\xi,\eta)\mu(\xi,\eta),$$

где

$$K(x,y;\xi,\eta) = -\iint_S \frac{\partial(G_\varepsilon(x,y;p,q), F_\mu(p,q;\xi,\eta))}{\partial(p,q)}\varepsilon(p,q)\mu(p,q)dpdq.$$

Интегральный оператор, ставящий в соответствие функции f функцию

$$\iint_S Q(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

условимся называть *оператором гибридизации* и обозначать через $\hat{Q}$.

Лемма 9. *Пусть f — функция из $C(S)$, тогда $\hat{Q}f$ удовлетворяет условиям Дирихле, а $\hat{Q}^*f$ — условиям Неймана.*

Доказательство. Если точка $(x,y) \in \partial S$, то

$$K(x,y;\xi,\eta) = -\iint_S \frac{\partial(G_\varepsilon(x,y;p,q), F_\mu(p,q;\xi,\eta))}{\partial(p,q)}\varepsilon\mu dpdq = 0,$$

и поэтому $\hat{Q}f = 0$. Аналогично,

$$\partial_n K(\xi,\eta;x,y) = -\iint_S \frac{\partial(G_\varepsilon(\xi,\eta;p,q), \partial_n F_\mu(p,q;x,y))}{\partial(p,q)}\varepsilon\mu dpdq = 0,$$

и поэтому $\hat{Q}^*f = 0$.

Теорема 3. *Пусть функции E_z и H_z удовлетворяют дифференциальному уравнению*

$$\begin{pmatrix}\hat{A}_e & 0\\ 0 & \hat{B}_h\end{pmatrix}\partial_z^2\mathbf{F} - \begin{pmatrix}\hat{A}_h & 0\\ 0 & \hat{B}_e\end{pmatrix}\partial_t^2\mathbf{F} - \begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}\mathbf{F} = \begin{pmatrix}0 & \hat{C}\\ \hat{C}^* & 0\end{pmatrix}\partial_z\partial_t\mathbf{F}, \tag{28}$$

где

$$\mathbf{F} = (E_z, H_z)^{\mathrm{т}}.$$

Здесь $\hat{A}_e, \ldots, \hat{B}_h$ — симметрические положительно-определенные интегральные операторы с ядрами

$$A_e(x,y,\xi\eta) = -\varepsilon(x,y)G_\varepsilon(x,y;\xi,\eta)\varepsilon(\xi,\eta),$$
$$A_h(x,y,\xi\eta) = -\varepsilon(x,y)G_{1/\mu}(x,y;\xi,\eta)\varepsilon(\xi,\eta),$$
$$B_e(x,y,\xi\eta) = -\mu(x,y)F_{1/\varepsilon}(x,y;\xi,\eta)\mu(\xi,\eta),$$
$$B_h(x,y,\xi\eta) = -\mu(x,y)F_\mu(x,y;\xi,\eta)\mu(\xi,\eta),$$

действующие в $L^2(S)$, *а* $\hat{C}$ *— оператор гибридизации* (*определение* 5). *Если восстановить электрические потенциалы* u_e, u_h *и магнитные потенциалы как решения задач* (10)–(13), *а по формуле* (6) *— поперечные компоненты поля, то полученное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла и краевым условиям* (3).

Доказательство. Решение задачи (10) дается формулой

$$u_e = -\iint_S G_\varepsilon(x,y;\xi,\eta)\varepsilon(\xi,\eta)E_z(\xi,\eta,z,t)d\xi d\eta,$$

поэтому

$$\varepsilon u_e = \hat{A}_e E_z,$$

где $\hat{A}_e$ — интегральный оператор с симметричным ядром

$$A_e(x,y,\xi\eta) = -\varepsilon(x,y)G_\varepsilon(x,y;\xi,\eta)\varepsilon(\xi,\eta).$$

При этом

$$\iint_S E_z\hat{A}_e E_z dxdy = \iint_S \varepsilon u_e E_z dxdy = \iint_S \|\nabla u_e\|^2 \varepsilon dxdy > 0,$$

поэтому $\hat{A}_e > 0$.

Тем же путем можно выразить εu_h через E_z, а v_e и v_h через H_z. Тогда система (19) может быть записана в виде

$$\hat{A}_e\partial_z^2 E_z - \hat{A}_h\partial_t^2 E_z - \varepsilon E_z = \hat{C}\partial_z\partial_t H_z,$$
$$\hat{B}_h\partial_z^2 H_z - \hat{B}_e\partial_t^2 H_z - \mu H_z = \hat{C}^*\partial_z\partial_t E_z,$$

или в матричной форме (28).

Из леммы 9 следует, что E_z удовлетворяет условию Дирихле, а H_z — условиям Неймана. Теперь утверждение теоремы 3 следует из теоремы 2.

5. НОРМАЛЬНЫЕ МОДЫ ВОЛНОВОДА

Нормальной моде (1) соответствует решение системы (28) вида

$$E_z = E_z(x,t)e^{ik\beta z - i\omega t}, \quad H_z = H_z(x,t)e^{ik\beta z - i\omega t}.$$

Учитывая зависимость от z, t, мы можем записать задачу об отыскании нормальных мод волновода как задачу на собственные значения

$$\beta^2\begin{pmatrix}\hat{A}_e & 0\\ 0 & \hat{B}_h\end{pmatrix}\mathbf{F} - \begin{pmatrix}\hat{A}_h & 0\\ 0 & \hat{B}_e\end{pmatrix}\mathbf{F} + \frac{1}{k^2}\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}\mathbf{F} = \beta\begin{pmatrix}0 & \hat{C}\\ \hat{C}^* & 0\end{pmatrix}\mathbf{F} \tag{29}$$

относительно спектрального параметра β.

Таким образом, задача об отыскании нормальных мод сводится к исследованию спектра полиномиального операторного пучка

$$\hat{A}_2\beta^2 + \hat{A}_1\beta + \hat{A}_0, \tag{30}$$

где коэффициенты $\hat{A}_0$, $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$ — самосопряженные операторы относительно скалярного произведения в $L^2(S)\times L^2(S)$, причем старший коэффициент $\hat{A}_2$ — положительно-определенный и вполне непрерывный оператор, $\hat{A}_1$ — вполне непрерывный, а $\hat{A}_0$ — ограниченный и обратимый оператор.

Замечание. Пучки такого вида возникали в линейной теории малых демпфирований колебаний и изучались М.Г. Крейном и Г.К. Лангером (см. [37, § 12], а также [38, гл. 4] и [39, § 3.1]). К пучкам такого рода относится пучок вида

$$(E + \lambda Z)(E + \lambda Z^*) = E + \lambda(Z + Z^*) + ZZ^*,$$

где Z – любой, в том числе несамосопряженный оператор (см. [37, с. 357–358]). Поэтому спектр самосопряженного квадратичного пучка может быть устроен так же сложно, как спектр несамосопряженного оператора.

Один из основных приемов, используемых для исследования такого рода пучков, состоит во введении вспомогательных переменных.

Лемма 10. *Пусть $\hat{A}_0$, $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$ – ограниченные операторы, действующие в гильбертовом пространстве, и пусть $\hat{A}_2 > 0$. Тогда задача на собственные значения квадратичного пучка* (30) *эквивалентна обобщенной задаче на собственные значения*

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_0 & 0 \\ 0 & -\hat{A}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{A}_2 \\ \hat{A}_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{pmatrix} = 0, \tag{31}$$

в которую спектральный параметр β входит линейным образом. При этом всякий собственный вектор этой задачи удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{G} = \beta\mathbf{F}.$$

Доказательство. Пусть β – собственное значение пучка (30), а $\mathbf{F}$ – соответствующий собственный вектор, т.е.

$$(\hat{A}_2\beta^2 + \hat{A}_1\beta + \hat{A}_0)\mathbf{F} = 0.$$

Тогда верно и

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_0 & 0 \\ 0 & -\hat{A}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \beta\mathbf{F} \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{A}_2 \\ \hat{A}_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \beta\mathbf{F} \end{pmatrix} = 0.$$

Поэтому задача (31) имеет собственное значение β и собственный вектор

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \beta\mathbf{F} \end{pmatrix}.$$

Обратно, пусть β – собственное значение задачи (31), а $(\mathbf{F},\mathbf{G})^{\mathrm{T}}$ – соответствующий собственный вектор. Из второго уравнения системы (31) имеем

$$\hat{A}_2(\beta\mathbf{F} - \mathbf{G}) = 0,$$

поскольку оператор $\hat{A}_2 > 0$, отсюда следует $\mathbf{G} = \beta\mathbf{F}$. Но тогда первое уравнение означает, что β – собственное значение квадратичного пучка (30).

Задача (31) представляет собой обобщенную задачу на собственные значения для линейного самосопряженного пучка

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_0 & 0 \\ 0 & -\hat{A}_2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{A}_2 \\ \hat{A}_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть β – собственное значение задачи (31), а $(\mathbf{F},\mathbf{G})^{\mathrm{T}}$ – соответствующий собственный вектор. Отсюда получаются два соотношения на комплексные собственные значения.

Лемма 11. *Пусть выполнены условия леммы* 10, $\beta \not\subset \mathbb{R}$ – *комплексное собственное значение квадратичного пучка* (30)*, а* $\mathbf{F}$ – *отвечающий ему собственный вектор, тогда*

$$|\beta|^2(\mathbf{F},\hat{A}_2\mathbf{F}) = (\mathbf{F},\hat{A}_0\mathbf{F}) \tag{32}$$

и

$$(\beta + \beta^*)(\mathbf{F},\hat{A}_2\mathbf{F}) = -(\mathbf{F},\hat{A}_1\mathbf{F}). \tag{33}$$

Доказательство. Умножим (31) скалярно на собственный вектор:

$$(\mathbf{G},\hat{A}_2\mathbf{G}) - (\mathbf{F},\hat{A}_0\mathbf{F}) = \beta\Big((\mathbf{F},\hat{A}_1\mathbf{F}) + (\mathbf{F},\hat{A}_2\mathbf{G}) + (\mathbf{G},\hat{A}_2\mathbf{F})\Big).$$

В силу самосопряженности операторов выражения

$$(\mathbf{G},\hat{A}_i\mathbf{G}), \quad i = 1,2,3,$$

равно как и

$$(\mathbf{F}, \hat{A}_2\mathbf{G}) + (\mathbf{G}, \hat{A}_2\mathbf{F})$$

являются вещественными. Поэтому или собственное значение $\beta \in \mathbb{R}$, или обе части выписанного равенства равны нулю, т.е.

$$(\mathbf{G}, \hat{A}_2\mathbf{G}) = (\mathbf{F}, \hat{A}_0\mathbf{F})$$

и

$$(\mathbf{F}, \hat{A}_1\mathbf{F}) + (\mathbf{F}, \hat{A}_2\mathbf{G}) + (\mathbf{G}, \hat{A}_2\mathbf{F}) = 0.$$

Отсюда в силу $\mathbf{G} = \beta\mathbf{F}$ (лемма 10) получаются (32) и (33).

Для волноводов

$$\hat{A}_1 = -\begin{pmatrix} 0 & \hat{C} \\ \hat{C}^* & 0 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$-(\mathbf{F}, \hat{A}_1\mathbf{F}) = (E_z, \hat{C}H_z) + (\hat{C}H_z, E_z).$$

На TE- и TM-модах это выражение равно нулю, поэтому из леммы 11 сразу следует

Теорема 4. *TE и TM нормальные моды волновода, заполненного оптически неоднородным веществом, имеют или вещественный, или чисто мнимый показатель* β.

Доказательство. Если $\beta \notin \mathbb{R}$, на TE- или TM-моде соотношение (33) дает

$$(\beta + \beta^*)(\mathbf{F}, \hat{A}_2\mathbf{F}) = 0.$$

Поскольку $\hat{A}_2 > 0$, отсюда следует $\operatorname{Re}\beta = 0$.

Доказанная теорема означает, что возникновение комплексных показателей β является следствием гибридизации мод. Однако, вообще говоря, нельзя утверждать, что на каждой гибридной моде

$$(E_z, \hat{C}H_z) + (\hat{C}H_z, E_z) = 2\operatorname{Re}(E_z, \hat{C}H_z) \neq 0.$$

Подобраться к вопросу о возникновении гибридных мод и комплексных β проще всего с позиций теории возмущений. Рассмотрим волновод, показатель преломления которого меняется плавно, т.е.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + s\varepsilon_1(x, y), \quad \mu = \mu_0 + s\mu_1(x, y), \tag{34}$$

где параметр s характеризует малость добавки, зависящей от x, y. Тогда задача (29) принимает вид

$$\beta^2\begin{pmatrix} \hat{A}_e & 0 \\ 0 & \hat{B}_h \end{pmatrix}\mathbf{F} - \begin{pmatrix} \hat{A}_h & 0 \\ 0 & \hat{B}_e \end{pmatrix}\mathbf{F} + \frac{1}{k^2}\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\mathbf{F} = \beta s\begin{pmatrix} 0 & \hat{C} \\ \hat{C}^* & 0 \end{pmatrix}\mathbf{F}, \tag{35}$$

где оператор $\hat{C}$ рассчитывается для заполнения с $s = 1$.

При $s = 0$ задача расщепляется на две независимые, как это и должно быть в случае оптически однородного заполнения. Пусть β_0 – собственное значение невозмущенной задачи, которому отвечает, для определенности, TE мода. В его окрестности имеется собственное значение

$$\beta = \beta_0 + \beta_1 s + \ldots \tag{36}$$

возмущенной задачи ($s \in \mathbb{R}$ и достаточно мало), которому отвечает собственная функция

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + s\mathbf{F}_1 + \ldots = \begin{pmatrix} 0 \\ H_z^{(0)} \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} E_z^{(1)} \\ H_z^{(1)} \end{pmatrix} + \ldots . \tag{37}$$

Подстановка этого выражения в (35) уже в первом порядке дает

$$\beta_0^2\hat{A}_e E_z^{(1)} - \hat{A}_h E_z^{(1)} + \frac{\varepsilon}{k^2}E_z^{(1)} = \beta_0\hat{C}H_z^{(0)}.$$

Если не выбирать возмущение специальным образом, правая часть этого равенства не равна нулю, поэтому $E_z^{(1)} \neq 0$. Поэтому гибридизация моды происходит уже в первом порядке, и отвечает за нее, конечно, оператор гибридизации $\hat{C}$.

Теорема 5. *Показатель* β *нормальной моды волновода, заполненного веществом с диэлектрической и магнитной проницаемостями* (34)*, чисто мнимый при* $s = 0$*, остается чисто мнимым и в первом порядке теории возмущений.*

Доказательство. Пусть β_0 – чисто мнимое собственное значение невозмущенной задачи, в окрестности которого имеется собственное значение (36) возмущенной задачи, и ему отвечает собственная функция (37). Подставляя это выражение в (33), имеем

$$((\beta_1 + \beta_1^*)s + \ldots)((\mathbf{F}_0, \hat{A}_2\mathbf{F}_0) + \ldots) = -(\mathbf{F}_0, \hat{A}_1\mathbf{F}_1)s - (\mathbf{F}_1, \hat{A}_1\mathbf{F}_0)s + \ldots,$$

откуда в первом порядке

$$\operatorname{Re}\beta_1 \cdot (\mathbf{F}_0, \hat{A}_2\mathbf{F}_0) = -\operatorname{Re}(\mathbf{F}_0, \hat{A}_1\mathbf{F}_1)$$

или, вспоминая определения $\hat{A}_i$,

$$\operatorname{Re}\beta_1 \cdot (H_z^{(0)}, \hat{B}_h H_z^{(0)}) = \operatorname{Re}(E_z^{(1)}, \hat{C} H_z^{(0)}).$$

Но в силу (35)

$$\beta_0^2 \hat{A}_e E_z^{(1)} - \hat{A}_h E_z^{(1)} + \frac{\varepsilon_0}{k^2} E_z^{(1)} = \beta_0 \hat{C} H_z^{(0)}.$$

Поэтому

$$\beta_0(E_z^{(1)}, \hat{C} H_z^{(0)}) = \beta_0^2(E_z^{(1)}, \hat{A}_e E_z^{(1)}) - (E_z^{(1)}, \hat{A}_h E_z^{(1)}) + \frac{\varepsilon_0}{k^2}(E_z^{(1)}, E_z^{(1)}) \in \mathbb{R}.$$

Это означает, что $(E_z^{(1)}, \hat{C} H_z^{(0)})$ принимает чисто мнимые значения и поэтому

$$\operatorname{Re}\beta_1 \cdot (H_z^{(0)}, \hat{B}_h H_z^{(0)}) = 0,$$

откуда в силу $\hat{B}_h > 0$ следует, что $\operatorname{Re}\beta_1 = 0$.

Доказанная теорема означает, что гибридизация мод – явление первого порядка, а уход β с вещественной и мнимой осей – явление большего порядка, и поэтому оно так трудно наблюдаемо в численных экспериментах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Путем введения четырех потенциалов нам удалось свести задачу о распространении волн в волноводе, заполненном неоднородным веществом, к линейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка (28), коэффициенты которого суть самосопряженные операторы. При этом задача об отыскании нормальных волн сводится к исследованию спектра операторного квадратичного пучка (30).

Линейный член пучка описывает гибридизацию мод волновода, заполненного оптически неоднородным веществом. Поэтому мы рассмотрели возмущение полого волновода слабо неоднородным веществом (34). При этом оказалось, что гибридизация мод проявляется уже в первом порядке теории возмущений, а уход показателей фазового замедления мод с вещественной и мнимой осей – разве лишь во втором (теорема 5). Но мы не готовы утверждать, что при возмущении общего вида мнимое собственное значение обязательно получит вещественную добавку во втором порядке. На наш взгляд, требуется более детальное исследование 2-го порядка, в том числе, в рамках численных экспериментов с несколькими типичными для волноводов заполнениями.

Возникшая у нас как техническое средство при доказательстве леммы 10 запись задачи об отыскании нормальных мод в виде обобщенной задачи на собственные значения (31) будет весьма полезна для проведения численных экспериментов. Дело в том, что естественный численный метод решения этой задачи – метод усечения, который заменит задачу (31) на алгебраическую задачу того же вида. В конечномерном случае затруднения с обратимостью $\hat{A}_0$ снимаются и получается та самая алгебраическая обобщенная задача на собственные значения, на которую рассчитаны современные решатели (см. [40]). Это позволит, по крайней мере после дискретизации по сечению, работать с привычными самосопряженными матрицами. Выбор конечномерного базиса тоже не вызывает вопросов, поскольку E_z удовлетворяет условиям Дирихле, а H_z – условиям Неймана.

Исследование, как численное, так и аналитическое, спектральных свойств возникших у нас самосопряженных квадратичных пучков входит в наши ближайшие планы. Мы полагаем, что именно в этом направлении следует искать математические модели, описывающие распространение электромагнитных волн в волноводах.

Авторы благодарны А.Н. Боголюбову (МГУ) и участникам его семинара за плодотворное обсуждение черновой версии этой работы. Авторы благодарны Ю.Н. Орлову (ИПМ РАН), обратившему их внимание на возможность применения теории возмущения при исследовании роли оператора гибридизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А.А., Тихонов А.Н.* О возбуждении радиоволноводов. I // Ж. техн. физ. 1947. Т. 17. № 11. С. 1283–1296.
2. *Самарский А.А., Тихонов А.Н.* О возбуждении радиоволноводов. II // Ж. техн. физ. 1947. Т. 17. № 12. С. 1431–1440.
3. *Самарский А.А., Тихонов А.Н.* О возбуждении радиоволноводов. III // Ж. техн. физ. 1948. Т. 18. № 7. С. 971–983.
4. *Самарский А.А., Тихонов А.Н.* О представлении поля в волноводе в виде суммы полей TE и TM // Ж. техн. физ. 1948. Т. 18. № 7. С. 959–970.
5. *Самарский А.А., Тихонов А.Н.* К теории возбуждения радиоволноводов // Избран. тр. А.А. Самарского. М.: Макс Пресс, 2003. С. 28–57.
6. *Краснушкин П.Е., Моисеев Е.И.* О возбуждении вынужденных колебаний в слоистом радиоволноводе // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264. № 5. С. 1123–1127.
7. *Могилевский И.Е., Свешников А.Г.* Математические проблемы теории дифракции. М.: МГУ, 2010.
8. *Свешников А.Г.* К обоснованию метода расчета нерегулярных волноводов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1963. Т. 3. № 1. С. 219–232.
9. *Свешников А.Г.* К обоснованию метода расчета распространения электромагнитных колебаний в нерегулярных волноводах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1963. Т. 3. № 2. С. 314–326.
10. *Смирнов Ю.Г.* О полноте системы собственных и присоединенных волн частично заполненного волновода с нерегулярной границей // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297. № 4. С. 829–832.
11. *Смирнов Ю.Г.* Применения метода операторных пучков в задаче о собственных волнах частично заполненного волновода с нерегулярной границей // Докл. АН СССР. 1990. Т. 312. № 3. С. 597–599.
12. *Смирнов Ю.Г.* Метод операторных пучков в краевых задачах сопряжения для эллиптических уравнений // Дифференц. ур-ния. 1991. Т. 27. № 1. С. 140–147.
13. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Свешников А.Г.* О полноте системы собственных и присоединенных функций волновода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т. 38. № 11. С. 1891–1899.
14. *Делицын А.Л.* Об одном подходе к вопросу о полноте нормальных волн волновода с магнитодиэлектрическим заполнением // Дифференц. ур-ния. 2000. Т. 36. № 5. С. 629–633.
15. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Малых М.Д.* О корневых векторах цилиндрического волновода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 1. С. 126–129.
16. *Делицын А.Л.* О полноте системы собственных векторов электромагнитных волноводов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 10. С. 1883–1888.
17. *Zhang K., Li D.* Electromagnetic theory for microwaves and optoelectronics. 2 ed. Berlin: Springer, 2008.
18. *Боголюбов А.Н., Едакина Т.В.* Применение вариационно-разностных методов для расчета диэлектрических волноводов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3: Физ. Астрон. 1991. Т. 32. № 2. С. 6–14.
19. *Боголюбов А.Н., Едакина Т.В.* Расчет диэлектрических волноводов со сложной формой поперечного сечения вариационно-разностным методом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3: Физ. Астрон. 1992. Т. 34. № 3. С. 72–74.
20. *Deuflhard P., Schmidt F., Friese T., Zschiedrich L.* Adaptive multigrid methods for the vectorial Maxwell eigenvalue problem for optical waveguide design / Mathematics – Key Technology for the Future / Ed. By W. Jäger, H.J. Krebs. Berlin–Heidelberg: Springer, 2011. P. 279–292.
21. *Schmidt F., Burger S., Pomplun J., Zschiedrich L.* Advanced FEM analysis of optical waveguides: algorithms and applications / Proc. SPIE. 2008. V. 6896.

22. *Lezar E., Davidson D.B.* Electromagnetic waveguide analysis / Automated solution of differential equations by the finite element method. The FEniCS Project, 2011. P. 629–643.
23. *Келдыш М.В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Избран. тр. Математика. М.: Наука, 1985. С. 305–332.
24. *Новоселова Н.А., Раевский С.Б., Титаренко А.А.* Расчет характеристик распространения симметричных волн круглого волновода с радиально-неоднородным диэлектрическим заполнением // Тр. Нижегород. гос. техн. ун-та им. Р.Е. Алексеева. 2010. № 2(81). С. 30–38.
25. *Делицын А.Л., Круглов С.И.* Смешанные конечные элементы для анализа вещественных и комплексных мод цилиндрических волноводов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2011. № 6. С. 53–57.
26. *Делицын А.Л., Круглов С.И.* Применение метода смешанных конечных элементов для вычисления мод цилиндрических волноводов с переменным показателем преломления // Ж. радиоэлектроники. 2012. № 4. С. 1–28; http://jre.cplire.ru/alt/ apr12/3/text.html.
27. *Jin J.* The finite element method in electromagnetics. 2 ed. New York: John Wiley & Sons Inc., 2002.
28. *Eremenko Z.E., Tarasov Yu.V., Volovichev I.N.* A method of effective potentials for calculating the frequency spectrum of eccentrically layered spherical cavity resonators // J. Electromagnet. Waves and Appl. 2020. V. 34. № 6. P. 802–824.
29. *Malykh M.D., Nikolaev N.E., Sevastianov L.A., Tiutiunnik A.A.* On the representation of electromagnetic fields in closed waveguides using four scalar potentials // J. Electromagnet. Waves and Appl. 2018. V. 32. № 7. P. 886–898.
30. *Chew W.C.* Lectures on theory of microwave and optical waveguides, 2012; wcchew.ece.illinois.edu.
31. *Малых М.Д., Севастьянов Л.А.* О представлении электромагнитных полей в закрытых волноводах с разрывным заполнением при помощи непрерывных потенциалов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 2. С. 342–354.
32. *Тютюнник А.А.* О вычислении электромагнитных полей в закрытых волноводах с неоднородным заполнением // Вестн. РУДН. Сер.: Матем. Информат. Физ. 2018. Т. 26. № 2. С. 129–139.
33. *Malykh M.D., Divakov D.V., Egorov A.A., Kuziv Ya.Yu.* Calculation of the normal modes of closed waveguides // Discrete and Continuous Models and Appl. Computat. Sci. 2020. V. 28. № 1. P. 62–76.
34. *Зильберглейт А.С., Копилевич Ю.И.* Спектральная теория регулярных волноводов. Ленинград: ФТИ, 1983.
35. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д.* Замечание об условиях излучения для нерегулярного волновода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 4. С. 585–588.
36. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Москва–Ленинград: Гостехиздат, 1933. V. 1.
37. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Мир, 1965.
38. *Маркус А.С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. Кишинев: Штиинца, 1986.
39. *Копачевский Н.Д.* Спектральная теория операторных пучков: Специальный курс лекций. Симферополь: ФОРМА, 2009.
40. *Hecht F., Freefem.* Laboratoire Jacques-Louis Lions, Universit\`e Pierre et Marie Curie, Paris, 3 ed., 2018; www.freefem.org.