ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 3, с. 421–436

УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.956.224

КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ В СЛУЧАЕ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА[1)]

П. А. Крутицкий[1,*], И. О. Резниченко[2,]**

[1] 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. Келдыша РАН, Россия

[2] 119991 Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, 1, стр. 2, Физический факультет, Россия

*e-mail: biem@mail.ru

**e-mail: io.reznichenko@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 15.06.2021 г.
Переработанный вариант 15.06.2021 г.
Принята к публикации 17.11.2021 г.

Выводится квадратурная формула для потенциала двойного слоя в случае уравнения Гельмгольца с непрерывной плотностью, заданной на гладкой замкнутой либо разомкнутой поверхности. Эта квадратурная формула дает более высокую точность вычислений, чем стандартная квадратурная формула, что подтверждается численными тестами. Преимущество новой квадратурной формулы особенно заметно вблизи поверхности, где стандартная квадратурная формула быстро расходится, тогда как новая формула обеспечивает приемлемую точность вычислений для точек, отстоящих от поверхности на расстояниях, сопоставимых с шагом интегрирования и более. Библ. 19. Табл. 3.

Ключевые слова: потенциал двойного слоя, квадратурная формула, уравнение Гельмгольца.

DOI: 10.31857/S0044466922030097

1. ВВЕДЕНИЕ

Потенциал двойного слоя используется при решении краевых задач для уравнения Гельмгольца методом интегральных уравнений. Такие задачи возникают в различных областях математической физики, например, в теории рассеяния акустических и электромагнитных волн на препятствиях, в геофизической гидродинамике, при изучении дифракции приливных волн на островах, в теории тепловых волн в термодинамике и т.д. Численное решение краевых задач с помощью потенциала двойного слоя обсуждалось в [1]–[3] и состоит из двух этапов. На первом этапе, численно решая граничное интегральное уравнение, находят плотность потенциала. На втором этапе, подставляя численное значение плотности в квадратурную формулу, находят решение краевой задачи в любой точке области. Однако квадратурные формулы для потенциалов, используемые в инженерных расчетах [4], не дают равномерной аппроксимации потенциала в области и не сохраняют свойство непрерывности потенциалов вплоть до границы области. Более того, вблизи определенных точек на границе области квадратурные формулы расходятся и стремятся к бесконечности, хотя сами потенциалы ограничены вблизи границы. При использовании стандартных квадратурных формул для повышения точности приходится либо уменьшать шаг, либо проводить дополнительные построения вблизи границы области, что увеличивает стоимость вычислений. Актуальной является задача по получению улучшенных квадратурных формул, обеспечивающих повышенную точность вблизи границы.

В двумерном случае улучшенная квадратурная формула для потенциала простого слоя с плотностью, заданной на разомкнутых кривых и имеющей степенные особенности на концах кривых, построена в [5], [6]. Эта формула может применяться при нахождении численных решений краевых задач для уравнения Гельмгольца вне разрезов и разомкнутых кривых на плоскости с использованием метода потенциалов и граничных интегральных уравнений. Такие задачи изучались указанным методом в [7]–[11]. В [12] была предложена улучшенная квадратурная формула для потенциала простого слоя в трехмерном случае, обеспечивающая равномерную аппроксима-

[1)]Работа И.О. Резниченко выполнена при финансовой поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики, соглашение с Минобрнауки РФ (№ 075-15-2019-1623).

цию и равномерную сходимость в области. Кроме того, эта формула сохраняет свойство непрерывности потенциала простого слоя при переходе через границу области. В настоящей работе построена улучшенная квадратурная формула для потенциала двойного слоя в случае уравнения Гельмгольца. Формула обеспечивает более высокую точность вычислений, чем стандартная квадратурная формула, что подтверждается численными тестами. Преимущество улучшенной формулы по сравнению со стандартной особенно заметно на небольших расстояниях от границы.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Введем в пространстве декартову систему координат $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$. Пусть Γ – простая гладкая замкнутая поверхность класса C^2, либо простая гладкая ограниченная разомкнутая ориентированная поверхность класса C^2, содержащая свои предельные точки [13, гл. 14, § 1]. Если поверхность Γ замкнутая, то она должна ограничивать объемно-односвязную внутреннюю область [14, с. 201]. Предположим, что поверхность Γ параметризована так, что на нее отображается прямоугольник:

$$y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma, \quad y_1 = y_1(u,v), \quad y_2 = y_2(u,v), \quad y_3 = y_3(u,v); \quad u \in [0, A], \quad v \in [0, B];$$
$$y_j(u,v) \in C^2([0,A]\times[0,B]), \quad j = 1,2,3. \tag{1}$$

Сфера, поверхность эллипсоида, гладкие поверхности фигур вращения, поверхность тора и многие другие более сложные поверхности можно параметризовать таким образом. Введем N точек u_n с шагом h на отрезке $[0, A]$ и M точек v_m на отрезке $[0, B]$, и рассмотрим разбиение прямоугольника $[0,A]\times[0,B]$, который отображается на поверхность Γ

$$A = Nh, \quad B = MH, \quad u_n = (n+1/2)h, \quad n = 0,\dots,N-1; \quad v_m = (m+1/2)H, \quad m = 0,\dots,M-1.$$

Тем самым прямоугольник $[0,A]\times[0,B]$ разбивается на $N \times M$ маленьких прямоугольничков и через (u_n, v_m) обозначены серединки этих прямоугольничков.

Известно (см. [13, гл. 14, § 1]), что компоненты вектора нормали (не единичного) $\eta(y) = (\eta_1(y), \eta_2(y), \eta_3(y))$ в точке поверхности $y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma$ выражаются через определители второго порядка формулами

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} (y_2)_u & (y_3)_u \\ (y_2)_v & (y_3)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{vmatrix} (y_3)_u & (y_1)_u \\ (y_3)_v & (y_1)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{vmatrix} (y_1)_u & (y_2)_u \\ (y_1)_v & (y_2)_v \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Положим $|\eta(y)| = \sqrt{(\eta_1(y))^2 + (\eta_2(y))^2 + (\eta_3(y))^2}$. Известно (см. [13, гл. 14, § 1–2]), что

$$\int_\Gamma F(y)ds_y = \int_0^A du \int_0^B dv\, F(y(u,v))|\eta(y(u,v))|.$$

Потребуем, чтобы

$$|\eta(y(u,v))| > 0 \quad \forall (u,v) \in ((0,A)\times(0,B)). \tag{3}$$

Из условия (3) следует, что $|\eta(y(u,v))| \in C^1((0,A)\times(0,B))$.

Через $\mathbf{n}_y$ обозначим единичную нормаль в точке $y \in \Gamma$, т.е. $\mathbf{n}_y = \eta(y)/|\eta(y)|$. Производная по нормали $\mathbf{n}_y$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} = |\eta(y)|^{-1}(\eta(y), \nabla_y).$$

Пусть $|x - y(u,v)| = \sqrt{(x_1 - y_1(u,v))^2 + (x_2 - y_2(u,v))^2 + (x_3 - y_3(u,v))^2}$ и заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y}|x - y| = \frac{1}{|\eta(y)|}\sum_{j=1}^3 \eta_j(y)\frac{y_j - x_j}{|x - y|}.$$

Потенциал двойного слоя для уравнения Гельмгольца используется при решении краевых задач методом интегральных уравнений. Пусть $x \notin \Gamma$. Рассмотрим потенциал двойного слоя для уравнения Гельмгольца с заданной на поверхности Γ плотностью $\mu(y) \in C^0(\Gamma)$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}_k[\mu](x) &= \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \mu(y)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}ds_y = \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \mu(y)\frac{1}{|\eta(y)|}\frac{\exp(ik|x-y|)(ik|x-y|-1)}{|x-y|^2}\sum_{j=1}^{3}\frac{\eta_j(y)(y_j-x_j)}{|x-y|}ds_y = \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^A du\int_0^B dv\mu(y(u,v))\exp(ik|x-y(u,v)|)(ik|x-y(u,v)|-1)\times \\
&\quad\times\sum_{j=1}^{3}\frac{\eta_j(y(u,v))(y_j(u,v)-x_j)}{|x-y(u,v)|^3} = \\
&= \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2}du\int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2}dv\mu(y(u,v))\times \\
&\quad\times\exp(ik|x-y(u,v)|)(ik|x-y(u,v)|-1)\sum_{j=1}^{3}\frac{\eta_j(y(u,v))(y_j(u,v)-x_j)}{|x-y(u,v)|^3},
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где $k \geq 0$. Пусть $\mu_{nm} = \mu(y(u_n, v_m))$, тогда

$$
\mu(y(u,v)) = \mu_{nm} + o(1), \tag{5}
$$

для $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$ и $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$.

Так же как и в [12] можно показать, что при $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$ и $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$

$$
|x - y(u,v)| = |x - y(u_n, v_m)| + O(h+H), \quad \exp(ik|x-y(u,v)|) = \exp(ik|x-y(u_n,v_m)|) + O(h+H)
$$

для любого $x \notin \Gamma$. Константы в оценках функций, обозначенных через $O(h+H)$, не зависят от n, m и от расположения $x \notin \Gamma$.

Следовательно, имеем

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}_k[\mu](x) &\approx \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\mu_{nm}\exp(ik|x-y(u_n,v_m)|)(ik|x-y(u_n,v_m)|-1)\times \\
&\quad\times\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2}du\int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2}dv\sum_{j=1}^{3}\frac{\eta_j(y(u,v))(y_j(u,v)-x_j)}{|x-y(u,v)|^3}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Таким образом, чтобы получить квадратурную формулу для потенциала двойного слоя при $x \notin \Gamma$, необходимо вычислить интеграл

$$
\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2}du\int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2}dv\sum_{j=1}^{3}\frac{\eta_j(y(u,v))(y_j(u,v)-x_j)}{|x-y(u,v)|^3}, \tag{7}
$$

который будем называть *каноническим интегралом*.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть точка x не принадлежит кусочку поверхности Γ, на котором изменяется точка $y = y(u,v)$, когда $(u - u_n) \in [-h/2, h/2]$ и $(v - v_m) \in [-H/2, H/2]$. Разложим $y_j(u,v)$ по формуле Тейлора с центром в точке (u_n, v_m), тогда для $j = 1,2,3$ получим

$$
y_j(u,v) = y_j(u_n,v_m) + D_j + O(H^2 + h^2),
$$

где

$$D_j = (y_j)'_u(u-u_n) + (y_j)'_v(v-v_m).$$

Здесь и далее все производные по u и v берутся в точке (u_n, v_m). Положим

$$r^2 = |x - y(u_n, v_m)|^2 = \sum_{j=1}^{3} r_j^2 \neq 0, \quad r_j = y_j(u_n, v_m) - x_j, \quad j = 1,2,3,$$

тогда

$$y_j(u,v) - x_j = r_j + D_j + O(H^2 + h^2), \quad j = 1,2,3.$$

Следовательно, имеем

$$|x - y(u,v)|^2 = \sum_{j=1}^{3}(x_j - y_j(u,v))^2 \approx \sum_{j=1}^{3}(r_j^2 + 2r_jD_j + D_j^2) =$$
$$= r^2 + 2P(u-u_n) + 2Q(v-v_m) + \alpha^2(u-u_n)^2 + \beta^2(v-v_m)^2 + 2\delta(u-u_n)(v-v_m) =$$
$$= \beta^2(V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 - (\delta U + Q)^2/\beta^2 + \alpha^2U^2 + 2PU + r^2,$$

где $U = u - u_n$, $V = v - v_m$,

$$P = \sum_{j=1}^{3} r_j(y_j)'_u, \quad Q = \sum_{j=1}^{3} r_j(y_j)'_v, \quad \alpha^2 = \sum_{j=1}^{3}((y_j)'_u)^2, \quad \beta^2 = \sum_{j=1}^{3}((y_j)'_v)^2, \quad \delta = \sum_{j=1}^{3}(y_j)'_u(y_j)'_v.$$

Производные по u и v берутся в точке $u = u_n$, $v = v_m$. Можно показать [13, гл. 14, § 1], что

$$\alpha^2\beta^2 - \delta^2 = |\eta(y(u_n, v_m))|^2. \tag{8}$$

Согласно условию (3), $|\eta(y(u_n, v_m))| > 0$ для всех возможных n, m, поэтому верно

$$\alpha^2\beta^2 - \delta^2 > 0. \tag{9}$$

Отсюда следует, что $\alpha^2 > 0$ и $\beta^2 > 0$.

Применяя формулу Тейлора в точке (u_n, v_m) с остаточным членом в форме Пеано [13, гл. 10, § 5.3], находим

$$\eta_j(y(u,v)) = \eta_j(y(u_n,v_m)) + (\eta_j)'_u(u-u_n) + (\eta_j)'_v(v-v_m) + o\left(\sqrt{(u-u_n)^2 + (v-v_m)^2}\right).$$

Производные по u и v берутся в точке (u_n, v_m).

Для вычисления выражения

$$\sum_{j=1}^{3}\eta_j(y(u,v))(y_j(u,v) - x_j)$$

с учетом формул

$$\sum_{j=1}^{3}\eta_j(y(u_n,v_m))(y_j)'_u = \sum_{j=1}^{3}\eta_j(y(u_n,v_m))(y_j)'_v = 0,$$

отражающих ортогональность вектора нормали и касательных векторов к поверхности (см. [13, гл. 14, § 1.2]), воспользуемся разложением по формуле Тейлора в точке (u_n, v_m) с остаточным членом в форме Пеано

$$y_j(u,v) - x_j = r_j + (y_j)'_u(u-u_n) + (y_j)'_v(v-v_m) + \frac{1}{2}(y_j)''_{uu}(u-u_n)^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}(y_j)''_{vv}(v-v_m)^2 + (y_j)''_{uv}(u-u_n)(v-v_m) + o\left((u-u_n)^2 + (v-v_m)^2\right),$$

тогда получаем

$$\sum_{j=1}^{3}\eta_j(y(u,v))(y_j(u,v)-x_j)\approx R+\xi_4U+\xi_5V+\xi_1U^2+\xi_2V^2+\xi_3UV,$$

где $U=u-u_n$, $V=v-v_m$,

$$\xi_1=\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\eta_j(y(u_n,v_m))(y_j)''_{uu}+(\eta_j)'_u(y_j)'_u\right),\quad \xi_2=\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\eta_j(y(u_n,v_m))(y_j)''_{vv}+(\eta_j)'_v(y_j)'_v\right),$$

$$\xi_3=\sum_{j=1}^{3}\left(\eta_j(y(u_n,v_m))(y_j)''_{uv}+(\eta_j)'_u(y_j)'_v+(\eta_j)'_v(y_j)'_u\right),$$

$$\xi_4=\sum_{j=1}^{3}(\eta_j)'_ur_j,\quad \xi_5=\sum_{j=1}^{3}(\eta_j)'_vr_j,\quad R=\sum_{j=1}^{3}\eta_j(y(u_n,v_m))r_j.$$

Все производные по u, v берутся в точке (u_n,v_m).

Из приведенных соотношений вытекает, что канонический интеграл (7) приближенно равен следующему интегралу, который обозначим через $K_{nm}(x)$:

$$\int\limits_{u_n-h/2}^{u_n+h/2}du\int\limits_{v_m-H/2}^{v_m+H/2}dv\frac{1}{\left|x-y(u,v)\right|^3}\sum_{j=1}^{3}\eta_j(y(u,v))(y_j(u,v)-x_j)\approx$$

$$\approx\int\limits_{-h/2}^{h/2}dU\int\limits_{-H/2}^{H/2}dV\frac{R+\xi_4U+\xi_5V+\xi_1U^2+\xi_2V^2+\xi_3UV}{\beta^3((V+\delta U/\beta^2+Q/\beta^2)^2-(\delta U+Q)^2/\beta^4+(\alpha^2U^2+2PU+r^2)/\beta^2)^{3/2}}=K_{nm}(x).$$

Следовательно, чтобы вывести квадратурную формулу для потенциала двойного слоя, необходимо вычислить интеграл $K_{nm}(x)$ в явном виде.

3.1. Вычисление интегралов по dV

Введем обозначения

$$\begin{gathered}z=V+\delta U/\beta^2+Q/\beta^2=V+c,\quad c=\delta U/\beta^2+Q/\beta^2,\\ a=-c^2+(\alpha^2U^2+2PU+r^2)/\beta^2=-(\delta U+Q)^2/\beta^4+(\alpha^2U^2+2PU+r^2)/\beta^2=\\ =\frac{1}{\beta^4}\left((\alpha^2\beta^2-\delta^2)U^2+2(P\beta^2-\delta Q)U+r^2\beta^2-Q^2\right).\end{gathered}\tag{10}$$

Как показано выше, из неравенства (9) вытекает, что что $\alpha^2>0$ и $\beta^2>0$. Кроме того, из неравенства (9) следует, что $a\not\equiv 0$, поскольку a представлено квадратичным полиномом по U, в котором коэффициент при U^2 положителен: $(\alpha^2\beta^2-\delta^2)/\beta^4>0$.

Покажем, что $a\geq 0$. Положим $\tilde{D}_j=(y_j)'_uU-(y_j)'_vc$, где c определено в (10), и рассмотрим преобразования с учетом введенных обозначений

$$\sum_{j=1}^{3}(r_j+\tilde{D}_j)^2=\sum_{j=1}^{3}(r_j^2+2r_j\tilde{D}_j+\tilde{D}_j^2)=r^2+2\sum_{j=1}^{3}r_j\tilde{D}_j+\sum_{j=1}^{3}\tilde{D}_j^2=$$

$$=r^2+2PU-2Qc+\alpha^2U^2+\beta^2c^2-2\delta Uc=$$

$$=\beta^2\left(c^2-2\frac{\delta U+Q}{\beta^2}c+\left(\frac{\delta U+Q}{\beta^2}\right)^2\right)-\frac{(\delta U+Q)^2}{\beta^2}+\alpha^2U^2+2PU+r^2=\tag{11}$$

$$= \beta^2\left(-c + \frac{\delta U + Q}{\beta^2}\right)^2 - \frac{(\delta U + Q)^2}{\beta^2} + \alpha^2 U^2 + 2PU + r^2 =$$
$$= -\frac{(\delta U + Q)^2}{\beta^2} + \alpha^2 U^2 + 2PU + r^2 = a\beta^2 \geq 0.$$

Как отмечено выше $\beta^2 > 0$, поэтому, поделив полученное соотношение на β^2, заключаем, что $a \geq 0$. Следовательно, квадратичный полином, обозначенный через a, неотрицательный.

Положим

$$b = \xi_2 c^2 - \xi_5 c - \xi_3 Uc + R + \xi_4 U + \xi_1 U^2 =$$
$$= U^2\left(\xi_2 \frac{\delta^2}{\beta^4} + \xi_1 - \xi_3 \frac{\delta}{\beta^2}\right) + U\left(2\xi_2 \frac{\delta Q}{\beta^4} + \xi_4 - \xi_3 \frac{Q}{\beta^2} - \xi_5 \frac{\delta}{\beta^2}\right) + R - \frac{\xi_5 Q}{\beta^2} + \xi_2 \frac{Q^2}{\beta^4},$$
$$z_{\pm} = \pm H/2 + c = \pm H/2 + (\delta U + Q)/\beta^2.$$

Применяя введенные обозначения, вычислим в $K_{nm}(x)$ интеграл по V, переходя к переменной z

$$\int_{-H/2}^{H/2} dV \frac{R + \xi_4 U + \xi_5 V + \xi_1 U^2 + \xi_2 V^2 + \xi_3 UV}{((V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 - (\delta U + Q)^2/\beta^4 + (\alpha^2 U^2 + 2PU + r^2)/\beta^2)^{3/2}} =$$
$$= \int_{-H/2}^{H/2} dV \frac{\xi_2 (V + c - c)^2 + (\xi_3 U + \xi_5)(V + c - c) + R + \xi_4 U + \xi_1 U^2}{\left((V + c)^2 + a\right)^{3/2}} =$$
$$= \int_{z_-}^{z_+} dz \frac{\xi_2 z^2 + (\xi_3 U + \xi_5 - 2\xi_2 c)z + b}{\left(z^2 + a\right)^{3/2}} = \left(\left(\frac{b}{a} - \xi_2\right)z - \xi_3 U - \xi_5 + 2\xi_2 c\right)\frac{1}{\sqrt{z^2 + a}}\Bigg|_{z_-}^{z_+} +$$
$$+ \xi_2 \ln\left|z + \sqrt{z^2 + a}\right|\Bigg|_{z_-}^{z_+},$$

где использованы интегралы 1.2.43.17–1.2.43.19 из [16]. Заметим, что

$$\xi_2 \int_{-h/2}^{h/2} dU \, \ln\left|z + \sqrt{z^2 + a}\right|\Bigg|_{z_-}^{z_+} = \xi_2 \beta \theta_{nm}(x),$$

где функция $\theta_{nm}(x)$ найдена в явном виде в работе [12]. Интеграл $K_{nm}(x)$ можно записать в виде

$$K_{nm}(x) = \frac{1}{\beta^3}\left(\xi_2 \beta \theta_{nm}(x) + J(H) - J(-H)\right). \tag{12}$$

Поскольку функция $\theta_{nm}(x)$ найдена в [12], задача сводится к вычислению интеграла

$$J(\pm H) = \int_{-h/2}^{h/2} dU \, \frac{(b/a - \xi_2) z_{\pm} - \xi_3 U - \xi_5 + 2\xi_2 c}{\sqrt{z_{\pm}^2 + a}} =$$
$$= \int_{-h/2}^{h/2} dU \, \frac{(b/a - \xi_2)(\pm H/2 + c) - \xi_3 U - \xi_5 + 2\xi_2 c}{\sqrt{(\pm H/2 + c)^2 + a}}.$$

Достаточно вычислить интеграл $J(H)$. Интеграл $J(-H)$ вычисляется по тем же формулам, что и интеграл $J(H)$, в которых H надо заменить на $-H$. Вычислим интеграл $J(H)$. Распишем величины, входящие в подынтегральную функцию, в виде многочленов по U:

$$a = C_2 U^2 + C_1 U + C_0, \quad C_2 = (\alpha^2 - \delta^2/\beta^2)/\beta^2, \quad C_1 = (2P - 2\delta Q/\beta^2)/\beta^2, \quad C_0 = (r^2 - Q^2/\beta^2)/\beta^2;$$
$$z_+^2 + a = B_2 U^2 + B_1 U + B_0, \quad B_2 = \alpha^2/\beta^2, \quad B_1 = (H\delta + 2P)/\beta^2, \quad B_0 = H^2/4 + (HQ + r^2)/\beta^2;$$
$$b = A_2 U^2 + A_1 U + A_0, \quad A_2 = \xi_1 - \xi_3 \delta/\beta^2 + \xi_2 \delta^2/\beta^4, \quad A_1 = \xi_4 - \xi_5 \delta/\beta^2 - \xi_3 Q/\beta^2 + 2\xi_2 \delta Q/\beta^4,$$

$$A_0 = R - \xi_5 Q/\beta^2 + \xi_2 Q^2/\beta^4;$$

$$bz_+ = (A_2U^2 + A_1U + A_0)(\delta U/\beta^2 + H/2 + Q/\beta^2) = E_3U^3 + E_2U^2 + E_1U + E_0, \quad E_3 = A_2\delta/\beta^2,$$

$$E_2 = A_2(H/2 + Q/\beta^2) + A_1\delta/\beta^2, \quad E_1 = A_1(H/2 + Q/\beta^2) + A_0\delta/\beta^2, \quad E_0 = A_0(H/2 + Q/\beta^2);$$

$$\xi_2 z_+ + \xi_3 U + \xi_5 - 2\xi_2 c = F_1U + F_0, \quad F_1 = \xi_3 - \xi_2\delta/\beta^2, \quad F_0 = \xi_5 - \xi_2 Q/\beta^2 + \xi_2 H/2.$$

Применяя введенные обозначения, запишем интеграл $J(H)$ в виде

$$J(H) = J_1 - J_2,$$

$$J_1 = \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{E_3U^3 + E_2U^2 + E_1U + E_0}{(C_2U^2 + C_1U + C_0)\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}}, \quad J_2 = \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{F_1U + F_0}{\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}}. \tag{13}$$

3.2. Вычисление интегралов по dU

Используя деление многочленов и учитывая, что $C_2 > 0$ в силу (9), приведем интеграл J_1 к виду

$$J_1 = J_{11} + J_{12}, \tag{14}$$

$$J_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{L_1U + L_0}{\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}},$$

$$J_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} dU \frac{S_1U + S_0}{(C_2U^2 + C_1U + C_0)\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}}, \tag{15}$$

где

$$L_1 = \frac{E_3}{C_2}, \quad L_0 = \frac{E_2C_2 - E_3C_1}{C_2^2}, \quad S_1 = E_1 - \frac{E_3C_0}{C_2} - \frac{C_1(E_2C_2 - E_3C_1)}{C_2^2},$$

$$S_0 = E_0 - \frac{C_0(E_2C_2 - E_3C_1)}{C_2^2}.$$

Если $B_1^2 - 4B_2B_0 = 0$ и $-B_1/(2B_2) \in [-h/2, h/2]$, то в силу [12, п. 2] точка x лежит на маленьком кусочке проходящей через $y(u_n, v_m)$ касательной плоскости, по которому ведется интегрирование в каноническом интеграле после линеаризации $y(u, v)$ вблизи $y(u_n, v_m)$. В данном случае в знаменателе канонического интеграла с такой линеаризацией возникает особенность в точке x. Однако если в числителе провести такую же линеаризацию, а нормаль приближенно заменить нормалью в точке $y(u_n, v_m)$, то числитель будет тождественно равен нулю, так как x лежит в касательной плоскости, проходящей через $y(u_n, v_m)$. С другой стороны, исходный канонический интеграл (без линеаризации) не имеет особенности, так как $x \notin \Gamma$, и может быть оценен как $O(hH)$. Поэтому если $B_1^2 - 4B_2B_0 = 0$ и $-B_1/(2B_2) \in [-h/2, h/2]$, будем считать, что $K_{nm}(x) \approx 0$. Далее предполагаем, что указанное условие не выполняется.

Поскольку $B_2 > 0$, интегралы J_{11} и J_2 находятся с помощью табличных интегралов 2.261 и 2.264 из [17]:

$$J_{11} = \frac{L_1}{B_2}\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0} + \left(L_0 - \frac{L_1B_1}{2B_2}\right)\frac{1}{\sqrt{B_2}}\ln\left|2B_2U + B_1 + 2\sqrt{B_2}\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}\right|\Bigg|_{U=-h/2}^{U=h/2}, \tag{16}$$

$$J_2 = \frac{F_1}{B_2}\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0} + \left(F_0 - \frac{F_1B_1}{2B_2}\right)\frac{1}{\sqrt{B_2}}\ln\left|2B_2U + B_1 + 2\sqrt{B_2}\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}\right|\Bigg|_{U=-h/2}^{U=h/2}. \tag{17}$$

Остается вычислить интеграл J_{12}. Способ вычисления интеграла зависит от знака дискриминанта квадратного трехчлена $C_2U^2 + C_1U + C_0$, стоящего в знаменателе подынтегральной функции.

Случай 1: $C_1^2 - 4C_2C_0 > 0$. Выше показано, что квадратичный полином, обозначенный как a – неотрицательный, следовательно, его дискриминант неположительный: $C_1^2 - 4C_2C_0 \le 0$, поэтому первый случай не реализуется.

Случай 2: $C_1^2 - 4C_2C_0 = 0$. В этом случае $C_2U^2 + C_1U + C_0 = C_2(U - U_1)^2$, где $U_1 = -C_1/(2C_2)$ – корень многочлена. Если $U_1 \in [-h/2, h/2]$, то в силу (11) точка x лежит на маленьком кусочке проходящей через $y(u_n, v_m)$ касательной плоскости, по которому ведется интегрирование в каноническом интеграле после линеаризации $y(u,v)$ вблизи $y(u_n, v_m)$. В данном случае в знаменателе канонического интеграла с такой линеаризацией возникает особенность в точке x. Однако если в числителе провести такую же линеаризацию, а нормаль приближенно заменить нормалью в точке $y(u_n, v_m)$, то числитель будет тождественно равен нулю, так как x лежит в касательной плоскости, проходящей через $y(u_n, v_m)$. С другой стороны, исходный канонический интеграл (без линеаризации) не имеет особенности, так как $x \notin \Gamma$, и может быть оценен как $O(hH)$. Поэтому если $U_1 \in [-h/2, h/2]$, будем считать, что $K_{nm}(x) \approx 0$. Пусть $U_1 \notin [-h/2, h/2]$. Применяя соотношение

$$\frac{S_1U + S_0}{(U - U_1)^2} = \frac{S_1(U - U_1) + S_0 + U_1S_1}{(U - U_1)^2} = \frac{S_1}{U - U_1} + \frac{S_0 + U_1S_1}{(U - U_1)^2},$$

получаем

$$J_{12} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{S_1 dU}{C_2(U - U_1)\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}} + \frac{S_0 + U_1S_1}{C_2} \int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{dU}{(U - U_1)^2\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}}.$$

Сделав замену $t = 1/(U - U_1)$, находим [14, ч. 1, гл. 7, § 10, п. 5]:

$$t_1 = \frac{2}{h - 2U_1}, \quad t_2 = -\frac{2}{h + 2U_1},$$

$$J_{12} = -\frac{S_1}{C_2}\int\limits_{t_2}^{t_1} \frac{\operatorname{sgn}(t)\cdot dt}{\sqrt{(U_1^2B_2 + U_1B_1 + B_0)t^2 + (2B_2U_1 + B_1)t + B_2}} -$$
$$- \frac{S_0 + U_1S_1}{C_2}\int\limits_{t_2}^{t_1} \frac{\operatorname{sgn}(t)\cdot t dt}{\sqrt{(U_1^2B_2 + U_1B_1 + B_0)t^2 + (2B_2U_1 + B_1)t + B_2}} =$$
$$= -\frac{S_1}{C_2}\operatorname{sgn}(C_1)\int\limits_{t_2}^{t_1} \frac{dt}{\sqrt{\omega_2t^2 + \omega_1t + B_2}} - \frac{S_0 + U_1S_1}{C_2}\operatorname{sgn}(C_1)\int\limits_{t_2}^{t_1} \frac{t dt}{\sqrt{\omega_2t^2 + \omega_1t + B_2}},$$

где $\omega_1 = 2B_2U_1 + B_1$, $\omega_2 = U_1^2B_2 + U_1B_1 + B_0$. Как показано выше, $a \ge 0$, поэтому и $\omega_2 \ge 0$. Если $\omega_2 > 0$, то с помощью табличных интегралов 2.261 и 2.264 из [17], получаем

$$J_{12} = \frac{-S_1\operatorname{sgn}(C_1)}{C_2\sqrt{\omega_2}}\ln\left|2\omega_2t + \omega_1 + 2\sqrt{\omega_2}\sqrt{\omega_2t^2 + \omega_1t + B_2}\right|\Big|_{t_2}^{t_1} -$$
$$- \frac{S_0 + U_1S_1}{C_2}\operatorname{sgn}(C_1)\left(\frac{1}{\omega_2}\sqrt{\omega_2t^2 + \omega_1t + B_2} -\right.$$
$$\left.- \frac{\omega_1}{2\omega_2}\frac{1}{\sqrt{\omega_2}}\ln\left|2\omega_2t + \omega_1 + 2\sqrt{\omega_2}\sqrt{\omega_2t^2 + \omega_1t + B_2}\right|\right)\Big|_{t_2}^{t_1}.$$

Если $\omega_2 = 0$, а $\omega_1 \neq 0$, то, пользуясь интегралами 1.2.18.5, 1.2.18.6 из [16], находим

$$J_{12} = -\frac{S_1}{C_2}\cdot\frac{2}{\omega_1}\operatorname{sgn}(C_1)\sqrt{\omega_1 t + B_2}\Big|_{t_2}^{t_1} - \frac{S_0 + U_1S_1}{C_2}\operatorname{sgn}(C_1)\frac{2(\omega_1 t - 2B_2)}{3\omega_1^2}\sqrt{\omega_1 t + B_2}\Big|_{t_2}^{t_1}.$$

Если $\omega_2 = 0$ и $\omega_1 = 0$, то

$$J_{12} = -\frac{S_1}{C_2}\cdot\frac{\operatorname{sgn}(C_1)}{\sqrt{B_2}}t\Big|_{t_2}^{t_1} - \frac{S_0 + U_1S_1}{C_2}\cdot\frac{\operatorname{sgn}(C_1)}{2\sqrt{B_2}}t^2\Big|_{t_2}^{t_1}.$$

Тем самым, во втором случае интеграл J_{12} вычислен явно.

Случай 3: $C_1^2 - 4C_2C_0 < 0$. В этом случае многочлен $C_2U^2 + C_1U + C_0$ неприводимый. Рассмотрим различные варианты вычисления интеграла J_{12} из (15), воспользовавшись методом, предложенным в [14, ч. 1, гл. 7, § 10, п. 5, (7.75)] или в [17, разд. 2.25].

Вариант 1. Если $B_1 = B_2C_1/C_2$, то в интеграле J_{12} достаточно сделать замену $U = t - C_1/(2C_2)$. Пусть, кроме того,

$$t_1 = \frac{h}{2} + \frac{C_1}{2C_2}, \quad t_2 = -\frac{h}{2} + \frac{C_1}{2C_2}, \quad t_2 < t_1,$$

тогда

$$J_{12} = \int_{t_2}^{t_1}\frac{[S_1t + (-S_1C_1/(2C_2) + S_0)]dt}{C_2[t^2 + C_0/C_2 - C_1^2/(4C_2^2)]\sqrt{B_2t^2 + B_0 - B_2C_1^2/(4C_2^2)}} =$$

$$= \frac{1}{C_2}\left(\frac{S_1}{2}\int_{t=t_2}^{t=t_1}\frac{dt^2}{[t^2 + \sigma_1]\sqrt{B_2t^2 + \sigma_2}} + \left(-\frac{S_1C_1}{2C_2} + S_0\right)\int_{t_2}^{t_1}\frac{dt}{[t^2 + \sigma_1]\sqrt{B_2t^2 + \sigma_2}}\right),$$

где

$$\sigma_1 = \frac{C_0}{C_2} - \frac{C_1^2}{4C_2^2} > 0, \quad \sigma_2 = B_0 - \frac{B_2C_1^2}{4C_2^2} \geq 0.$$

Вводя обозначения

$$J_{121} = \frac{S_1}{2C_2}\int_{t=t_2}^{t=t_1}\frac{dt^2}{[t^2 + \sigma_1]\sqrt{B_2t^2 + \sigma_2}}, \quad J_{122} = \frac{1}{C_2\sqrt{B_2}}\left(-\frac{S_1C_1}{2C_2} + S_0\right)\int_{t_2}^{t_1}\frac{dt}{[t^2 + \sigma_1]\sqrt{t^2 + \sigma_2/B_2}},$$

получаем

$$J_{12} = J_{121} + J_{122}. \tag{18}$$

Используя табличный интеграл 2.246 из [17], находим интеграл J_{121} в явном виде.

1. Если $\sigma_1B_2 - \sigma_2 > 0$, то

$$J_{121} = \frac{S_1}{C_2\sqrt{\sigma_1B_2 - \sigma_2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{B_2t^2 + \sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1B_2 - \sigma_2}}\right)\Bigg|_{t_2}^{t_1}.$$

2. Если $\sigma_1B_2 - \sigma_2 < 0$, то

$$J_{121} = \frac{S_1}{2C_2\sqrt{\sigma_2 - \sigma_1B_2}}\ln\left|\frac{\sqrt{B_2t^2 + \sigma_2} - \sqrt{\sigma_2 - \sigma_1B_2}}{\sqrt{B_2t^2 + \sigma_2} + \sqrt{\sigma_2 - \sigma_1B_2}}\right|\Bigg|_{t_2}^{t_1}.$$

3. Если $\sigma_1 B_2 - \sigma_2 = 0$, то

$$J_{121} = -\frac{S_1}{C_2\sqrt{B_2 t^2 + \sigma_2}}\Bigg|_{t_2}^{t_1}.$$

Используя табличные интегралы 1.2.43.17, 1.2.45.10, 1.2.45.13 и 1.2.11.10 из [16], находим интеграл J_{122} в явном виде.

1. Если $\sigma_2 > 0$ и $\sigma_2 - B_2\sigma_1 < 0$, то

$$J_{122} = \frac{1}{C_2\sqrt{B_2}}\left(-\frac{S_1C_1}{2C_2} + S_0\right)\frac{1}{\sqrt{\sigma_1(\sigma_1 - \sigma_2/B_2)}}\ln\frac{\left|t\sqrt{\sigma_1 - \sigma_2/B_2} + \sqrt{\sigma_1(t^2 + \sigma_2/B_2)}\right|}{\sqrt{t^2 + \sigma_1}}\Bigg|_{t_2}^{t_1}.$$

2. Если $\sigma_2 - B_2\sigma_1 > 0$, то

$$J_{122} = \frac{1}{C_2\sqrt{B_2}}\left(-\frac{S_1C_1}{2C_2} + S_0\right)\frac{1}{\sqrt{\sigma_1(\sigma_2/B_2 - \sigma_1)}}\operatorname{arctg}\frac{t\sqrt{\sigma_2/B_2 - \sigma_1}}{\sqrt{\sigma_1(t^2 + \sigma_2/B_2)}}\Bigg|_{t_2}^{t_1}.$$

3. Если $\sigma_1 - \sigma_2/B_2 = 0$, то

$$J_{122} = \frac{1}{C_2\sqrt{B_2}}\left(-\frac{S_1C_1}{2C_2} + S_0\right)\frac{t}{\sigma_1\sqrt{t^2 + \sigma_1}}\Bigg|_{t_2}^{t_1}.$$

4. Если $\sigma_2 = 0$ и $|B_1/(2B_2)| > h/2$, то

$$J_{122} = \frac{1}{C_2\sqrt{B_2}}\left(-\frac{S_1C_1}{2C_2} + S_0\right)\operatorname{sgn}(B_1)\frac{1}{2\sigma_1}\ln\frac{t^2}{|t^2 + \sigma_1|}\Bigg|_{t_2}^{t_1}.$$

Итак, в этом варианте интеграл J_{12} из (15) вычисляется явно по формуле (18).

Вариант 2. Пусть $B_1 \neq B_2C_1/C_2$. В [12, п. 2] показано, что квадратный трехчлен под корнем в (15) неотрицателен (этот результат вытекает также и из приведенных в п. 3.1 выкладок), поэтому его дискриминант неположителен, т.е. $B_1^2/(4B_2^2) - B_0/B_2 \le 0$. Положим $\chi_1^2 = B_0/B_2 - B_1^2/(4B_2^2) \ge 0$. Далее рассмотрим 2 варианта.

Вариант 2a: $\chi_1 > 0$. Преобразуем

$$B_2U^2 + B_1U + B_0 = B_2\left[\left(U + \frac{B_1}{2B_2}\right)^2 + \chi_1^2\right] = B_2\chi_1^2\left[\left(U + \frac{B_1}{2B_2}\right)^2/\chi_1^2 + 1\right] = B_2\chi_1^2\left(\operatorname{sh}^2 t + 1\right),$$

где сделана гиперболическая замена

$$\operatorname{sh} t = \left(U + \frac{B_1}{2B_2}\right)/\chi_1, \quad U = \chi_1 \operatorname{sh} t - \frac{B_1}{2B_2}, \quad t = \operatorname{arcsh}\left[\left(U + \frac{B_1}{2B_2}\right)/\chi_1\right].$$

Теперь рассмотрим второй квадратный трехчлен в знаменателе (учитывая условие, принятое в случае 3) и линейную функцию в числителе:

$$C_2U^2 + C_1U + C_0 = C_2\left(\chi_1^2\operatorname{sh}^2 t - \frac{\chi_1B_1}{B_2}\operatorname{sh} t + \frac{B_1^2}{4B_2^2}\right) + C_1\chi_1\operatorname{sh} t + C_0 - \frac{B_1C_1}{2B_2} =$$

$$= C_2\chi_1^2\operatorname{sh}^2 t + \left(C_1\chi_1 - \frac{\chi_1B_1C_2}{B_2}\right)\operatorname{sh} t + \frac{B_1^2C_2}{4B_2^2} - \frac{B_1C_1}{2B_2} + C_0 = \nu_2\operatorname{sh}^2 t + \nu_1\operatorname{sh} t + \nu_0 > 0,$$

$$S_1U + S_0 = S_1\chi_1\operatorname{sh} t - \frac{B_1S_1}{2B_2} + S_0 = \epsilon_1\operatorname{sh} t + \epsilon_0,$$

где

$$\nu_2 = C_2\chi_1^2 > 0,\quad \nu_1 = C_1\chi_1 - \chi_1 B_1 C_2/B_2,\quad \nu_0 = B_1^2 C_2/(4B_2^2) - B_1 C_1/(2B_2) + C_0,$$
$$\varepsilon_1 = S_1\chi_1,\quad \varepsilon_0 = S_0 - B_1 S_1/(2B_2).$$

Поскольку $\nu_2 \operatorname{sh}^2 t + \nu_1 \operatorname{sh} t + \nu_0 > 0$, дискриминант этого квадратного трехчлена относительно $\operatorname{sh} t$ отрицательный, т.е.

$$\nu_1^2 - 4\nu_2\nu_0 < 0. \tag{19}$$

Кроме того, $\nu_1 \neq 0$ в силу условий, принятых в варианте 2 и в варианте 2а.

Учитывая, что $dU = \chi_1 \operatorname{ch} t dt$ и $\operatorname{sh}^2 t + 1 = \operatorname{ch}^2 t$, запишем

$$J_{12} = \frac{1}{\sqrt{B_2}} \int_{t_-}^{t_+} \operatorname{ch} t \cdot dt \frac{\epsilon_1 \operatorname{sh} t + \epsilon_0}{\left(\nu_2 \operatorname{sh}^2 t + \nu_1 \operatorname{sh} t + \nu_0\right) \operatorname{ch} t},\quad t_\pm = \operatorname{arcsh}\left[\left(\pm\frac{h}{2} + \frac{B_1}{2B_2}\right)/\chi_1\right].$$

Этот интеграл можно вычислить в явном виде, переходя к комплексным числам. Чтобы привести окончательную формулу для интеграла, введем обозначения

$$g_1 = -\frac{\nu_1}{2\nu_2} \neq 0,\quad g_2 = \frac{\sqrt{|\nu_1^2 - 4\nu_2\nu_0|}}{2\nu_2} > 0,\quad |G_+^2 + 1| = \sqrt{(g_1^2 - g_2^2 + 1)^2 + 4g_1^2 g_2^2},$$

$$\zeta_1 = \exp\left(\operatorname{arcsh}\left[\left(-\frac{h}{2} + \frac{B_1}{2B_2}\right)/\chi_1\right]\right),\quad \zeta_2 = \exp\left(\operatorname{arcsh}\left[\left(\frac{h}{2} + \frac{B_1}{2B_2}\right)/\chi_1\right]\right),$$

$$\cos\frac{\Psi}{2} = \operatorname{sgn}(g_1)\sqrt{\frac{|G_+^2 + 1| + g_1^2 - g_2^2 + 1}{2|G_+^2 + 1|}},\quad \sin\frac{\Psi}{2} = \sqrt{\frac{|G_+^2 + 1| - (g_1^2 - g_2^2 + 1)}{2|G_+^2 + 1|}},$$

$$\operatorname{Re}\gamma_+ = \frac{\cos(\Psi/2)}{2\sqrt{|G_+^2 + 1|}} = \operatorname{sgn}(g_1)\frac{\sqrt{|G_+^2 + 1| + g_1^2 - g_2^2 + 1}}{2\sqrt{2}|G_+^2 + 1|},$$

$$\operatorname{Im}\gamma_+ = -\frac{\sin(\Psi/2)}{2\sqrt{|G_+^2 + 1|}} = -\frac{\sqrt{|G_+^2 + 1| - (g_1^2 - g_2^2 + 1)}}{2\sqrt{2}|G_+^2 + 1|},$$

$$\Lambda_1 = \frac{\epsilon_1}{2}\operatorname{Re}\gamma_+ + \frac{\epsilon_1 g_1 + \epsilon_0}{2g_2}\operatorname{Im}\gamma_+,\quad \Lambda_2 = \frac{\epsilon_1}{2}\operatorname{Im}\gamma_+ - \frac{\epsilon_1 g_1 + \epsilon_0}{2g_2}\operatorname{Re}\gamma_+,$$

$$s_1 = -\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}(-1)^{q+l}\ln\left[\left(g_1 + (-1)^q\sqrt{|G_+^2 + 1|}\cos\frac{\Psi}{2} - \zeta_l\right)^2 + \left(g_2 + (-1)^q\sqrt{|G_+^2 + 1|}\sin\frac{\Psi}{2}\right)^2\right],$$

$$s_2 = -\sum_{q=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}(-1)^{q+l}\arccos\frac{g_1 + (-1)^q\sqrt{|G_+^2 + 1|}\cos(\Psi/2) - \zeta_l}{\sqrt{\left(g_1 + (-1)^q\sqrt{|G_+^2 + 1|}\cos\frac{\Psi}{2} - \zeta_l\right)^2 + \left(g_2 + (-1)^q\sqrt{|G_+^2 + 1|}\sin\frac{\Psi}{2}\right)^2}}.$$

Используя приведенные обозначения, интеграл J_{12} можно записать в виде

$$J_{12} = \frac{-4}{\nu_2\sqrt{B_2}} \cdot (\Lambda_1 s_1 - \Lambda_2 s_2).$$

Таким образом, в варианте 2а интеграл J_{12} вычислен явно.

Вариант 2б: $\chi_1 = 0$. В этом случае

$$B_2 U^2 + B_1 U + B_0 = B_2\left[\left(U + \frac{B_1}{2B_2}\right)^2 + \chi_1^2\right] = B_2\left(U + \frac{B_1}{2B_2}\right)^2 = B_2(U + \Omega)^2,$$

где $\Omega = B_1/(2B_2)$. Как отмечено выше, считаем, что $\Omega \notin [-h/2, h/2]$. Тогда

$$
\begin{gathered}
J_{12} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} dU \frac{S_1U + S_0}{(C_2U^2 + C_1U + C_0)\sqrt{B_2U^2 + B_1U + B_0}} = \\
= \frac{1}{\sqrt{B_2}} \int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{(S_1U + S_0)\operatorname{sgn}(U + \Omega)dU}{(C_2U^2 + C_1U + C_0)(U + \Omega)} = \frac{\operatorname{sgn}(\Omega)}{\sqrt{B_2}} \int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{(S_1U + S_0)dU}{(C_2U^2 + C_1U + C_0)(U + \Omega)} = \\
= \frac{\operatorname{sgn}(\Omega)}{\sqrt{B_2}} \left[p_1 \int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{UdU}{C_2U^2 + C_1U + C_0} + p_2 \int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{dU}{C_2U^2 + C_1U + C_0} + p_3 \int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{dU}{U + \Omega} \right],
\end{gathered}
\tag{20}
$$

где

$$
p_1 = -\frac{C_2(S_1\Omega - S_0)}{C_1\Omega - C_0 - C_2\Omega^2}, \quad p_2 = \frac{S_0}{\Omega} - \frac{C_0(S_1\Omega - S_0)}{\Omega(C_1\Omega - C_0 - C_2\Omega^2)}, \quad p_3 = \frac{S_1\Omega - S_0}{C_1\Omega - C_0 - C_2\Omega^2}.
$$

Интегралы в (20) табличные. Воспользуемся формулами 1.2.8.19 и 1.2.8.13 из [16]. Учитывая, что $C_1^2 - 4C_2C_0 < 0$, находим

$$
\begin{gathered}
J_{12} = \frac{\operatorname{sgn}(\Omega)}{\sqrt{B_2}} \Bigg(p_3 \ln|U + \Omega| + \frac{p_1}{2C_2} \ln\left|C_2U^2 + C_1U + C_0\right| - \\
- \frac{p_1C_1}{C_2\sqrt{4C_2C_0 - C_1^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2C_2U + C_1}{\sqrt{4C_2C_0 - C_1^2}}\right) + \frac{2p_2}{\sqrt{4C_2C_0 - C_1^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2C_2U + C_1}{\sqrt{4C_2C_0 - C_1^2}}\right) \Bigg)\Bigg|_{U=-h/2}^{U=h/2}.
\end{gathered}
$$

Таким образом, в варианте 2б интеграл J_{12} вычислен явно.

4. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Сформулируем основной результат этой работы в виде теоремы.

Теорема. *Пусть* Γ — *простая гладкая замкнутая поверхность класса* C^2, *ограничивающая объемно-односвязную внутреннюю область, либо простая гладкая ограниченная разомкнутая ориентированная поверхность класса* C^2, *содержащая свои предельные точки. Пусть* Γ *допускает параметризацию* (1) *со свойством* (3), *и* $\mu(y) \in C^0(\Gamma)$. *Тогда для потенциала двойного слоя* (4) *при* $x \notin \Gamma$ *и* $k \ge 0$ *имеет место квадратурная формула*

$$
\mathcal{W}_k[\mu](x) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_{nm} \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|)(ik|x - y(u_n, v_m)| - 1)K_{nm}(x),
\tag{21}
$$

где интеграл $K_{nm}(x)$ *вычислен в явном виде в п.* 3.

Формула для $K_{nm}(x)$ приводится в (12), где функция $\theta_{nm}(x)$ дается в явном виде в [12], интеграл $J(H)$ определяется в (13), J_1 находится по формуле (14), а J_2 найдено в (17). Интеграл J_{11} вычислен в (16), а интеграл J_{12} вычисляется в явном виде в п. 3.1 для различных случаев.

Если $k = 0$, то потенциал двойного слоя для уравнения Гельмгольца переходит в потенциал двойного слоя для уравнения Лапласа, соответственно, квадратурная формула (21) при $k = 0$ принимает вид квадратурной формулы для гармонического потенциала двойного слоя.

5. СТАНДАРТНАЯ КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА

Квадратурная формула (21) является альтернативой стандартной квадратурной формуле для потенциала двойного слоя вне поверхности Γ, используемой в инженерных расчетах [4, гл. 2]

$$
\begin{gathered}
\mathcal{W}_k[\mu](x) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_{nm} \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|)(ik|x - y(u_n, v_m)| - 1) \times \\
\times \frac{hH}{|x - y(u_n, v_m)|^3} \sum_{j=1}^{3} \eta_j(y(u_n, v_m))(y_j(u_n, v_m) - x_j).
\end{gathered}
\tag{22}
$$

Стандартная квадратурная формула получается из формулы (6) заменой канонического интеграла из (7) на его следующее приближенное значение:

$$\frac{hH}{|x - y(u_n, v_m)|^3} \sum_{j=1}^{3} \eta_j(y(u_n, v_m))(y_j(u_n, v_m) - x_j).$$

Пусть для простоты Γ – замкнутая поверхность. Стандартная квадратурная формула (22) стремится к бесконечности, если точка x стремится изнутри либо извне Γ к одной из точек $y(u_n, v_m) \in \Gamma$, хотя сам потенциал двойного слоя в наших предположениях ограничен на Γ и непрерывно продолжим на Γ изнутри и извне. Другими словами, если точка x стремится к точке на Γ изнутри или извне, то потенциал двойного слоя стремится к конечному пределу. Стандартная квадратурная формула не сохраняет важнейшие свойства потенциала двойного слоя, а именно, ограниченность на Γ и непрерывную продолжимость на Γ извне или изнутри. Стандартная квадратурная формула не дает равномерной аппроксимации потенциала двойного слоя как во внутренней, так и во внешней областях с границей Γ и расходится вблизи границы.

Помимо стандартной квадратурной формулы, для нахождения потенциала двойного слоя можно использовать формулу, основанную на вычислении телесных углов [19, с. 87]. Сравнение этой формулы с формулой, предложенной в настоящей работе, планируется обсудить в дальнейших исследованиях.

6. ЧИСЛЕННЫЕ ТЕСТЫ

Тестирование улучшенной (21) и стандартной (22) квадратурных формул проведено в случае, когда поверхность Γ является сферой единичного радиуса, которая задана параметрически уравнениями:

$$y_1(u,v) = \cos u \sin v, \quad y_2(u,v) = \sin u \sin v, \quad y_3(u,v) = \cos v, \tag{23}$$

причем $(u,v) \in [0,2\pi]\times[0,\pi]$. Отметим, что в данном случае $|\eta(y(u,v))| = \sin v$ и $|\eta(y(u,0))| = |\eta(y(u,\pi))| = 0$ для всех $u \in [0,2\pi]$. Иначе говоря, $|\eta(y)| = 0$ на полюсах сферы при такой параметризации, но условия теоремы выполняются.

Согласно [15, § 27.6], плотность потенциала двойного слоя на поверхности Γ можно найти по формуле

$$\mu(x)\big|_{\Gamma} = \mathcal{W}_k[\mu](x)\big|_{\Gamma^-} - \mathcal{W}_k[\mu](x)\big|_{\Gamma^+}.$$

Здесь поверхность Γ рассматривается как двусторонняя, через Γ^- обозначена сторона, которую мы видим, глядя навстречу вектору нормали $\mathbf{n}_y$, а через Γ^+ обозначена противоположная сторона. В формуле берутся предельные значения потенциала двойного слоя на разных сторонах Γ. Отметим, что направление единичной нормали $\mathbf{n}_y$ совпадает с направлением нормали η, так как вектор $\mathbf{n}_y$ получается из η в результате нормировки. Пусть теперь Γ – единичная сфера, заданная параметризацией (23), тогда формулы (2) для нормали η определяют внутреннюю нормаль на сфере, а значит, Γ^- – внутренняя сторона единичной сферы, а Γ^+ – ее внешняя сторона.

В рассматриваемых тестовых примерах для потенциала двойного слоя с заданной на единичной сфере плотностью известно явное выражение во всем пространстве, поэтому точные значения потенциала можно сравнить с приближенными, вычисленными по квадратурным формулам. Во всех тестах приближенное значение потенциала двойного слоя вычислялось по стандартной квадратурной формуле (22) и по улучшенной квадратурной формуле (21) в некоторых точках на вспомогательных сферах, имеющих центры в начале координат и радиусы, равные $1 \pm \Delta R$. Тем самым, вспомогательные сферы находятся либо внутри, либо снаружи сферы единичного радиуса, на которой задана плотность потенциала, на расстоянии ΔR от нее. Затем были рассчитаны значения абсолютных погрешностей в этих точках, и для каждой вспомогательной сферы определялись максимумы значений этих погрешностей.

Таблица 1. Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 1

ΔR	$M = N/2 = 25$	$M = N/2 = 50$	$M = N/2 = 100$
Внутренние сферы			
0.1	0.029; 0.0089	0.0079; 0.0024	0.0021; 0.00062
0.06	0.13; 0.012	0.020; 0.0038	0.0055; 0.0010
0.03	1.04; 0.034	0.13; 0.0065	0.020; 0.0019
0.01	12.1; 0.12	2.74; 0.031	0.49; 0.0061
Внешние сферы			
0.1	0.028; 0.0077	0.0077; 0.0021	0.0020; 0.00054
0.06	0.15; 0.014	0.020; 0.0035	0.0055; 0.00093
0.03	1.08; 0.042	0.14; 0.0069	0.020; 0.0018
0.01	12.1; 0.24	2.76; 0.036	0.50; 0.0063

Координаты точек, которые использовались для оценки максимальной абсолютной погрешности:

$$x_j^{ql} = Ry_j(u_q, v_l), \quad j = 1,2,3,$$
$$u_q = \frac{2\pi}{2N}q, \quad q = 0,\ldots,2N; \quad v_l = \frac{\pi}{2M}l, \quad l = 1,\ldots,2M-1, \tag{24}$$

где $y_j(u,v)$ определяется формулами (23), R – радиус вспомогательной сферы. То есть эти точки расположены над и под центрами участков разбиения единичной сферы, серединами границ между такими участками и пересечениями этих границ.

Вычисления проводились для различных значений M и N. Значения шагов определяются формулами $h = 2\pi/N$, $H = \pi/M$. Если $N/2 = M$, то $h = H \approx 0.13$; если $N/2 = M = 50$, то $h = H \approx 0.063$; если $N/2 = M = 100$, то $h = H \approx 0.031$.

В таблицах приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей. В левом столбце указано отличие радиуса вспомогательной сферы от единицы: для внутренних сфер радиус равен $1 - \Delta R$, для внешних $1 + \Delta R$. В верхней строке указаны значения M, N. Первое число в ячейках таблицы – максимальная погрешность для стандартной квадратурной формулы на данной вспомогательной сфере, а число после точки с запятой – максимальная погрешность на данной сфере для улучшенной формулы.

Тест 1. В данном тесте использовалась плотность потенциала $\mu(y(u,v)) = k$, тогда потенциал двойного слоя для уравнения Гельмгольца имеет вид

$$\mathcal{W}_k[\mu](x) = \begin{cases} (1 - ik)\exp(ik)\dfrac{\sin(k|x|)}{|x|} & \text{при} \quad |x| < 1, \\ (\sin k - k\cos k)\dfrac{\exp(ik|x|)}{|x|} & \text{при} \quad |x| > 1, \end{cases}$$

где $k = 1$. В табл. 1 приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей.

Тест 2. В данном тесте использовалась плотность потенциала $\mu(y(u,v)) = k^3\cos v$. При этом потенциал двойного слоя имеет вид

$$\mathcal{W}_k[\mu](x) = \begin{cases} (k^2 + 2(ik-1))\exp(ik)\dfrac{k|x|\cos(k|x|) - \sin(k|x|)}{|x|^2}\cos\vartheta & \text{при} \quad |x| < 1, \\ (2k\cos k + (k^2 - 2)\sin k)\dfrac{(ik|x| - 1)\exp(ik|x|)}{|x|^2}\cos\vartheta & \text{при} \quad |x| > 1, \end{cases}$$

где ϑ – зенитный угол в сферических координатах с центром в начале координат, $k = 1$. В табл. 2 приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей.

Таблица 2. Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 2

ΔR	$M = N/2 = 25$	$M = N/2 = 50$	$M = N/2 = 100$
	Внутренние сферы		
0.1	0.029; 0.0091	0.0079; 0.0025	0.0020; 0.00064
0.06	0.082; 0.012	0.020; 0.0039	0.0055; 0.0010
0.03	0.48; 0.025	0.082; 0.0062	0.020; 0.0019
0.01	5.97; 0.079	1.31; 0.019	0.22; 0.0045
	Внешние сферы		
0.1	0.028; 0.0074	0.0078; 0.0020	0.0020; 0.00052
0.06	0.083; 0.011	0.020; 0.0034	0.0055; 0.00091
0.03	0.50; 0.024	0.082; 0.0058	0.020; 0.0018
0.01	5.99; 0.10	1.32; 0.020	0.22; 0.0044

Таблица 3. Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 3

ΔR	$M = N/2 = 25$	$M = N/2 = 50$	$M = N/2 = 100$
	Внутренние сферы		
0.1	0.012; 0.0072	5.7E–5; 0.0018	1.5E–6; 4.5E–4
0.06	0.13; 0.013	0.0046; 0.0029	8.8E–6; 7.1E–4
0.03	1.04; 0.035	0.13; 0.0068	0.0050; 0.0014
0.01	12.08; 0.12	2.74; 0.032	0.49; 0.0062
	Внешние сферы		
0.1	0.019; 0.0062	0.00014; 0.0014	1.8E–6; 3.6E–4
0.06	0.15; 0.013	0.0062; 0.0026	1.7E–5; 6.3E–4
0.03	1.07; 0.041	0.14; 0.0068	0.0058; 0.0013
0.01	12.1; 0.24	2.76; 0.036	0.50; 0.0063

Тест 3. В данном тесте использовалась плотность потенциала $\mu(y(u,v)) = k^3 \sin v \cos u$. При этом потенциал двойного слоя имеет вид

$$\mathcal{W}_k[\mu](x) = \begin{cases} (k^2 + 2(ik-1))\exp(ik)\dfrac{k|x|\cos(k|x|) - \sin(k|x|)}{|x|^2}\sin\vartheta\cos\varphi & \text{при} \quad |x| < 1, \\ (2k\cos k + (k^2-2)\sin k)\dfrac{(ik|x|-1)\exp(ik|x|)}{|x|^2}\sin\vartheta\cos\varphi & \text{при} \quad |x| > 1, \end{cases}$$

где ϑ и φ — зенитный и азимутальный углы в сферических координатах с центром в начале координат, $k = 1$. В табл. 3 приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей.

7. ВЫВОДЫ

Как указано выше, первое число в ячейках таблиц — погрешность стандартной квадратурной формулы, а второе число — погрешность улучшенной квадратурной формулы. Из таблиц видно, что улучшенная квадратурная формула обеспечивает более высокую точность вычислений вблизи границы Γ, чем стандартная. Кроме того, стандартная формула быстро расходится при приближении к границе. Тесты показывают, что улучшенная формула дает хорошую точность вычислений для всех точек, расположенных на расстоянии H и более от границы Γ. В этом случае улучшенная квадратурная формула имеет второй порядок сходимости и обеспечивает максимальную погрешность вычислений порядка $O(hH)$. На расстояниях порядка hH до границы улучшенная формула дает погрешность $O(H)$, а стандартная формула расходится.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985.
2. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО Янус, 1995.
3. *Сетуха А.В.* Численные методы в интегральных уравнениях и их приложения. М.: Аргамак-медиа, 2016.
4. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.
5. *Krutitskii P.A., Kwak D.Y., Hyon Y.K.* Numerical treatment of a skew-derivative problem for the Laplace equation in the exterior of an open arc // J. of Engng. Math. 2007. V. 59. P. 25–60.
6. *Крутицкий П.А., Колыбасова В.В.* Численный метод решения интегральных уравнений в задаче с наклонной производной для уравнения Лапласа вне разомкнутых кривых // Дифференц. ур-ния. 2016. Т. 52. № 9. С. 1262–1276.
7. *Krutitskii P.A.* Wave propagation in a 2-D external domain with cuts // Applicable Analysis. 1996. V. 62. № 3–4. P. 297– 309.
8. *Krutitskii P.A.* The Neumann problem for the 2-D Helmholtz equation in a multiply connected domain with cuts // Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen. 1997. V. 16. № 2. P. 349–361.
9. *Krutitskii P.A.* Mixed problem for the Helmholtz outside cuts in a plane // Different. Equations. 1996. V. 36. № 9. P. 1204–1212.
10. *Krutitskii P.A.* The Dirichlet problem for the 2-D Helmholtz equation in a multiply connected domain with cuts // ZAMM. 1997. V. 77. № 12. P. 883–890.
11. *Krutitskii P.A.* The Helmholtz equation in the exterior of slits in a plane with different impedance boundary conditions on opposite sides of the slits // Quarterly of Applied Math. 2009. V. 67. № 1. P. 73–92.
12. *Крутицкий П.А., Федотова А.Д., Колыбасова В.В.* Квадратурная формула для потенциала простого слоя // Дифференц. ур-ния. 2019. Т. 55. № 9. С. 1269–1284.
13. *Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А.* Математический анализ в вопросах и задачах. М.: Физматлит, 2000.
14. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Ч. 2. М.: Физматлит, 1973.
15. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 1981.
16. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М.: Физматлит, 1981.
17. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963.
18. *Цыпкин А.Г., Цыпкин Г.Г.* Математические формулы. М.: Физматлит, 1985.
19. *Гутников В.А., Лифанов И.К., Сетуха А.В.* О моделировании аэродинамики зданий и сооружений методом замкнутых вихревых рамок // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа. 2006. Т. 2006. № 4. С. 78–93.