ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 3, с. 442–450

УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 519.633.2

МОНОТОННАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА[1)]

Г. И. Шишкин[1,*], Л. П. Шишкина[1]

[1] 620108 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, ИММ УрО РАН, Россия

*e-mail: shishkin@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 08.07.2021 г.
Переработанный вариант 08.07.2021 г.
Принята к публикации 17.11.2021 г.

Для задачи Коши для гиперболического уравнения разрабатывается мультипликативный подход: строится монотонная декомпозиция рассматриваемой задачи, в силу возможности представить гиперболический оператор в виде произведения операторов переноса. Задача для гиперболического уравнения приводится к системе задач для уравнений переноса: переноса по направлению оси x и переноса по направлению, противоположному оси x. Устанавливаются условия, обеспечивающие монотонность каждой из задач для уравнений переноса и всей мультипликативной задачи. Такая декомпозиция задачи Коши на основе задач переноса, решаемых последовательно, существенно упрощает решение гиперболического уравнения, причем задачи для уравнений переноса являются монотонными, обеспечивая монотонность декомпозиции задачи Коши для гиперболического уравнения. Библ. 11.

Ключевые слова: задача Коши, гиперболическое уравнение, монотонная декомпозиция задачи, монотонность задачи, уравнение переноса.

DOI: 10.31857/S0044466922030139

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование многих физических процессов приводит к задаче Коши для гиперболического уравнения (см., например, книгу А.Н. Тихонова и А.А. Самарского [1]). В [1] показано, что явное решение такой задачи Коши имеет достаточно сложную структуру, а потому разработано достаточно много численных методов для ее решения. В стандартном подходе к построению разностной схемы для аппроксимации второй производной $(\partial^2/\partial t^2)u(x,t)$ используется трехточечный шаблон, что приводит к нарушению монотонности сеточной задачи. По этой причине строящиеся разностные схемы не обладают свойством монотонности и не сходятся в равномерной норме. Следует заметить, что исходная дифференциальная задача Коши является монотонной (см. разд. 8 и [1]).

Отметим, что сходимость решений известных численных методов для гиперболических уравнений обычно рассматривается в нормах, отличных от равномерной (см., например, [2], [3] и библиографию там же), что не является принципиальным при решении регулярных задач. Однако такие нормы не являются адекватными в случае сингулярно возмущенных гиперболических уравнений (решения которых имеют особенности типа пограничных и/или внутренних слоев; см., например, [4]–[6] и библиографию там же).

Таким образом, разработка численных методов для регулярных задач (а в перспективе и для сингулярно возмущенных) в случае гиперболических уравнений, сеточные решения которых сходятся в равномерной норме, является актуальной. При построении такого нового численного метода требуется обеспечить монотонность строящихся аппроксимаций задачи Коши для гиперболического уравнения (определение монотонности см., например, в [3]). Отметим, что для сингулярно возмущенного уравнения переноса в [7], [8] разработана монотонная разностная *схема, сходящаяся в равномерной норме* равномерно относительно возмущающего параметра ε.

[1)]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00650).

Представляет интерес использование подходов из [7], [8] при разработке численного метода для решения задачи Коши для гиперболического уравнения.

В настоящей работе для задачи Коши для гиперболического уравнения разрабатывается мультипликативный подход: строится монотонная декомпозиция рассматриваемой задачи на основе уравнений переноса. Этот подход основан на возможности представить гиперболический оператор в виде произведения операторов переноса. При этом задача для гиперболического уравнения приводится к системе задач для уравнений переноса: переноса по направлению оси x и по направлению, противоположному оси x. Устанавливаются условия, обеспечивающие монотонность каждой из задач для уравнений переноса и всей мультипликативной задачи; обсуждается также монотонность задачи Коши для гиперболического уравнения. Настоящая работа – это новый принципиальный шаг к построению монотонных численных методов для решения задачи Коши для гиперболического уравнения, сходящихся в равномерной норме как для регулярных, так и сингулярно возмущенных задач.

Работа построена следующим образом. Постановка задачи Коши для гиперболического уравнения (2.2), (2.1) и цель исследования приводятся в разд. 2. В разд. 3 строится $L^{t-}L^{t+}$-декомпозиция задачи Коши для гиперболического уравнения (2.2), (2.1) с использованием уравнений переноса по направлению, противоположному оси x (задача Коши о переносе (3.2)), и по направлению оси x (задача Коши о переносе (3.3)), назовем ее мультипликативной задачей {(3.2), (3.3)}. В разд. 4 исследуются свойства решений задач Коши о переносе (3.2) и (3.3), позволяющие обеспечить монотонность мультипликативной задачи {(3.2), (3.3)}. В разд. 5, подобно построениям, приведенным в разд. 3, строится $L^{t+}L^{t-}$-декомпозиция задачи Коши для гиперболического уравнения (2.2), (2.1) – мультипликативная задача {(5.2), (5.3)}. В разд. 6 исследуются свойства решений задач Коши о переносе (5.2) и (5.3) и устанавливаются условия, обеспечивающие монотонность мультипликативной задачи {(5.2), (5.3)}. В разд. 7 для задачи Коши для гиперболического уравнения (2.2), (2.1) с использованием результатов из разд. 4 и разд. 6 строится монотонная декомпозиция задачи на основе уравнений переноса. В разд. 8 обсуждается монотонность рассматриваемой задачи Коши для гиперболического уравнения (2.2), (2.1). Выводы приводятся в разд. 9.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

На множестве G, где

$$\overline{G} = G \cup S, \tag{2.1а}$$

$$G = R \times (0,T], \quad R = \{-\infty < x < \infty\}, \quad S = R \times \{t = 0\}, \tag{2.1б}$$

рассмотрим задачу Коши для гиперболического уравнения (см., например, [1])

$$\begin{gathered} L^g u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in G, \\ u(x,t) = \varphi(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \psi(x), \quad (x,t) \in S. \end{gathered} \tag{2.2а}$$

Здесь

$$L^g = -a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (x,t) \in G, \tag{2.2б}$$

функции $f(x,t)$ и $\varphi(x)$, $\psi(x)$ предполагаются достаточно гладкими на $\overline{G}$ и R соответственно, причем

$$|f(x,t)| \le M, \quad (x,t) \in \overline{G}; \quad |\varphi(x)|, |\psi(x)| \le M, \quad x \in R. \tag{2.2в}$$

(Через M (через m) обозначаем достаточно большие (малые) положительные постоянные. В случае сеточных задач эти постоянные не зависят от шаблонов разностных схем.)

Для решения такого класса задач разработан ряд численных методов, однако сходимость решений этих методов для гиперболических уравнений обычно рассматривается в нормах, отличных от равномерной (см., например, [2], [3] и библиографию там же), что не является принципиальным при решении регулярных задач. Однако такие нормы не являются адекватными в случае сингулярно возмущенных гиперболических уравнений (решения которых имеют особенности типа пограничных и/или внутренних слоев; см., например, [4]–[6] и библиографию там же). Отметим существенную особенность, связанную с численным решением регулярных задач для гиперболических уравнений: в стандартном подходе к построению разностной схемы для аппроксимации второй производной $(\partial^2/\partial t^2)u(x,t)$ используется трехточечный шаблон, что приводит к нарушению монотонности сеточной задачи. По этой причине известные разностные схемы не обладают свойством монотонности и не сходятся в равномерной норме.

Отметим, что для сингулярно возмущенного уравнения переноса в [7], [8] разработана монотонная разностная схема, сходящаяся в равномерной норме равномерно относительно возмущающего параметра ε. Представляет интерес использование подходов из этих работ при разработке численного метода для решения задачи Коши для гиперболического уравнения, сходящегося в равномерной норме.

В настоящей работе используем представление гиперболического оператора в виде произведения операторов переноса

$$L^g = -a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(a\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(-a\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right), \quad (x,t)\in\bar{G}.$$

Здесь $\left(a\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)$ – оператор уравнения переноса по направлению оси x, а $\left(-a\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)$ – оператор уравнения переноса по направлению, противоположному оси x.

Наша цель – используя представление гиперболического оператора в виде произведения операторов переноса, обладающих свойством монотонности, построить монотонную декомпозицию задачи Коши для гиперболического уравнения (2.2), (2.1). Монотонная декомпозиция задачи Коши для гиперболического уравнения открывает перспективы к построению для ее решения сеточного метода, сходящегося в равномерной норме.

3. $L^{t-}L^{t+}$-ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ (2.2), (2.1)

С использованием уравнений переноса по направлению оси x и по направлению, противоположному оси x, строится $L^{t-}L^{t+}$-декомпозиция задачи Коши для гиперболического уравнения.

3.1. Введем функцию $u^+(x,t)$, $(x,t)\in\bar{G}$, определяемую соотношением

$$u^+(x,t) \equiv \left(a\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t), \quad (x,t)\in\bar{G}. \tag{3.1}$$

Здесь $\left(a\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)$ – оператор уравнения переноса по направлению оси x.

В силу задачи (2.2), (2.1) и соотношения (3.1) функция $u^+(x,t)$, $(x,t)\in\bar{G}$, есть решение задачи Коши *о переносе по направлению, противоположному оси* x:

$$\begin{gathered} L^{t-}u^+(x,t) \equiv \left(-a\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)u^+(x,t) = f(x,t), \quad (x,t)\in G, \\ u^+(x,0) = \varphi^+(x), \quad x\in R, \end{gathered} \tag{3.2а}$$

где

$$\varphi^+(x) = a\varphi'(x) + \psi(x), \quad x\in R. \tag{3.2б}$$

3.2. Из соотношения (3.1) следует, что функция $u(x,t)$, $(x,t)\in\bar{G}$, есть решение задачи Коши *о переносе по направлению оси* x с модифицированной правой частью:

$$\begin{gathered} L^{t+}u(x,t) \equiv \left(a\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t) = u^+(x,t), \quad (x,t)\in G, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x\in R. \end{gathered} \tag{3.3}$$

3.3. В п. 3.1 и 3.2 построена система двух задач Коши о переносе: задача (3.2) для уравнения переноса по направлению, противоположному оси x, с решением $u^+(x,t)$, $(x,t)\in\bar{G}$, а также задача (3.3) для уравнения переноса по направлению оси x с модифицированной правой частью с решением $u(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$.

Определение 1. Систему задач Коши для уравнений переноса (3.2) и (3.3) назовем $L^{t-}L^{t+}$*-декомпозицией задачи Коши* для гиперболического уравнения (2.2), (2.1). Эту задачу будем также называть *мультипликативной задачей* {(3.2), (3.3)} *для гиперболического уравнения* (2.2), (2.1).

Таким образом, для задачи Коши для гиперболического уравнения (2.2), (2.1) построена $L^{t-}L^{t+}$-декомпозиция задачи Коши, а именно, мультипликативная задача {(3.2), (3.3)}.

4. МОНОТОННОСТЬ $L^{t-}L^{t+}$-ДЕКОМПОЗИЦИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ (2.2), (2.1)

В этом разделе исследуется монотонность задач Коши (3.2) и (3.3) о переносе. Известно, что задача переноса по направлению оси x является монотонной. Следует ожидать, что и задача переноса по направлению, противоположному оси x, также является монотонной. Здесь устанавливаются условия, при выполнении которых задачи Коши (3.2) и (3.3) о переносе являются монотонными, что обеспечивает монотонность мультипликативной задачи {(3.2), (3.3)} для гиперболического уравнения (2.2), (2.1), т.е. ее $L^{t-}L^{t+}$-декомпозиции. В дополнение к стандартному условию монотонности задачи Коши для уравнения переноса — неотрицательности правой части уравнения и начального условия — здесь также требуется неотрицательность производной начальной функции.

4.1. Исследуем задачу Коши (3.2) о переносе по направлению, противоположному оси x. Задача переноса (3.2), подобно задаче из [7], [8], является *монотонной*. (Определение монотонности дифференциальных и сеточных задач см., например, в [1]–[3], [6], [9]–[11].)

Монотонность задачи переноса (3.2) означает, что, если выполняются соотношения

$$L^{t-}u^{+}(x,t) \geq 0, \quad (x,t) \in G, \tag{4.1а}$$

$$u^{+}(x,0) \geq 0, \quad x \in R, \tag{4.1б}$$

где

$$u^{+}(x,0) = \varphi^{+}(x) \equiv a\varphi'(x) + \psi(x), \quad x \in R, \tag{4.1в}$$

то для решения $u^{+}(x,t)$ выполняется оценка

$$u^{+}(x,t) \geq 0, \quad x \in \overline{G}. \tag{4.2}$$

Условиям (4.1а), (4.1б) с учетом соотношения (4.1в) отвечает следующее достаточное условие:

$$\begin{gathered} f(x,t) \geq 0, \quad (x,t) \in \overline{G}; \\ \varphi(x) \geq 0, \quad \varphi'(x) \geq 0, \quad \psi(x) \geq 0, \quad x \in R. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Из условия (4.3) следует, что задача переноса {(3.2), (4.3)} является монотонной.

Справедлива следующая

Теорема 4.1. *Пусть для задачи Коши* (3.2) *о переносе по направлению, противоположному оси* x, *выполняется условие* (4.3). *Тогда задача переноса* {(3.2), (4.3)} *является монотонной, и для ее решения* $u^{+}(x,t)$ *выполняется оценка* (4.2).

Замечание 1. В том случае, когда в условии (4.3) нарушается условие

$$\varphi'(x) \geq 0, \quad x \in R, \tag{4.4}$$

монотонность задачи переноса {(3.2), (4.3)}, вообще говоря, нарушается. Таким образом, условие (4.4) является необходимым для монотонности задачи Коши {(3.2), (4.3)} для уравнения переноса.

4.2. Исследуем задачу Коши (3.3) о переносе по направлению оси x с модифицированной правой частью. Задача переноса (3.3), подобно задаче из [7], [8], является монотонной. Это означает, что, если выполняются соотношения

$$L^{t+}u(x,t) \geq 0, \quad (x,t) \in G; \tag{4.5а}$$

$$u(x,0) \geq 0, \quad x \in R, \tag{4.5б}$$

где

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in R, \tag{4.5в}$$

то для решения $u(x,t)$, $(x,t) \in \bar{G}$, выполняется оценка

$$u(x,t) \ge 0, \quad (x,t) \in \bar{G}. \tag{4.6}$$

Условиям (4.5а), (4.5б) с учетом соотношения (4.5в) соответствует следующее достаточное условие:

$$\begin{aligned} &u^{+}(x,t) \ge 0, \quad (x,t) \in \bar{G};\\ &\varphi(x) \ge 0, \quad x \in R. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Таким образом, задача переноса {(3.3), (4.7)} является монотонной.

Теорема 4.2. *Пусть для задачи* (3.3) *о переносе по направлению оси x с модифицированной правой частью выполняются условия* (4.5а), (4.5б), (4.7). *Тогда задача переноса* {(3.3), (4.7)} *является монотонной, и для ее решения $u(x,t)$ выполняется оценка* (4.6).

4.3. С учетом результатов из п. 4.1 и 4.2 для задач переноса (3.2) и (3.3), для мультипликативной задачи {(3.2), (3.3)} справедлива следующая

Теорема 4.3. *Пусть для задач переноса* (3.2) *и* (3.3) *выполняются условия* (6.3) *и* (6.6) *соответственно. Тогда мультипликативная задача* {(3.2), (3.3)}*, т.е. и $L^{t-}L^{t+}$-декомпозиция задачи Коши для гиперболического уравнения* (2.2), (2.1)*, является монотонной.*

Замечание 2. Условие (4.4) (см. замечание 1) является необходимым как для монотонности задачи Коши {(3.2), (4.3)}, так и для монотонности мультипликативной задачи {(3.2), (3.3)}.

5. $L^{t+}L^{t-}$-ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ (2.2), (2.1)

С использованием уравнений переноса по направлению, противоположному оси x, и по направлению оси x, подобно построениям, приведенным в разд. 3, строится $L^{t+}L^{t-}$-декомпозиция задачи Коши для гиперболического уравнения (2.2), (2.1).

5.1. Введем функцию $u^{-}(x,t)$, $(x,t) \in \bar{G}$, определяемую соотношением

$$u^{-}(x,t) = L^{t-}u(x,t) \equiv \left(-a\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t), \quad (x,t) \in \bar{G}. \tag{5.1}$$

Здесь $\left(-a\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial t}\right)$ – оператор уравнения переноса по направлению, противоположному оси x.

В силу задачи (2.2), (2.1) и соотношения (5.1) функция $u^{-}(x,t)$, $(x,t) \in \bar{G}$, есть решение задачи Коши о переносе по направлению оси x:

$$\begin{gathered} L^{t+}u^{-}(x,t) \equiv \left(a\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)u^{-}(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in G,\\ u^{-}(x,0) = \varphi^{-}(x), \quad x \in R, \end{gathered} \tag{5.2а}$$

где

$$\varphi^{-}(x) = -a\varphi'(x) + \psi(x), \quad x \in R. \tag{5.2б}$$

5.2. Из соотношения (5.1) следует, что функция $u(x,t)$, $(x,t) \in \bar{G}$, есть решение задачи Коши о переносе по направлению, противоположному оси x, с модифицированной правой частью:

$$\begin{gathered} L^{t-}u(x,t) \equiv \left(-a\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t) = u^{-}(x,t), \quad (x,t) \in G,\\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in R. \end{gathered} \tag{5.3}$$

5.3. В п. 5.1 и 5.2 построена система двух задач Коши о переносе: задача (5.2) для уравнения переноса по направлению оси x с решением $u^{-}(x,t)$, $(x,t) \in \bar{G}$, а также задача (5.3) для уравнения переноса по направлению, противоположному оси x, с модифицированной правой частью, с решением $u(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$.

Определение 2. Систему задач Коши для уравнений переноса (5.2) и (5.3) назовем *$L^{t+}L^{t-}$-декомпозицией задачи Коши* для гиперболического уравнения (2.2), (2.1). Эту задачу будем также называть *мультипликативной задачей* {(5.2), (5.3)} *для гиперболического уравнения* (2.2), (2.1).

Таким образом, для задачи Коши для гиперболического уравнения (2.2), (2.1) построена $L^{t+}L^{t-}$-декомпозиция задачи Коши или мультипликативная задача {(5.2), (5.3)}.

6. МОНОТОННОСТЬ $L^{t+}L^{t-}$-ДЕКОМПОЗИЦИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ (2.2), (2.1)

В этом разделе, подобно разд. 4, исследуется монотонность задачи Коши (5.2) для уравнения переноса по направлению оси x и задачи Коши (5.3) для уравнения переноса по направлению, противоположному оси x, с модифицированной правой частью. Устанавливаются условия, при выполнении которых задачи Коши (5.2) и (5.3) о переносе являются монотонными, что обеспечивает монотонность мультипликативной задачи {(5.2), (5.3)} для гиперболического уравнения (2.2), (2.1), т.е. ее $L^{t+}L^{t-}$-декомпозиции. В дополнение к стандартному условию монотонности задачи Коши для уравнения переноса – неотрицательности правой части уравнения и начального условия – здесь также требуется неположительность производной начальной функции.

6.1. Исследуем задачу Коши (5.2) о переносе по направлению оси x. Задача переноса (5.2), подобно задаче из [7], [8], является монотонной. Монотонность задачи переноса (5.2) означает, что если выполняются соотношения

$$L^{t+}u^{-}(x,t) \geq 0, \quad (x,t) \in G; \tag{6.1а}$$

$$u^{-}(x,0) \geq 0, \quad x \in R, \tag{6.1б}$$

где

$$u^{-}(x,0) = \varphi^{-}(x) \equiv -a\varphi'(x) + \psi(x), \quad x \in R, \tag{6.1в}$$

то для решения $u^{-}(x,t)$ выполняется оценка

$$u^{-}(x,t) \geq 0, \quad x \in \overline{G}. \tag{6.2}$$

Условиям (6.1а), (6.1б) с учетом соотношения (6.1в) отвечает следующее достаточное условие:

$$\begin{gathered} f(x,t) \geq 0, \quad (x,t) \in \overline{G}; \\ \varphi(x) \geq 0, \quad \varphi'(x) \leq 0, \quad \psi(x) \geq 0, \quad x \in R. \end{gathered} \tag{6.3}$$

Из условия (6.3) следует, что задача переноса {(5.2), (6.3)} является монотонной.

Теорема 6.1. *Пусть для задачи Коши* (5.2) *о переносе по направлению оси x выполняется условие* (6.3). *Тогда задача переноса* {(5.2), (6.3)} *является монотонной, и для ее решения* $u^{-}(x,t)$ *выполняется оценка* (6.2).

6.2. Исследуем задачу Коши (5.3) о переносе в направлении, противоположном оси x, с модифицированной правой частью. Задача переноса (5.3), подобно задаче из [7], [8], является монотонной. Это означает, что если выполняются соотношения

$$L^{t-}u(x,t) \geq 0, \quad (x,t) \in G; \tag{6.4а}$$

$$u(x,0) \geq 0, \quad x \in R, \tag{6.4б}$$

где

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in R, \tag{6.4в}$$

то для решения $u(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$, выполняется оценка

$$u(x,t) \geq 0, \quad (x,t) \in \overline{G}. \tag{6.5}$$

Условиям (6.4а), (6.4б) с учетом соотношения (6.4в) соответствует следующее достаточное условие:

$$\begin{aligned} &u^{-}(x,t) \ge 0, \quad (x,t) \in \overline{G}; \\ &\varphi(x) \ge 0, \quad x \in R. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Таким образом, задача переноса {(5.3), (6.6)} является монотонной.

Теорема 6.2. *Пусть для задачи Коши* (5.3) *о переносе в направлении, противоположном оси* x, *с модифицированной правой частью выполняется условие* (6.6). *Тогда задача переноса* {(5.3), (6.6)} *является монотонной, и для ее решения* $u(x,t)$ *справедлива оценка* (6.5).

6.3. С учетом результатов из п. 6.1 и 6.2 для задач переноса (5.2) и (5.3), для мультипликативной задачи {(5.2), (5.3)} справедлива следующая

Теорема 6.3. *Пусть для задач переноса* (5.2) *и* (5.3) *выполняются условия* (6.3) *и* (6.6) *соответственно. Тогда мультипликативная задача* {(5.2), (5.3)}*, т.е. и* $L^{t+}L^{t-}$*-декомпозиция задачи Коши для гиперболического уравнения* (2.2), (2.1)*, является монотонной.*

Замечание 3. В том случае, когда функция $\varphi(x)$, $x \in R$, не является монотонной, представим ее в виде суммы двух монотонных функций

$$\varphi(x) = \hat{\varphi}(x) + \breve{\varphi}(x), \quad x \in R,$$

удовлетворяющих условиям

$$\hat{\varphi}'(x) \ge 0, \quad \breve{\varphi}'(x) \le 0, \quad x \in R,$$

и проведем построения, рассмотренные в п. 4.1 и 6.1 соответственно.

7. МОНОТОННАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Для задачи Коши для гиперболического уравнения (2.2) (2.1), с использованием результатов из разд. 4, 6 строится монотонная декомпозиция задачи на основе уравнений переноса.

7.1. Отметим, что функция $\varphi_{(2.2)}(x)$, $x \in R$, вообще говоря, не является монотонной. Представим эту функцию $\varphi(x)$ в виде суммы монотонных функций

$$\varphi(x) = \hat{\varphi}(x) + \breve{\varphi}(x), \quad x \in R, \tag{7.1}$$

где $\hat{\varphi}(x)$, $x \in R$, и $\breve{\varphi}(x)$, $x \in R$, являются монотонными функциями; $\hat{\varphi}(x)$ и $\breve{\varphi}(x)$, $x \in R$, – неубывающая и невозрастающая функции соответственно.

(Запись $G_{(i)}$ ($L_{(i)}$, $m_{(i)}$, $M_{(i)}$, $G_{h(i)}$) означает, что эти множества (операторы, постоянные, сетки) введены в формуле (i).)

Решение задачи Коши для гиперболического уравнения, где

$$\varphi(x) = \hat{\varphi}(x), \quad x \in R, \tag{7.2}$$

обозначим через $\hat{u}(x,t)$, $(x,t) \in R$.

Решение задачи Коши для гиперболического уравнения, где

$$\varphi(x) = \breve{\varphi}(x), \quad x \in R, \tag{7.3}$$

обозначим через $\breve{u}(x,t)$, $(x,t) \in R$.

7.2. Рассмотрим задачу Коши для гиперболического уравнения (2.2), (2.1) в случае условия (7.2). Мультипликативную задачу {(3.2), (3.3)} в случае условия (7.2) обозначим через {{(3.2), (3.3)}, (7.2)} и назовем *мультипликативной подзадачей*.

В соответствии с результатами разд. 4, мультипликативная подзадача {{(3.2), (3.3)}, (7.2)} является монотонной.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 7.1. *Пусть для задачи Коши для гиперболического уравнения* (2.2)*,* (2.1) *выполняется условие* (7.2). *Тогда мультипликативная подзадача* {{(3.2), (3.3)}, (7.2)} *является монотонной.*

7.3. Теперь рассмотрим задачу Коши для гиперболического уравнения (2.2), (2.1) в случае условия (7.3). Мультипликативную задачу {(5.2), (5.3)} в случае условия (7.3) обозначим через {{(5.2), (5.3)}, (7.3)} и назовем *мультипликативной подзадачей*.

В соответствии с результатами разд. 6, мультипликативная подзадача {{(5.2), (5.3)}, (7.3)} является монотонной.

Таким образом, справедлива следующая теорема, подобная теореме 7.1.

Теорема 7.2. *Пусть для задачи Коши для гиперболического уравнения* (2.2), (2.1) *выполняется условие* (7.3). *Тогда мультипликативная подзадача* {{(5.2), (5.3)}, (7.3)} *является монотонной.*

7.4. Для задачи Коши для гиперболического уравнения (2.2), (2.1) построим монотонную декомпозицию задачи с учетом структуры функции $\varphi_{(7.1)}(x)$.

В случае условия (7.2) решаем мультипликативную подзадачу {{(3.2), (3.3)}, (7.2)}; ее решение есть $\hat{u}(x,t)$. В случае условия (7.3) решаем мультипликативную подзадачу {{(5.2), (5.3)}, (7.3)}; ее решение есть $\breve{u}(x,t)$. Решение задачи Коши определим соотношением

$$u(x,t) = \hat{u}(x,t) + \breve{u}(x,t), \quad (x,t) \in \bar{G}. \tag{7.4}$$

Таким образом, решение задачи Коши для гиперболического уравнения (2.2), (2.1) – функция $u_{(7.4)}(x,t)$, является решением мультипликативных подзадач {{(3.2), (3.3)}, (7.2)} и {{(5.2), (5.3)}, (7.2)}. Эту мультипликативную задачу обозначаем через {{{(3.2), (3.3)}, (7.2)}, {{(5.2), (5.3)}, (7.3)}}.

Справедлива следующая

Теорема 7.3. *Мультипликативная задача* {{{(3.2), (3.3)}, (7.2)}, {{(5.2), (5.3)}, (7.3)}}*, решение которой определяется соотношением* (7.4)*, является монотонной.*

8. МОНОТОННОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Обсудим монотонность рассматриваемой задачи Коши (2.2), (2.1) для гиперболического уравнения. Для этого воспользуемся явным видом решения задачи Коши для гиперболического уравнения (см. книгу А.Н. Тихонова и А.А. Самарского [1]).

8.1. Решение задачи Коши для гиперболического уравнения (2.2), (2.1) имеет представление (см. [1, формула (31), с. 77])

$$\begin{gathered} u(x,t) = 2^{-1}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + 2^{-1}a^{-1}\int\limits_{-x+at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi + \\ + 2^{-1}a^{-1}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \quad (x,t) \in \bar{G}. \end{gathered} \tag{8.1}$$

При этом требуется существование производных φ'', ψ' и $\partial f/\partial x$ (см. [1]).

В [1] приводится и детально обсуждается влияние функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x,t)$ на поведение решения задачи Коши. Особенно многообразно и существенно влияние на решение задачи структуры функции $f(x,t)$.

8.2. Из явного вида (8.1) решения задачи (2.2), (2.1) следует

Лемма 8.1. *Пусть для данных задачи Коши* (2.2), (2.1) *выполняется условие*

$$\varphi(x), \psi(x) \ge 0, \quad x \in D; \quad f(x,t) \ge 0, \quad (x,t) \in \bar{G}.$$

Тогда для ее решения справедлива оценка

$$u(x,t) \ge 0, \quad (x,t) \in \bar{G}.$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 8.1. *Задача Коши для гиперболического уравнения* (2.2), (2.1) *является монотонной.*

9. ВЫВОДЫ

В статье получены следующие результаты.

9.1. Рассмотрена задача Коши для гиперболического уравнения из [1]. Для этой задачи разработан *мультипликативный подход* на основе представления гиперболического оператора в виде произведения операторов переноса по направлению оси x и переноса по направлению, противоположному оси x.

9.2. Для задачи Коши для гиперболического уравнения (2.2), (2.1) с использованием задач Коши о переносе построены мультипликативные задачи:

- {(3.2), (3.3)}, названная $L^{t-}L^{t+}$-декомпозицией, и
- {(5.2), (5.3)}, названная $L^{t+}L^{t-}$-декомпозицией.

9.3. Установлены условия, обеспечивающие монотонность каждой из задач Коши о переносе, монотонность мультипликативных задач {(3.2), (3.3)} и {(5.2), (5.3)}, а также монотонность всей задачи Коши для гиперболического уравнения (2.2), (2.1), построенной на основе декомпозиции.

9.4. Таким образом, на основе уравнений переноса построена *монотонная декомпозиция задачи Коши* для гиперболического уравнения. Такая монотонная декомпозиция задачи Коши для гиперболического уравнения открывает перспективы к построению разностных схем, сходящихся *в равномерной норме*.

9.5. В разд. 8 показана монотонность исследуемой задачи Коши для гиперболического уравнения (2.2), (2.1) (которую не удается сохранить при “стандартном подходе”). Техника на основе уравнений переноса позволяет сохранить монотонность исследуемой задачи Коши для гиперболического уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1960.
2. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
3. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.
4. *Шишкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992. 233 с.
5. *Farrell P.A., Hegarty A.F., Miller J.J.H., O’Riordan E., Shishkin G.I.* Robust computational techniques for boundary layers. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2000. 256 p.
6. *Shishkin G.I., Shishkina L.P.* Difference methods for singular perturbation problems. V. 140 of Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Boca Raton: CRC Press, 2009. 408 p.
7. *Шишкин Г.И.* Разностная схема для начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса // Ж. вычисл. матем. и мат. физ. 2017. Т. 57. № 11. С. 1824–1830.
8. *Shishkina L.P., Shishkin G.I.* Development and numerical study of robust difference schemes for a singularly perturbed transport equation // Finite Difference Methods: Theory and Applications, FDM 2018, I. Dimov, I. Farago, and L. Vulkov (eds.), Lect. Not. Comput. Sci. (Springer, Cham, 2019), p. 476–483.
9. *Калиткин Н.Н., Корякин П.В.* Численные методы. Методы математической физики. М.: Изд. центр “Академия”, 2013. 304 с.
10. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
11. *Miller J.J.H., O’Riordan E., Shishkin G.I.* Fitted numerical methods for singular perturbation problems. Error estimates in the maximum norm for linear problems in one and two dimensions. Revis. Ed. Singapore: World Sci., 2012. 176 p.