ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 3, с. 355–366

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.652

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЛАГРАНЖА И ФОРМУЛЫ НЬЮТОНА–КОТЕСА НА СЕТКЕ БАХВАЛОВА ПРИ НАЛИЧИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ[1)]

© 2022 г. А. И. Задорин[1,*], Н. А. Задорин[1]

[1] 630090 Новосибирск, пр-т Акад. Коптюга, 4, Ин-т матем. СО РАН, Россия

*e-mail: zadorin@ofim.oscsbras.ru, nik-zadorin@yandex.ru

Поступила в редакцию 12.04.2021 г.
Переработанный вариант 12.04.2021 г.
Принята к публикации 17.11.2021 г.

Исследован вопрос применения многочлена Лагранжа на сетке Бахвалова для интерполяции функции с большими градиентами в экспоненциальном пограничном слое. Проблема в том, что применение для интерполяции такой функции многочлена Лагранжа на равномерной сетке может приводить к погрешностям порядка $O(1)$, несмотря на малость шага сетки. Сетка Бахвалова широко применяется для численного решения сингулярно возмущенных задач и анализ интерполяционных формул на такой сетке представляет интерес. Получены оценки погрешности интерполяции многочленом Лагранжа с произвольно заданным числом узлов интерполяции на сетке Бахвалова. Результат применен для оценки погрешности формул Ньютона–Котеса на сетке Бахвалова. Представлены результаты численных экспериментов. Библ. 15. Табл. 6.

Ключевые слова: функция одной переменной, пограничный слой, сетка Бахвалова, интерполяционный многочлен Лагранжа, оценка погрешности.

DOI: 10.31857/S0044466922030140

1. ВВЕДЕНИЕ

На основе сингулярно возмущенных задач моделируются различные конвективно-диффузионные процессы с преобладающей конвекцией. Известно, например, из работы А.М. Ильина [1], что применение классических разностных схем на равномерной сетке для численного решения сингулярно возмущенных задач приводит к существенным погрешностям, если малый параметр соизмерим с шагом сетки. В [1] для достижения сходимости разностной схемы, равномерной по малому параметру, предложено осуществить подгонку схемы к сингулярной составляющей, задающей основной рост решения в пограничном слое. Другой подход, основанный на сгущении сетки в пограничном слое, предложен в работе Н.С. Бахвалова [2]. Позднее в работах ряда авторов на основе различных подходов строились сгущающиеся в пограничных слоях сетки, применение которых позволило обеспечить равномерную сходимость разностной схемы, например, в [3], [4]. Широкое применение получила сетка Г.И. Шишкина [5], [6].

Вопрос интерполяции функций при наличии областей больших градиентов представляет интерес. Хорошо известно, что для интерполяции функций можно применять интерполяционные многочлены Лагранжа [7]. Однако, если функция имеет большие градиенты в области пограничного слоя, то применение многочлена Лагранжа в случае равномерной сетки может приводить к погрешностям порядка $O(1)$, если малый параметр соизмерим с шагом сетки [8]. Представляет интерес вопрос применимости многочлена Лагранжа на сгущающихся в пограничных слоях сетках, применяемых при построении разностных схем.

В [9] оценена погрешность интерполяции многочленом Лагранжа произвольно заданной степени на сетке Шишкина. Для интерполяционного многочлена Лагранжа, применяемого на непересекающихся подынтервалах сетки с k узлами, получена оценка погрешности порядка $O\left((\ln(N)/N)^k\right)$, равномерная по малому параметру ε, где N – число шагов сетки.

[1)]Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 20-01-00650 и программы СО РАН 1.1.3, проект № 0314-2019-0009; работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта № 19-31-60009.

В случае сетки Бахвалова [2] такое исследование проведено в работе [10], в которой получена ε-равномерная оценка погрешности порядка $O\left(1/N^2\right)$ для формулы кусочно-линейной интерполяции.

Целью данной работы является оценка погрешности интерполяции многочленом Лагранжа с произвольно заданным числом узлов интерполяции на сетке Бахвалова. Такое исследование является новым. Погрешность интерполяции оценим на выделенном классе функций, соответствующих решению сингулярно возмущенной задачи в случае экспоненциального пограничного слоя.

Итак, предполагаем, что для функции $u(x)$ справедлива декомпозиция:

$$u(x) = p(x) + \Phi(x), \quad x \in [0, 1], \tag{1.1}$$

где для некоторой постоянной C_1

$$\left|p^{(j)}(x)\right| \le C_1, \quad \left|\Phi^{(j)}(x)\right| \le \frac{C_1}{\varepsilon^j} e^{-\alpha x/\varepsilon}, \quad 0 \le j \le k, \tag{1.2}$$

функции $p(x)$ и $\Phi(x)$ в явном виде не заданы, $\alpha > 0$, $\varepsilon \in (0, 1]$. Коэффициент α отделен от нуля, параметр k будет соответствовать числу узлов интерполяции. Согласно (1.2), регулярная составляющая $p(x)$ имеет производные, ограниченные до некоторого порядка, а производные сингулярной составляющей $\Phi(x)$ могут неограниченно расти с уменьшением ε.

В соответствии с [5], [11], для заданного k можно осуществить декомпозицию (1.1) с ограничениями (1.2) решения сингулярно возмущенной краевой задачи:

$$\varepsilon u''(x) + a_1(x)u'(x) - a_2(x)u(x) = f(x), \quad u(0) = A, \quad u(1) = B, \tag{1.3}$$

где $a_1(x) \ge \alpha > 0$, $a_2(x) \ge 0$, $\varepsilon > 0$, функции $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ – достаточно гладкие. При малых значениях ε решение задачи (1.3) имеет область больших градиентов у границы $x = 0$, чему соответствует представление (1.1).

Введем следующие обозначения. Всюду в работе под C и C_j подразумеваем положительные постоянные, не зависящие от параметра ε и числа шагов сетки N. Одной постоянной C_j будем ограничивать различные величины, если это понятно по тексту. Пусть $L_{m,k}(u, x)$ – многочлен Лагранжа для функции $u(x)$ с k узлами интерполяции $x_m, \ldots, x_{m+k-1}$ на интервале $\left[x_m, x_{m+k-1}\right]$. Пусть $K = 2(1-\varepsilon)$, $u_n^{(j)} = u^{(j)}(x_n)$, $j \ge 0$. Будем писать $f = O(g)$, если справедлива оценка $|f| \le C|g|$ и $f = O^*(g)$, если $f = O(g)$ и $g = O(f)$.

2. ЗАДАНИЕ НЕРАВНОМЕРНОЙ СЕТКИ

Зададим сетку интервала $[0, 1]$:

$$\Omega^h = \{x_n, n = 0, 1, \ldots, N, x_0 = 0, x_N = 1, h_n = x_n - x_{n-1}\}.$$

Основываясь на [2], с модификацией, приведенной в [3], [12], задаем узлы сетки $x_n = g(n/N)$, определяя функцию $g(t)$, следующим образом:

$$g(t) = -\frac{k\varepsilon}{\alpha}\ln[1 - 2(1-\varepsilon)t], \quad 0 \le t \le \frac{1}{2}, \quad \varepsilon \le e^{-1}, \tag{2.1}$$

$$g(t) = \sigma + (2t-1)(1-\sigma), \quad 1/2 \le t \le 1, \tag{2.2}$$

где параметр k соответствует числу узлов интерполяции многочлена $L_{m,k}(u, x)$, задаваемого ниже,

$$\sigma = \min\left\{\frac{1}{2}, -\frac{k\varepsilon}{\alpha}\ln\varepsilon\right\}. \tag{2.3}$$

При $\varepsilon > e^{-1}$ задаем $\sigma = 1/2$. При $\sigma = 1/2$ задаем сетку Ω^h равномерной с шагами $h_n = 1/N$.

Зададим узлы сетки при $\sigma < 1/2$. Учитывая (2.1), получаем

$$x_n = -\frac{k\varepsilon}{\alpha}\ln[1 - 2(1-\varepsilon)n/N], \quad n = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2}. \tag{2.4}$$

Такое задание узлов приведено в [12]. Из (2.4) следует

$$h_n = \frac{k\varepsilon}{\alpha}\ln\left[1 + \frac{K}{N - Kn}\right], \quad n = 1, 2, \ldots, N/2, \quad K = 2(1-\varepsilon). \tag{2.5}$$

Из (2.5) следует, что последовательность шагов $\{h_n\}$, $n = 1, 2, \ldots, N/2$ – строго возрастающая, для некоторой постоянной C_0 при всех n имеем $h_n \le C_0/N$. Согласно (2.5)

$$h_{N/2} = \frac{k\varepsilon}{\alpha}\ln\left[1 + \frac{K}{N\varepsilon}\right]. \tag{2.6}$$

При $n \ge N/2$ в соответствии с (2.2) сетка равномерна с шагами $h_n = 2(1-\sigma)/N$,

$$x_n = \sigma + (2n/N - 1)(1-\sigma), \quad N/2 \le n \le N. \tag{2.7}$$

На заданной сетке оценим погрешность интерполяционного многочлена Лагранжа $L_{m,k}(u,x)$, применяемого на непересекающихся интервалах $[x_m, x_{m+k-1}]$, $m = 0, k-1, \ldots, N-k+1$.

При обосновании предполагаем, что $\sigma < 1/2$, так как при $\sigma = 1/2$ для некоторой постоянной C имеем $\varepsilon \ge C$ и производные функции $u(x)$ являются ε-равномерно ограниченными. Тогда применимы известные оценки погрешности интерполяции, и эти оценки по порядку точности не ниже получаемых оценок в случае $\sigma < 1/2$.

3. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ МНОГОЧЛЕНОМ ЛАГРАНЖА

Если N кратно $2(k-1)$, то каждый интервал $[x_m, x_{m+k-1}]$ попадает целиком в погранслойную область $[0,\sigma]$ или будет вне ее. Последним таким интервалом в области $[0,\sigma]$ будет интервал $[x_{N/2-k+1}, x_{N/2}]$.

Рассмотрим многочлен Лагранжа

$$L_{m,k}(u,x) = \sum_{n=m}^{m+k-1} u_n G_n(x), \quad G_n(x) = \prod_{j=m, j\ne n}^{m+k-1} \frac{x - x_j}{x_n - x_j}. \tag{3.1}$$

Теорема 1. *Пусть функция $u(x)$ имеет представление* (1.1), N *кратно* $2(k-1)$ *и узлы сетки* Ω^h *соответствуют* (2.3), (2.4), (2.7). *Тогда для некоторой постоянной C на интервале $[x_m, x_{m+k-1}]$ при всех $m = 0, k-1, \ldots, N-k+1$ в зависимости от значения m справедливы следующие оценки погрешности*:

$$\left|L_{m,k}(u,x) - u(x)\right| \le \frac{C}{N^k}, \quad x \in [x_m, x_{m+k-1}], \quad m + k - 1 < \frac{N}{2}, \tag{3.2}$$

$$\left|L_{m,k}(u,x) - u(x)\right| \le \frac{C}{N^k}, \quad x \in [x_m, x_{m+k-1}], \quad m + k - 1 = \frac{N}{2}, \varepsilon \ge 1/N, \tag{3.3}$$

$$\left|L_{N/2-k+1,k}(u,x) - u(x)\right| \le \frac{C}{N^k}, \quad x \in [x_{N/2-k+1}, x_{N/2-1}], \tag{3.4}$$

$$\left|L_{N/2-k+1,k}(u,x) - u(x)\right| \le \frac{C}{N^k}\left(\ln\left(1 + \frac{1}{N\varepsilon}\right)\right)^{k-1} + \frac{C}{N^k}, \quad x \in [x_{N/2-1}, x_{N/2}], \tag{3.5}$$

$$\left|L_{m,k}(u,x) - u(x)\right| \le \frac{C}{N^k}, \quad x \in [x_m, x_{m+k-1}], \quad m \ge \frac{N}{2}. \tag{3.6}$$

Доказательство. Для многочлена $L_{m,k}(u,x)$ при всех $x \in [x_m, x_{m+k-1}]$ справедлива оценка погрешности [7]

$$\left|L_{m,k}(u,x) - u(x)\right| \le \max_{s \in [x_m, x_{m+k-1}]}\left|u^{(k)}(s)\right|\frac{\left|w_k(x)\right|}{k!}, \quad w_k(x) = \prod_{j=m}^{m+k-1}(x - x_j). \tag{3.7}$$

Учитывая, что $h_n \le C_0/N$ при всех n и оценку (1.2) для $p(x)$, из (3.7) для некоторой постоянной C получаем

$$\left|L_{m,k}(p,x) - p(x)\right| \le \frac{C}{N^k}. \tag{3.8}$$

Остается оценить погрешность интерполяции на составляющей $\Phi(x)$ из (1.1).

Применяя разложение функции $\Phi(x)$ в ряд Тейлора, получаем

$$\Phi(x) = P_k(x) + R_k(x), \tag{3.9}$$

где

$$\begin{gathered} P_k(x) = \Phi_m + (x - x_m)\Phi'_m + \frac{(x-x_m)^2}{2}\Phi''_m + \dots + \frac{(x-x_m)^{k-1}}{(k-1)!}\Phi_m^{(k-1)}, \\ R_k(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int\limits_{x_m}^{x}(x-s)^{k-1}\Phi^{(k)}(s)ds. \end{gathered} \tag{3.10}$$

В соответствии с оценкой (3.7) имеем $L_{m,k}(P_k,x) - P_k(x) = 0$, поэтому

$$L_{m,k}(\Phi,x) - \Phi(x) = L_{m,k}(R_k,x) - R_k(x). \tag{3.11}$$

Учитывая (3.1), (3.10), (3.11), получаем

$$\begin{gathered} L_{m,k}(\Phi,x) - \Phi(x) = \frac{1}{(k-1)!}\sum_{n=m}^{m+k-1}\int\limits_{x_m}^{x_n}(x_n - s)^{k-1}\Phi^{(k)}(s)dsG_n(x) - \\ - \frac{1}{(k-1)!}\int\limits_{x_m}^{x}(x-s)^{k-1}\Phi^{(k)}(s)ds. \end{gathered} \tag{3.12}$$

Оценим

$$\left|\int\limits_{x_m}^{x}(x-s)^{k-1}\Phi^{(k)}(s)ds\right|. \tag{3.13}$$

Для этого рассмотрим различные случаи для значения x.

Случай 1: $x \in [x_m, x_{m+k-1}]$, $m + k - 1 \le N/2 - k + 1$. В соответствии с (2.5) при $m + k - 1 < N/2$ справедливо соотношение $h_m = O^*(h_{m+k-1})$. Применяя (1.2), (2.5) в (3.13), для некоторой постоянной C получаем

$$\left|\int\limits_{x_m}^{x}(x-s)^{k-1}\Phi^{(k)}(s)ds\right| \le \frac{C}{\varepsilon^{k-1}}h_m^{k-1}\left(e^{-\alpha x_m/\varepsilon} - e^{-\alpha x_{m+k-1}/\varepsilon}\right). \tag{3.14}$$

Учитывая (2.4), для некоторой постоянной C_1 имеем

$$\begin{gathered} e^{-\alpha x_m/\varepsilon} - e^{-\alpha x_{m+k-1}/\varepsilon} = (1 - 2(1-\varepsilon)m/N)^k - (1 - 2(1-\varepsilon)(m+k-1)/N)^k \le \\ \le \frac{C_1}{N}(1 - 2(1-\varepsilon)m/N)^{k-1}. \end{gathered} \tag{3.15}$$

Мы учли соотношения $b^k - a^k \le kb^{k-1}(b-a)$, $0 < a < b < 1$, $k > 1$.

Учитывая (2.5) и (3.15), из (3.14) для некоторой постоянной C_2 получаем

$$\left|\int\limits_{x_m}^{x}(x-s)^{k-1}\Phi^{(k)}(s)ds\right| \le \frac{C_2}{N^k}\ln^{k-1}\left[1 + \frac{K}{N - Km}\right](N - Km)^{k-1}. \tag{3.16}$$

Из (3.16) имеем

$$\left|\int_{x_m}^{x}(x-s)^{k-1}\Phi^{(k)}(s)ds\right| \le \frac{C}{N^k}, \quad x\in[x_m,x_{m+k-1}], \quad m+k-1\le N/2-k+1. \tag{3.17}$$

Случай 2: $x\in\left[x_{N/2-k+1},x_{N/2-1}\right]$. Тогда в неравенстве (3.16) имеем $|x-s|\le Ch_m$, $N-Km>$ $>K(k-1)>0$, поэтому справедлива оценка

$$\left|\int_{x_m}^{x}(x-s)^{k-1}\Phi^{(k)}(s)ds\right| \le \frac{C_3}{N^k}, \quad x\in\left[x_{N/2-k+1},x_{N/2-1}\right]. \tag{3.18}$$

Случай 3: $m=N/2-k+1$ и $x\in\left[x_{N/2-1},x_{N/2}\right]$. Тогда $|x-s|\le Ch_{N/2}$. Учитывая (2.6), по аналогии с предыдущими случаями получаем

$$\left|\int_{x_m}^{x}(x-s)^{k-1}\Phi^{(k)}(s)ds\right| \le \frac{C}{N^k}\ln^{k-1}\left[1+\frac{K}{N\varepsilon}\right](N\varepsilon+K(k-1))^{k-1}. \tag{3.19}$$

Из (3.19) для некоторой постоянной C получаем

$$\left|\int_{x_m}^{x}(x-s)^{k-1}\Phi^{(k)}(s)ds\right| \le \frac{C}{N^k}\ln^{k-1}\left[1+\frac{K}{N\varepsilon}\right], \quad x\in\left[x_{N/2-1},x_{N/2}\right]. \tag{3.20}$$

Итак, величина (3.13) оценена в зависимости от значений m и x.

Теперь остановимся на оценке остальных слагаемых в (3.12). Оценим слагаемое в сумме из (3.12) для произвольного n, рассматривая различные случаи.

Случай 1: $x\in\left[x_m,x_{m+k-1}\right]$, $m+k-1\le N/2-k+1$. Из (2.5) следует, что при $m\le i,j\le m+k-1$ выполняется соотношение $h_i=O^*(h_j)$. Следовательно, для некоторой постоянной C_2 получаем

$$|G_n(x)| = \prod_{j=m,j\ne n}^{m+k-1}\left|\frac{x-x_j}{x_n-x_j}\right| \le C_2, \quad x\in\left[x_m,x_{m+k-1}\right]. \tag{3.21}$$

Учитывая (3.21), по аналогии с (3.17) для некоторой постоянной C_1 получаем

$$\left|\frac{1}{(k-1)!}\int_{x_m}^{x_n}(x_n-s)^{k-1}\Phi^{(k)}(s)ds\prod_{j=m,j\ne n}^{m+k-1}\frac{x-x_j}{x_n-x_j}\right| \le \frac{C_1}{N^k}. \tag{3.22}$$

Случай 2: $x\in\left[x_{N/2-k+1},x_{N/2}\right]$. Учитываем, что $h_i=O^*(h_j)$ при $N/2-k+1\le i,j<N/2$ и $h_{N/2-1}\ll h_{N/2}$ при малых значениях ε.

При $x,x_n\le x_{N/2-1}$ имеем

$$\prod_{j=m,j\ne n}^{m+k-1}|x-x_j| = O^*\left(h_{m+1}^{k-2}h_{N/2}\right), \qquad \prod_{j=m,j\ne n}^{m+k-1}|x_n-x_j| = O^*\left(h_{m+1}^{k-2}h_{N/2}\right).$$

Учитывая эти соотношения, получаем оценку (3.22).

При $x\le x_{N/2-1}$, $n=N/2$ имеем

$$\prod_{j=m,j\ne n}^{m+k-1}|x-x_j| = O^*\left(h_{m+1}^{k-1}\right), \qquad \prod_{j=m,j\ne n}^{m+k-1}|x_n-x_j| = O^*\left(h_{N/2}^{k-1}\right).$$

Учитывая неравенство $|x_n-s|\le Ch_{N/2}$, убеждаемся в справедливости оценки (3.22).

При $x\in\left[x_{N/2-1},x_{N/2}\right]$, $n<N/2$ имеем

$$|G_n(x)| = \prod_{j=m,j\ne n}^{m+k-1}\left|\frac{x-x_j}{x_n-x_j}\right| \le C\left(h_{N/2}/h_m\right)^{k-2}. \tag{3.23}$$

Используя (3.23), получаем

$$\left|\frac{1}{(k-1)!}\int_{x_m}^{x_n}(x_n-s)^{k-1}\Phi^{(k)}(s)ds\prod_{j=m,j\neq n}^{m+k-1}\frac{x-x_j}{x_n-x_j}\right|\le\frac{C_1}{N^k}\ln^{k-2}\left(1+\frac{K}{N\varepsilon}\right). \quad (3.24)$$

При $x\in[x_{N/2-1},x_{N/2}]$, $n=N/2$ получаем

$$\left|\frac{1}{(k-1)!}\int_{x_m}^{x_n}(x_n-s)^{k-1}\Phi^{(k)}(s)ds\prod_{j=m,j\neq n}^{m+k-1}\frac{x-x_j}{x_n-x_j}\right|\le\frac{C_1}{N^k}\ln^{k-1}\left(1+\frac{K}{N\varepsilon}\right). \quad (3.25)$$

Случай 3: $m\ge N/2$. С учетом (1.2) производные функции $u(x)$ на интервале $[x_m,x_{m+k-1}]$ являются ε-равномерно ограниченными, поэтому в соответствии с (3.7) и оценкой $h_n\le C/N$ справедлива оценка (3.6).

Из соотношения (3.12) и оценок (3.8), (3.17), (3.18), (3.20), (3.22), (3.24), (3.25) получаем оценки (3.2)–(3.5). Теорема доказана.

4. ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОЧЛЕНА ЛАГРАНЖА НА СЕТКЕ БАХВАЛОВА

Рассмотрим вопрос устойчивости многочлена Лагранжа $L_{m,k}(u,x)$ к возмущению $u(x)$ в узлах сетки Бахвалова. Пусть $\tilde{u}_n$ – возмущенное значение для $u_n=u(x_n)$. Тогда в соответствии с (3.1) имеем

$$\left|L_{m,k}(u,x)-L_{m,k}(\tilde{u},x)\right|\le\max_{m\le n\le m+k-1}\left|u_n-\tilde{u}_n\right|\Lambda_m, \quad (4.1)$$

где Λ_m – постоянная Лебега [7]:

$$\Lambda_m=\max_{x\in[x_m,x_{m+k-1}]}\sum_{n=m}^{m+k-1}\left|G_n(x)\right|.$$

Пусть $m+k-1<N/2$. Как показано выше, в этом случае справедлива оценка (3.21). Следовательно, $\Lambda_m\le C$, $C=kC_2$, где C_2 соответствует (3.21). Из (4.1) при $x\in[x_m,x_{m+k-1}]$ получаем оценку устойчивости

$$\left|L_{m,k}(u,x)-L_{m,k}(\tilde{u},x)\right|\le C\max_{m\le n\le m+k-1}\left|u_n-\tilde{u}_n\right|. \quad (4.2)$$

Пусть $m+k-1=N/2$. Как показано выше, оценка величины $G_n(x)$ неравномерна по параметру ε только в случае $x\in[x_{N/2-1},x_{N/2}]$, $n<N/2$. В этом случае справедлива оценка (3.23). Из (3.23) следует

$$\left|G_n(x)\right|\le C\ln^{k-2}\left(1+\frac{1}{N\varepsilon}\right). \quad (4.3)$$

Учитывая (4.1), (4.3), при $x\in[x_{N/2-k+1},x_{N/2}]$ для некоторой постоянной C_1 получаем

$$\left|L_{m,k}(u,x)-L_{m,k}(\tilde{u},x)\right|\le C_1\max_{m\le n\le m+k-1}\left|u_n-\tilde{u}_n\right|\ln^{k-2}\left(1+\frac{1}{N\varepsilon}\right). \quad (4.4)$$

При $m\ge N/2$ на интервале $[x_m,x_{m+k-1}]$ сетка равномерна, поэтому справедлива оценка устойчивости (4.2).

Итак, получены оценки устойчивости (4.2), (4.4). Оценка (4.4) для интервала интерполяции $[x_{N/2-k+1},x_{N/2}]$ имеет слабую логарифмическую зависимость от параметра ε и соответствует оценке (3.5) для погрешности интерполяции многочленом Лагранжа на этом интервале.

5. ФОРМУЛЫ НЬЮТОНА–КОТЕСА НА СЕТКЕ БАХВАЛОВА

Вопрос численного интегрирования функций с большими градиентами представляет интерес. В [13] показано, что в случае равномерной сетки применение составных формул Ньютона–Котеса с двумя или тремя узлами в базовой формуле при интегрировании функций вида (1.1) может приводить к погрешностям порядка $O(h)$, где h – шаг сетки. Например, погрешность составной формулы Симпсона повышается с порядка $O\left(h^4\right)$ до $O(h)$ с уменьшением параметра ε. Таким образом, актуальна задача построения квадратурных формул для функций с особенностью, соответствующей наличию больших градиентов в области пограничного слоя.

В [13] построены квадратурные формулы с двумя и тремя узлами, точные на погранслойной составляющей интегрируемой функции. В [14] обоснована аналогичная формула с четырьмя узлами. В [15] исследована квадратурная формула, точная на погранслойной составляющей, в общем случае, когда базовая квадратурная формула содержит k узлов. Получена оценка погрешности порядка $O\left(h^{k-1}\right)$, равномерная по погранслойной составляющей.

Остановимся на вопросе применения формул Ньютона–Котеса на сетках, сгущающихся в пограничном слое. Итак, пусть

$$I(u) = \int_0^1 u(x)dx, \tag{5.1}$$

и для функции $u(x)$ справедлива декомпозиция (1.1). Предполагаем, что N кратно $2(k-1)$ и зададим

$$I_{m,k}(u) = \int_{x_m}^{x_{m+k-1}} u(x)dx \tag{5.2}$$

для $m = 0, k-1, \ldots, N-k+1$. Для вычисления интеграла (5.2) строим формулу Ньютона–Котеса с k узлами, используя многочлен Лагранжа (3.1):

$$S_{m,k}(u) = \int_{x_m}^{x_{m+k-1}} L_{m,k}(u,x)dx. \tag{5.3}$$

На основе (5.3) зададим составную квадратурную формулу:

$$S_k(u) = \sum_{m=0,k-1}^{N-k+1} S_{m,k}(u). \tag{5.4}$$

Сначала остановимся на сетке Шишкина [5], задаваемой на основе соотношений:

$$\sigma = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{k\varepsilon}{\alpha}\ln N\right\}, \quad h_n = \frac{2\sigma}{N}, \quad n \le \frac{N}{2}; \quad h_n = \frac{2(1-\sigma)}{N}, \quad n > \frac{N}{2}, \tag{5.5}$$

где параметр k соответствует числу узлов интерполяции многочлена $L_{m,k}(u,x)$.

В [9] для функций, имеющих декомпозицию (1.1) с ограничениями (1.2), оценена погрешность формулы (5.4) на сетке (5.5). Получены оценки погрешности:

$$\begin{aligned} &|I(u) - S_k(u)| \le \frac{C}{N^k}\left[1 + \varepsilon \ln^{k+1} N\right] \quad \text{при} \quad \varepsilon < \frac{\alpha}{2k\ln N}, \\ &|I(u) - S_k(u)| \le \frac{C}{N^k}\min\left\{\frac{1}{\varepsilon^k}, \ln^k N\right\} \quad \text{при} \quad \varepsilon \ge \frac{\alpha}{2k\ln N}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

В соответствии с (5.6) погрешность составной квадратурной формулы на сетке Шишкина порядка $O\left(N^{-k}\right)$ при $\varepsilon = O(1)$ и при достаточно малых ε. Если не делать ограничений на параметр ε, то оценка погрешности порядка $O\left((\ln(N)/N)^k\right)$.

Применим полученные в теореме 1 оценки для оценивания погрешности формул Ньютона–Котеса на сетке Бахвалова.

Теорема 2. *Пусть функция* $u(x)$ *имеет представление* (1.1), N *кратно* $2(k-1)$ *и узлы сетки* Ω^h *соответствуют* (2.3), (2.4), (2.7). *Тогда для некоторой постоянной* C *справедлива оценка погрешности*:

$$\left|\int_0^1 u(x)dx - S_k(u)\right| \le \frac{C}{N^k}. \tag{5.7}$$

Доказательство. Сначала оценим погрешность формулы $S_{m,k}(u)$. Из (5.2), (5.3) имеем

$$\left|I_{m,k}(u) - S_{m,k}(u)\right| \le (x_{m+k-1} - x_m) \max_{x\in[x_m, x_{m+k-1}]} \left|u(x) - L_{m,k}(u,x)\right|. \tag{5.8}$$

В соответствии с теоремой 1 верно

$$\left|u(x) - L_{m,k}(u,x)\right| \le \frac{C}{N^k}, \quad m + k - 1 < \frac{N}{2}.$$

Тогда из (5.8) получаем

$$\left|I_{m,k}(u) - S_{m,k}(u)\right| \le \frac{C}{N^{k+1}}, \quad m + k - 1 < \frac{N}{2}. \tag{5.9}$$

Остановимся на случае интервала $[x_m, x_{m+k-1}]$, когда $m + k - 1 = N/2$. Тогда в силу оценки (3.5) имеем

$$\left|L_{m,k}(u,x) - u(x)\right| \le \frac{C}{N^k} \ln^{k-1}\left(1 + \frac{1}{N\varepsilon}\right) + \frac{C}{N^k}.$$

Учитывая оценки (5.8), (2.6), для некоторой постоянной C_1 получаем

$$\left|I_{m,k}(u) - S_{m,k}(u)\right| \le \frac{C_1\varepsilon}{N^k} \ln^{k}\left(1 + \frac{1}{N\varepsilon}\right) + \frac{C_1}{N^{k+1}}. \tag{5.10}$$

Учитывая, что

$$\frac{C_1\varepsilon}{N^k} \ln^{k}\left(1 + \frac{1}{N\varepsilon}\right) = \frac{C_1}{N^{k+1}}(N\varepsilon)\ln^{k}\left(1 + \frac{1}{N\varepsilon}\right),$$

из (5.10) получаем

$$\left|I_{m,k}(u) - S_{m,k}(u)\right| \le \frac{C_2}{N^{k+1}}, \quad m + k - 1 = \frac{N}{2}. \tag{5.11}$$

На интервалах $[x_m, x_{m+k-1}]$ при $m \ge N/2$ производные функции $u(x)$ ограничены равномерно по ε, поэтому выполняется оценка (5.11). Учитывая (5.4) и оценки (5.9), (5.11), получаем оценку (5.7). Теорема доказана.

Отметим, что в соответствии с оценкой (5.7) на сетке Бахвалова порядок точности составных формул Ньютона–Котеса такой же, как в регулярном случае, когда интегрируемая функция имеет равномерно ограниченные производные. В этом смысле полученная оценка (5.7) является оптимальной.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Для численных экспериментов зададим функцию

$$u(x) = \cos\frac{\pi x}{2} + e^{-x/\varepsilon}, \quad x \in [0,1], \quad \varepsilon \in (0,1]. \tag{6.1}$$

Согласно [9], в случае функции вида (1.1) и сетки Шишкина (5.5) для некоторой постоянной C при всех m имеем

$$\left|u(x) - L_{m,k}(u,x)\right| \le C\left(\frac{\ln N}{N}\right)^k, \quad x \in [x_m, x_{m+k-1}]. \tag{6.2}$$

В табл. 1–3 приведена погрешность интерполяции на интервале [0, 1] на основе многочлена Лагранжа $L_{m,3}(u,x)$:

$$\Delta_{N,\varepsilon} = \max_{m,j}\left|L_{m,3}(u,\tilde{x}_{m,j}) - u(\tilde{x}_{m,j})\right|$$

Таблица 1. Погрешность интерполяции по трем узлам на равномерной сетке

ε	N					
	16	32	64	128	256	512
1	5.13e–5	6.82e–6	8.50e–7	1.07e–7	1.34e–8	1.67e–9
32^{-1}	1.15e–1	2.89e–2	5.30e–3	8.11e–4	1.12e–4	1.48e–5
64^{-1}	3.03e–1	1.15e–1	2.89e–2	5.30e–3	8.11e–4	1.12e–4
128^{-1}	5.18e–1	3.03e–1	1.15e–1	2.89e–2	5.30e–3	8.11e–4
256^{-1}	6.79e–1	5.18e–1	3.03e–1	1.15e–1	2.89e–2	5.30e–3

Таблица 2. Погрешность интерполяции по трем узлам на сетке Шишкина

ε	N					
	16	32	64	128	256	512
1	5.13e–5	6.82e–6	8.50e–7	1.07e–7	1.34e–8	1.67e–9
	2.91	3.01	3.00	3.00	3.00	3.00
16^{-1}	2.89e–2	5.30e–3	8.11e–4	1.12e–4	1.48e–5	1.90e–6
	2.45	2.71	2.85	2.92	2.96	2.98
64^{-1}	1.23e–1	3.15e–2	5.87e–3	9.05e–4	1.26e–4	1.66e–5
	1.96	2.43	2.70	2.84	2.92	2.96
128^{-1}	1.57e–1	4.41e–2	8.70e–3	1.39e–3	1.96e–4	2.62e–5
	1.83	2.34	2.65	2.82	2.91	2.95
256^{-1}	1.91e–1	5.82e–2	1.21e–2	2.00e–3	2.88e–4	3.87e–5
	1.72	2.26	2.60	2.79	2.90	2.95

Таблица 3. Погрешность интерполяции по трем узлам на сетке Бахвалова

ε	N					
	16	32	64	128	256	512
1	5.13e–5	6.82e–6	8.50e–7	1.07e–7	1.34e–8	1.67e–9
	2.91	3.01	3.00	3.00	3.00	3.00
16^{-1}	2.89e–2	5.30e–3	8.11e–4	1.12e–4	1.48e–5	1.90e–6
	2.45	2.71	2.85	2.92	2.96	2.98
64^{-1}	7.01e–3	9.13e–4	1.17e–4	1.47e–5	1.85e–6	2.32e–7
	2.94	2.97	2.98	2.99	3.00	2.88
128^{-1}	7.17e–3	9.34e–4	1.19e–4	1.51e–5	1.90e–6	2.38e–7
	2.94	2.97	2.98	2.99	3.00	3.00
256^{-1}	7.25e–3	9.45e–4	1.21e–4	1.53e–5	1.92e–6	2.41e–7
	2.94	2.97	2.98	2.99	3.00	3.00

в случаях равномерной сетки, сеток Шишкина и Бахвалова, где $\tilde{x}_{m,j}$ – узлы сгущенной сетки, полученной из исходной сетки Ω^h делением каждого сеточного интервала $[x_{n-1}, x_n]$ на 10 равных частей. В табл. 2, 3 дополнительно приведен вычисленный порядок точности

$$M_{N,\varepsilon} = \log_2 \frac{\Delta_{N,\varepsilon}}{\Delta_{2N,\varepsilon}}.$$

В таблицах $e - m$ обозначает 10^{-m}.

Таблица 4. Погрешность интерполяции по четырем узлам на сетке Бахвалова

ε	N					
	16	32	64	128	256	512
1	4.42e–6	2.79e–7	1.75e–8	1.10e–9	6.86e–11	4.29e–12
	3.98	3.99	4.00	4.00	4.00	4.00
16^{-1}	1.27e–2	1.40e–3	1.19e–4	8.67e–6	5.86e–7	3.81e–8
	3.18	3.56	3.78	3.89	3.94	3.97
32^{-1}	5.59e–4	3.51e–5	1.88e–6	8.77e–8	4.11e–9	2.21e–10
	3.99	4.22	4.42	4.41	4.22	4.07
64^{-1}	5.39e–4	3.82e–5	2.47e–6	1.44e–7	7.81e–9	4.33e–10
	3.82	3.95	4.10	4.20	4.17	4.08
128^{-1}	4.58e–4	3.50e–5	2.49e–6	1.64e–7	1.00e–8	5.86e–10
	3.71	3.81	3.92	4.03	4.10	4.08
256^{-1}	3.57e–4	2.92e–5	2.23e–6	1.59e–7	1.06e–8	6.65e–10
	3.61	3.71	3.81	3.91	4.00	4.04
512^{-1}	2.60e–4	2.25e–5	1.84e–6	1.41e–7	1.01e–8	6.74e–10
	3.53	3.61	3.71	3.81	3.90	3.97

Таблица 5. Погрешность формулы Ньютона–Котеса с двумя узлами на сетке Бахвалова

ε	N					
	16	32	64	128	256	512
1	3.06e–4	7.64e–5	1.91e–5	4.77e–6	1.19e–6	2.98e–7
	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
16^{-1}	7.08e–4	1.55e–4	3.65e–5	8.96e–6	2.23e–6	5.56e–7
	2.19	2.09	2.03	2.01	2.00	2.00
32^{-1}	5.68e–5	1.82e–5	5.03e–6	1.61e–6	4.30e–7	1.10e–7
	1.64	1.84	1.64	1.90	1.97	1.99
64^{-1}	6.12e–4	1.66e–4	4.43e–5	1.15e–5	2.93e–6	7.35e–7
	1.88	1.91	1.94	1.98	1.99	2.00
128^{-1}	1.14e–3	2.92e–4	7.46e–5	1.90e–5	4.81e–6	1.21e–6
	1.97	1.97	1.97	1.98	1.99	2.00
256^{-1}	1.51e–3	3.79e–4	9.56e–5	2.41e–5	6.07e–6	1.52e–6
	1.99	1.99	1.99	1.99	1.99	2.00
512^{-1}	1.73e–3	4.34e–4	1.09e–4	2.73e–5	6.86e–6	1.72e–6
	2.00	2.00	1.99	1.99	2.00	2.00
1024^{-1}	1.86e–3	4.67e–4	1.17e–4	2.93e–5	7.33e–6	1.84e–6
	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00

Из табл. 1 следует неприемлемость применения равномерной сетки при $\varepsilon \le 1/N$. При $\varepsilon = h$ максимум погрешности не меняется с уменьшением $h = 1/N$.

Из сравнения результатов табл. 2 и 3 следует, что применение сетки Бахвалова приводит к более точным результатам. Это соответствует оценке погрешности порядка $O\left(1/N^3\right)$ для сетки Бахвалова и оценке (6.2) при $k = 3$ для сетки Шишкина.

В табл. 4 приведены погрешность $\Delta_{N,\varepsilon}$ и вычисленный порядок точности $M_{N,\varepsilon}$ в случае многочлена Лагранжа $L_{m,4}(u,x)$ и сетки Бахвалова. Результаты вычислений согласуются с оценками теоремы 1.

Таблица 6. Погрешность формулы Ньютона–Котеса с тремя узлами на сетке Бахвалова

ε	N					
	16	32	64	128	256	512
1	3.82e–7	2.39e–8	1.49e–9	9.33e–11	5.83e–12	3.64e–13
	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	3.94
16^{-1}	3.10e–4	2.11e–5	1.35e–6	8.47e–8	5.30e–9	3.31e–10
	3.88	3.97	3.99	4.00	4.00	4.00
32^{-1}	7.48e–2	1.27e–2	1.40e–3	1.19e–4	8.67e–6	5.86e–7
	2.56	3.18	3.56	3.78	3.94	3.97
64^{-1}	5.36e–3	3.17e–4	1.83e–5	1.06e–6	7.00e–8	5.84e–9
	4.08	4.12	4.11	3.91	3.58	3.49
128^{-1}	5.71e–3	3.46e–4	2.05e–5	1.18e–6	6.82e–8	4.55e–9
	4.04	4.08	4.12	4.11	3.91	3.57
256^{-1}	5.90e–3	3.63e–4	2.20e–5	1.30e–6	7.49e–8	4.34e–9
	4.02	4.04	4.08	4.12	4.11	3.91
512^{-1}	5.99e–3	3.71e–4	2.28e–5	1.38e–6	8.20e–8	4.72e–9
	4.01	4.02	4.04	4.08	4.12	4.11

Остановимся на численном анализе применяемых квадратурных формул для вычисления интеграла (5.1) на примере функции (6.1).

Остановимся на случае формулы трапеций, применяемой на каждом интервале $[x_m, x_{m+1}]$. В табл. 5 приведены погрешность и вычисленный порядок точности соответствующей составной формулы трапеций $S_2(u)$ в случае сетки Бахвалова в зависимости от ε и N. Данные табл. 5 согласуются со вторым порядком точности, что соответствует оценке (5.7).

Рассмотрим формулу Ньютона–Котеса с тремя узлами на интервале $[x_m, x_{m+2}]$ неравномерной сетки:

$$S_{m,3}(u) = \frac{1}{6}\left[u_m\left(-h_{m+2}^2/h_{m+1} + 2h_{m+1} + h_{m+2}\right) + u_{m+1}\frac{(h_{m+1} + h_{m+2})^3}{h_{m+1}h_{m+2}} + \right.$$
$$\left. + u_{m+2}\left(2h_{m+2} - h_{m+1}^2/h_{m+2} + h_{m+1}\right)\right]. \tag{6.3}$$

В табл. 6 приведены погрешность и вычисленный порядок точности составной формулы $S_3(u)$, соответствующей базовой формуле (6.3), на сетке Бахвалова. При $\varepsilon = 1$ сетка является равномерной, формула (6.3) переходит в формулу Симпсона. Согласно [7] составная формула Симпсона обладает повышенным четвертым порядком точности, что подтверждается результатами вычислений. Согласование с оценкой (5.7) сохраняется, так как согласно [7] центральный узел для симметричной формулы с нечетным числом узлов можно рассматривать как сдвоенный. Из табл. 6 следует, что при уменьшении значения ε на сетке Бахвалова сохраняется порядок точности, близкий к четвертому.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На классе функций с большими градиентами в области экспоненциального пограничного слоя получены оценки погрешности интерполяции многочленом Лагранжа произвольно заданной степени на сетке Бахвалова. Полученные оценки погрешности равномерны по малому параметру всюду, кроме последнего сеточного интервала в области пограничного слоя, на котором сохранилась слабая логарифмическая зависимость от малого параметра. На основе полученных оценок погрешности для многочлена Лагранжа получены оценки погрешности формул Ньютона–Котеса на сетке Бахвалова. Эти оценки равномерны по малому параметру. Приведены результаты вычислений, согласующиеся с полученными оценками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин А.М.* Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. заметки. 1969. Т. 6. № 2. С. 237–248.
2. *Бахвалов Н.С.* К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9. № 4. С. 841–890.
3. *Linβ T.* Layer-Adapted Meshes for Reaction-Convection-Diffusion Problems. Berlin: Springer-Verlag, 2010.
4. *Vulanovic R.* A priori meshes for singularly perturbed quasilinear two-point boundary value problems // IMA J. Numer. Anal. 2001. V. 21. № 1. P. 349–366.
5. *Шишкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.
6. *Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I.* Fitted numerical methods for singular perturbation problems: error estimates in the maximum norm for linear problems in one and two dimensions. Singapore: World Scientific Publishing, 2012.
7. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.
8. *Задорин А.И.* Метод интерполяции для задачи с пограничным слоем // Сибирский ж. вычисл. матем. 2007. Т. 10. № 3. С. 267–275.
9. *Задорин А.И.* Интерполяция Лагранжа и формулы Ньютона–Котеса для функций с погранслойной составляющей на кусочно-равномерных сетках // Сибирский ж. вычисл. матем. 2015. Т. 18. № 3. С. 289–303.
10. *Блатов И.А., Задорин Н.А.* Интерполяция на сетке Бахвалова при наличии экспоненциального пограничного слоя // Уч. зап. Казанского университета. Физ.-матем. науки. 2019. Т. 161. Кн. 4. С. 497–508.
11. *Linβ T.* The Necessity of Shishkin decompositions // Appl. Math. Lett. 2001. V. 14. P. 891–896.
12. *Roos H.G.* Layer-adapted meshes: milestones in 50 years of history // Appl. Math. arXiv:1909.08273v1, 2019.
13. *Задорин А.И., Задорин Н.А.* Квадратурные формулы для функций с погранслойной составляющей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 11. С. 1952–1962.
14. *Задорин А.И., Задорин Н.А.* Аналог формулы Ньютона–Котеса с четырьмя узлами для функции с погранслойной составляющей // Сибирский ж. вычисл. матем. 2013. Т. 16. № 4. С. 313–323.
15. *Задорин А.И., Задорин Н.А.* Неполиномиальная интерполяция функций с большими градиентами и ее применение // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 2. С. 179–188.