ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 4, с. 564–579

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.642

ОБОСНОВАНИЕ КВАДРАТУРНО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА

© 2022 г. А. И. Федотов

420111 Казань, ул. Карла Маркса, 10, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева, Россия

e-mail: fedotovkazan@mail.ru

Поступила в редакцию 08.05.2021 г.
Переработанный вариант 07.09.2021 г.
Принята к публикации 16.12.2021 г.

Дано новое определение производной дробного порядка на основе интерполирования производных натурального порядка. Главным преимуществом нового определения является локальность таких производных. То есть значение производной в точке не зависит от области определения функции, как в случаях производных Римана–Лиувилля и Капуто. Это позволяет строить и обосновывать простые вычислительные методы решения уравнений, содержащих такие производные. Более того, такое определение позволяет обобщить понятие производной на случай переменного порядка дифференцирования. Рассмотрен класс уравнений, содержащих введенные производные. Доказана однозначная разрешимость исходных уравнений и обоснован квадратурно-разностный метод для их решения. Получены эффективные оценки погрешности приближенных решений. Теоретические выводы подтверждены численным решением модельной задачи. Библ. 54. Табл 1.

Ключевые слова: производные переменного порядка, квадратурно-разностный метод, интегродифференциальные уравнения.

DOI: 10.31857/S0044466922040068

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача обобщения понятия производной на случай производной дробного порядка ставилась с самого начала существования дифференциального исчисления. Так, уже в 1695 г. в письме Лопиталю Лейбниц пишет о возможном обобщении определения введенной им производной на случай дробного порядка и о множественности таких обобщений.

В 1730 г. Эйлер, обобщивший понятие факториала на случай любых действительных чисел, указал, что аналогичным способом, т.е. интерполированием, можно и производную обобщить на случай любого действительного порядка.

В 1812 г. Лаплас, используя свое преобразование, дал определение производной дробного порядка через интеграл.

В 1819 г. Лакруа определил производную дробного порядка от степенных функций. Это определение позволило обобщить понятие дробного дифференцирования на пространство функций, в которых степенные функции образуют полную систему базисных функций. Интересно отметить, что его определение совпадает для таких функций с современным определением производной Римана–Лиувилля.

Фурье в 1822 г. определили дробную производную через свое преобразование. Он впервые указал, что при таком определении порядок производной может быть любым действительным числом как положительным, так и отрицательным.

В дальнейшем производные дробного порядка вводились разными математиками, и к настоящему времени таких определений имеется уже более 20. Исчерпывающую информацию о различных определениях можно найти в монографии [1] и обзорных работах [2], [3].

Почему же при наличии такого многообразия различных определений появляются все новые и новые определения? Причина в том, что в каждом определении имеются, при наличии положительных свойств, недостатки. Именно для их преодоления и вводятся все новые и новые определения. Так, в 2014 г. в [4] определена производная, которая нашла уже много поклонников и последователей. В работе [5] предложено новое определение дробной производной, обобщающей дробную производную Капуто. В мае 2020 г. в [6] дано определение дробной производной с несингулярным ядром. Интересно, что уже в июне того же года появилась работа [7], опровергающая корректность определения дробной производной с несингулярными ядрами. А в [8] изложена даже целая программа построения дробного анализа на основе модификаций оператора дробного дифференцирования Адамара [9]. Известен ряд обобщений определений дробных операторов на случай переменного порядка. Например, в [10]–[12] рассматриваются операторы, у которых порядок дифференцирования является детерминированной функцией времени, а в [13] исследовался случай, когда порядок дифференцирования является случайной величиной. При этом в [10] предложен алгоритм численного расчета и схемотехническая реализация введенного оператора. Следует упомянуть также и работы по дискретному дробному исчислению, введенному в середине XX в. (см. [14]–[16]), и ставшему особенно актуальным в последнее время в связи с разработкой численных методов решения уравнений с дробными операторами. В [17]–[24] даны обобщение и развитие полученных ранее результатов, выведены формулы для дискретного преобразования Лапласа и постоен метод решения разностных дробных уравнений на его основе. В [25] предложена процедура дискретизации значений дробной производной Римана–Лиувилля на основе разложения в ряды по полиномам Чебышёва.

Чтобы как-то систематизировать все обилие результатов по дробному дифференцированию, можно условно разделить публикации, посвященные изучению дифференциальных уравнений дробного порядка, на три группы:

а) работы, посвященные изучению математических проблем (существование и единственность решений, зависимость решений от начальных и граничных условий, анализ устойчивости решений, наличия особых точек, форма и смысл начальных и граничных условий, вид и метод построения общего решения для основных типов уравнений и др.);

б) работы по точным методам решения конкретных типов и разновидностей уравнений;

в) работы по разработке, обоснованию и реализации приближенных методов решения уравнений.

Значительный объем материала по математическим вопросам дробных дифференциальных уравнений собран в монографиях [1], [26]–[35]. В частности, в них приводятся теоремы существования и единственности решения начальных и краевых задач для, главным образом, линейных дробных дифференциальных уравнений, содержащих дробные производные в смысле Римана–Лиувилля, Капуто, Грюнвальда–Летникова, и обсуждаются основные методы решения дробных дифференциальных уравнений такие как сведение к интегральному уравнению, метод интегральных преобразований Лапласа, Меллина, Фурье, метод функций Грина и т.д. В обзорной работе [36] обсуждаются введенная Кочубеем [37], [38], [39] дробная производная и вопросы теории, возникающие при ее использовании в дробных дифференциальных уравнениях. В справочнике [40] для решения обыкновенных дробных дифференциальных уравнений, помимо преобразования Лапласа, применяется их сведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям целого порядка. Интересным приложением дробных дифференциальных уравнений является построение с их помощью точных решений дифференциальных уравнений целого порядка [1], [30]. Все эти работы позволяют утверждать, что в настоящее время как теория дробных дифференциальных уравнений, так и теория методов их точного решения, хотя и не являются законченными, но представляют собой весьма обширную и хорошо проработанную область исследований. Однако в последнее время все большее значение – это заметно и по количеству появляющихся работ – приобретают работы по разработке, обоснованию и реализации приближенных методов решения дробных дифференциальных уравнений, т.е. работ из группы в).

Число публикаций по последней группе работ растет очень быстрыми темпами, поэтому в данной работе приведем – кроме упомянутых выше – лишь работы, вышедшие в самое последнее время.

В работе [41] обоснован полиномиальный метод решения задачи Коши для уравнения с производными Римана–Лиувилля. Доказаны корректность задачи по Адамару, сходимость метода, получены эффективные оценки погрешности. Описание алгоритма и пример численной реализации метода отсутствуют. В работах [42] и [43] описаны разностые методы решения третьей краевой задачи для нагруженного уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто. Получены априорные оценки погрешности приближенного решения в условиях разрешимости исходной задачи. Приведено подробное описание алгоритма решения, но отсутствует его численная реализация. Численный метод решения уравнения с дробной производной по времени в смысле Капуто-Фабрицио обоснован в [44]. Теоретические исследования подтверждены численными расчетами. В [45] теоретически обоснован приближенный метод решения дробного дифференциального уравнения с обобщенной производной Капуто. В доказательстве используется теория устойчивости по Уламу. Численные примеры отсутствуют.

Такое обилие определений дробной призводной с одной стороны и необходимость дробных производных для прикладных исследований приводят к необходимости очертить рамки допустимости определений, т.е. ввести критерии их корректности. Такие критерии были сформулированы в работе [2] и позже повторены в современной формулировке в работе [46]. Основными критериями являются следующие:

а) если функция аналитическая, то ее производная тоже должна быть аналитической;

б) оператор дробного дифференцирования должен быть линейным;

в) при натуральных значениях порядка дифференцирования оператор должен совпадать с обычным оператором дифференцирования.

Последнее требование означает, что, как указал Эйлер [2], возникает ситуация, похожая на задачу интерполирования. Имеется система операторов целочисленного дифференцирования, требуется связать эти “точки” оператором, допускающим дифференцирование любого действительного порядка. И так же как в случае интерполирования, когда имеется сколь угодно много кривых, соединяющих заданные точки, имеется бесконечно много способов определить оператор дробного дифференцирования, совпадающий при целых значениях порядка дифференцирования с обычным оператором дифференцирования. Все такие операторы должны считаться корректно определенными. При этом важно понимать, что операторы целочисленного дифференцирования являются частными случаями операторов дробного дифференцирования, и поэтому обладают свойствами, которыми операторы дробного дифференцирования могут и не обладать. И вопрос тогда уже не столько в корректности определения оператора дробного дифференцирования, а в выборе такого оператора, который бы наилучшим образом подходил для решения конкретной задачи.

В данной работе предлагается еще одно определение оператора дробного дифференцирования функций, заданных на отрезке, позволяющее, в частности, сделать порядок производной переменным. Это определение удовлетворяет всем критериям корректности определения дробной производной. Кроме того, определенная таким образом производная является, в отличие от большинства предшествующих определений, локальной, что делает ее удобной при использовании в прикладных задачах. Приближенный метод, предлагаемый в статье, обоснован с помощью методики Вайникко [47], [48]. Приведен численный пример, подтверждающий теоретические результаты.

2. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Будем, как обычно, обозначать через $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0$ — множество натуральных чисел, дополненных нулем, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, а $\mathbb{R}_+$ — множество неотрицательных действительных чисел.

Следующие обозначения и определения взяты из монографии [47].

Пусть X, X_n, $n \in \mathbb{N}$, и Y, Y_n, $n \in \mathbb{N}$, две пары банаховых пространств, а $\mathcal{L}(X, Y)$ — множество линейных непрерывных операторов, действующих из X в Y.

Определение 1. Систему $\mathcal{P} = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ линейных ограниченных операторов $p_n : X \to X_n$ будем называть *связывающей* для X и X_n, $n \in \mathbb{N}$, если для любого $x \in X$ имеем

$$\|p_n x\|_{X_n} \to \|x\|_X, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Определение 2. Последовательность $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов $\mathbf{x}_n \in X_n$ $\mathcal{P}$-сходится к $x \in X$, если

$$\|\mathbf{x}_n - p_n x\|_{X_n} \to 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Определение 3. Последовательность $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов $\mathbf{x}_n \in X_n$ $\mathcal{P}$-компактна, если любая ее подпоследовательность $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}'\subseteq\mathbb{N}}$ содержит $\mathcal{P}$-сходящуюся подпоследовательность $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}''\subseteq\mathbb{N}'}$.

Определение 4. Последовательность операторов $T_n : X_n \to Y_n$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{PQ}$-сходится к оператору $T : X \to Y$, если для любой $\mathcal{P}$-сходящейся к $x \in X$ последовательности $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ последовательность $(T_n\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{Q}$-сходится к Tx.

Определение 5. Последовательность операторов $T_n \in \mathcal{L}(X_n, Y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, компактно $\mathcal{PQ}$-сходится к вполне непрерывному оператору $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, если T_n $\mathcal{PQ}$-сходится к оператору T и выполнено следующее условие компактности:

$$\mathbf{x}_n \in X_n, \quad \|\mathbf{x}_n\|_{X_n} \le 1, \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow (T_n\mathbf{x}_n)\ \mathcal{Q}\ \text{компактна.}$$

Обозначим через Y множество непрерывных на $[0,1]$ функций. С нормой

$$\|y\|_Y = \max_{0\le t\le 1}|y(t)|, \quad y \in Y,$$

множество Y становится банаховым пространством.

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}_0$ и обозначим через X множество m раз непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций, удовлетворяющих условиям

$$x^{(\nu)}(0) = 0, \quad 0 \le \nu \le m-1.$$

С нормой

$$\|x\|_X = \max_{0\le t\le 1}\left|x^{(m)}(t)\right|, \quad x \in X,$$

множество X также становится банаховым пространством.

Оператор дифференцирования порядка $\nu \in \mathbb{N}_0$, $0 \le \nu \le m$, определенный на X, обозначим через D^ν. При $\nu = 0$ оператор D^ν будет совпадать с тождественным оператором $I = D^0$.

Из определения пространств X и Y сразу следует, что

$$\left\|D^m\right\|_{X\to Y} = \left\|D^{-m}\right\|_{Y\to X} = 1.$$

Зафиксируем $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\alpha < m$, и определим на X оператор дробного дифференцирования порядка α

$$D^\alpha = (1 - \{\alpha\})D^{[\alpha]} + \{\alpha\}D^{[\alpha]+1}. \tag{1}$$

Здесь $[\alpha]$ обозначает целую часть, а $\{\alpha\}$ дробную часть числа α. При таком определении оператор (1) будет совпадать с обычным оператором дифференцирования при $\alpha \in \mathbb{N}_0$, $\alpha < m$, поэтому это определение должно считаться корректным.

Обозначим теперь через $\alpha(t)$, $t \in [0,1]$, непрерывную функцию такую, что для некоторого числа $\nu \in \mathbb{N}_0$, $\nu < m$, имеем

$$\nu \le \alpha(t) < \nu + 1, \quad t \in [0,1]. \tag{2}$$

Оператором дифференцирования *переменного порядка* $\alpha(t)$ назовем оператор

$$D^{\alpha(t)} = (1 - \{\alpha(t)\})D^\nu + \{\alpha(t)\}D^{\nu+1}, \quad t \in [0,1]. \tag{3}$$

И вновь, при $\alpha(t) = \nu \in \mathbb{N}_0$ оператор (3) будет совпадать с обычным оператором дифференцирования D^ν, поэтому и это определение должно считаться корректным.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}_0$ и обозначим через Y_n множество векторов $\mathbf{y}_n = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$. С нормой

$$\|\mathbf{y}_n\|_{Y_n} = \max_{0\le i\le n}|y_i|, \quad y \in Y,$$

множество Y_n становится банаховым пространством.

Пусть X_n – множество векторов $\mathbf{x}_n = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, а $\bar{D}_n$ имеет вид

$$[\bar{D}_n\mathbf{x}_n]_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{h}, \quad h = \frac{1}{n}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

простейшего оператора численного дифференцирования первого порядка на X_n. Для значений $k \le 0$ и $k > n$ будем полагать $x_k = 0$. Теперь определим на X_n простейший оператор численного дифференцирования порядка $\nu \in \mathbb{N}_0$, $0 \le \nu \le m$:

$$\bar{D}_n^\nu \mathbf{x}_n = \bar{D}_n(\bar{D}_n^{\nu-1}\mathbf{x}_n), \quad \nu = 1, 2, \ldots .$$

При $\nu = 0$ оператор $\bar{D}^\nu$ будем считать тождественным оператором $I_n = \bar{D}_n^0$. Понятно, что при таком определении для всех $\mathbf{x}_n \in X_n$ будут выполняться условия

$$[\bar{D}_n^\nu \mathbf{x}_n]_0 = 0, \quad 0 \le \nu \le m,$$

а норма

$$\|\mathbf{x}_n\|_{X_n} = \max_{0\le k\le n}\left|[\bar{D}_n^m \mathbf{x}_n]_k\right|$$

превращает множество X_n в банахово пространство, причем

$$\left\|\bar{D}_n^m\right\|_{X_n\to Y_n} = \left\|\bar{D}_n^{-m}\right\|_{Y_n\to X_n} = 1.$$

Пусть

$$t_k = \frac{k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

сетку равноотстоящих узлов на $\mathbb{R}$. Легко видеть, что операторы $p_n \in \mathcal{L}(X, X_n)$ и $q_n \in \mathcal{L}(Y, Y_n)$

$$p_n x = (x(t_0), x(t_2), \ldots, x(t_n)), \quad p_n : X \to X_n,$$

$$q_n x = (x(t_0), x(t_2), \ldots, x(t_n)), \quad q_n : Y \to Y_n,$$

являются связывающими операторами для пар пространств (X, X_n) и (Y, Y_n).

Операторы $\bar{D}_n^\nu$, $\nu = 0,1,\ldots,m$, являются $\mathcal{PQ}$-сходящимися в том смысле, что для любой функции $x \in X$

$$\left\|q_n\bar{D}^\nu x - \bar{D}_n^\nu p_n x\right\|_{Y_n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

однако скорость их сходимости невелика. В вычислительной схеме предлагаемого метода можно будет для повышения точности использовать любые сходящиеся операторы численного дифференцирования D_n^ν

$$[D_n^\nu \mathbf{x}_n]_k = h^{-\nu}\sum_{j=-r_\nu}^{0} d_{\nu,j}x_{k+j}, \quad \nu = 0,1,\ldots,m, \quad k = 0,1,\ldots,n. \tag{5}$$

Критерием сходимости операторов вида (5) является возможность предствить их в виде

$$D_n^\nu = V_n^\nu S_n^{-r_\nu+\nu}\bar{D}_n^\nu,$$

где

$$V_n^\nu = \sum_{j=0}^{r_\nu-\nu}\rho_j S_n^j \tag{6}$$

есть полином от оператора сдвига S_n^j:

$$[S_n^j \mathbf{x}_n]_k = x_{j+k},$$

причем

$$\sum_{j=0}^{r_\nu-\nu}\rho_j = 1.$$

При этом полином

$$\sum_{j=0}^{r_\nu-\nu}\rho_j\zeta^j$$

называется *характеристическим полиномом*, а его корни ζ_j, $j = 1,2,\ldots,r_\nu-\nu$, – характеристическими значениями оператора D_n^ν.

Характеристические значения сходящегося оператора D_n^m позволяют сформулировать простой необходимый и достаточный критерий его обратимости:

$$|\zeta_j| \neq 1, \quad j = 1,2,\ldots,r_m-m.$$

Действительно, разложение (6) представим в виде произведения

$$V_n^m = \prod_{j=1}^{r_m-m}\frac{S_n-\zeta_j I_n}{1-\zeta_j}, \quad S_n = S_n^1, \quad I_n \text{ – тождественный оператор в } Y_n.$$

Так как оператор $S_n : Y_n \to Y_n$ изометричен, т.е.

$$\|S_n\mathbf{y}_n\|_{Y_n} = \|\mathbf{y}_n\|_{Y_n},$$

то справедливы оценки

$$\left\|(S_n-\zeta I_n)^{-1}\right\|_{Y_n\to Y_n} \le \frac{1}{1-|\zeta|} \quad \text{при} \quad |\zeta|<1,$$

$$\left\|(S_n-\zeta I_n)^{-1}\right\|_{Y_n\to Y_n} \le \frac{1}{|\zeta|-1} \quad \text{при} \quad |\zeta|>1.$$

Следовательно, оператор $V_n^m : Y_n \to Y_n$ имеет ограниченный обратный:

$$\left\|V_n^{-m}\right\|_{Y_n\to Y_n} \le \prod_{j=1}^{r_m-m}\frac{|1-\zeta_j|}{\left|1-|\zeta_j|\right|}.$$

Это позволяет представить оператор $D_n^{-m} : Y_n \to X_n$, обратный к оператору D_n^m, в виде композиции операторов

$$D_n^{-m} = \bar{D}_n^{-m}S_n^{r_m-m}V_n^{-m} : Y_n \to X_n$$

и оценить с учетом изометричности оператора $S_n^{r_m-m}$ и равенства $\left\|\bar{D}_n^{-m}\right\|_{Y_n\to X_n} = 1$ его норму

$$\left\|D_n^{-m}\right\|_{Y_n\to X_n} \le \left\|V_n^{-m}\right\|_{Y_n\to Y_n}.$$

Эти важные результаты о сходимости и устойчивости разностных схем были получены в работах С.Г. Крейна, Л.Н. Шаблицкой [49], [50] и Н.Н Гудович [51], [52].

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе приведены три леммы, необходимые для дальнейшего изложения. Доказательство первой леммы имеется, например, в [53], второй и тертьей – в [47].

Лемма 1. *Пусть A и B – линейные операторы, действующие из банахова пространства X в банахово пространство Y. Предположим, что оператор A обратим и выполнено условие $\|B\|_{X\to Y}\left\|A^{-1}\right\|_{Y\to X} < 1$. Тогда оператор $A + B : X \to Y$ также обратим, и справедлива оценка*

$$\left\|(A+B)^{-1}\right\|_{Y\to X} \le \frac{\left\|A^{-1}\right\|_{Y\to X}}{1-\|B\|_{X\to Y}\left\|A^{-1}\right\|_{Y\to X}}.$$

Рассмотрим уравнения вида

$$z + Tz = y, \quad T \in \mathcal{L}(Y,Y), \quad y \in Y, \tag{7}$$

$$\mathbf{z}_n + T_n\mathbf{z}_n = \mathbf{y}_n, \quad T_n \in \mathcal{L}(Y_n, Y_n), \quad \mathbf{y}_n \in Y_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Лемма 2. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *операторы* T, T_n, $n \in \mathbb{N}$ *вполне непрерывны и* T_n *компактно* $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}$*-сходится к* T;

2) *последовательность* $(\mathbf{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{y}_n \in Y_n$, $\mathfrak{Q}$*-сходится к* y;

3) *для любого* $z \in TY$, $z \neq 0$, $\lim_{n\to\infty}\|q_n z\| > 0$;

4) *уравнение* (7) *имеет единственное решение* $z^* \in Y$.

Тогда при достаточно больших n уравнение (8) *однозначно разрешимо и приближенные решения* $\mathbf{z}_n^* \in Y_n$ $\mathfrak{Q}$*-сходятся к точному решению* $z^* \in Y$ *уравнения* (7) *со скоростью*

$$\left\|\mathbf{z}_n^* - q_n z^*\right\|_{Y_n} \le c\left\|q_n T z^* - T_n q_n z^* - q_n y + \mathbf{y}_n\right\|_{Y_n}. \tag{9}$$

(Здесь и далее c обозначает вполне определенные константы, не зависящие от n, возможно, разные в разных вхождениях.)

Лемма 3. *Если* $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *связывающие операторы и последовательность* $(y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, $y^{(n)} \in Y$, *компактна, то последовательность* $(q_n y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathfrak{Q}$*-компактна.*

4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{\nu=0}^{m-1}\left(\sum_{\mu=0}^{l_\nu} a_{\nu,\mu}(t)x^{(\alpha_{\nu,\mu}(t))}(t) + \sum_{\eta=0}^{k_\nu}\int_0^1 g_{\nu,\eta}(t,\tau)x^{(\beta_{\nu,\eta}(\tau))}(\tau)d\tau\right) = y(t), \quad t \in [0,1], \tag{10}$$

с начальными условиями

$$x^{(\nu)}(0) = 0, \quad \nu = 0,1,\ldots,m-1. \tag{11}$$

Здесь приняты обозначения

$$x^{(\alpha_{\nu,\mu})} = D^{\alpha_{\nu,\mu}}x, \quad x^{(\beta_{\nu,\eta})} = D^{\beta_{\nu,\eta}}x,$$

$$\mu = 0,1,\ldots,l_\nu, \quad \eta = 0,1,\ldots,k_\nu, \quad \nu = 0,1,\ldots,m-1, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Для индексов ν, μ, η и функций $\alpha_{\nu,\mu}$, $\beta_{\nu,\eta}$ на $[0,1]$ предполагаются выполненными условия

$$\begin{gathered} \nu \le \alpha_{\nu,\mu}(t) < \nu+1, \quad \mu = 0,1,\ldots,l_\nu, \\ \nu \le \beta_{\nu,\eta}(t) < \nu+1, \quad \eta = 0,1,\ldots,k_\nu, \quad \nu = 0,1,\ldots,m-1. \end{gathered} \tag{12}$$

5. АНАЛИЗ РАЗРЕШИМОСТИ

По определению (3) с учетом условий (2) в задаче (7), (8) сделаем замену

$$x^{(\alpha_{\nu,\mu}(t))}(t) = (1 - \{\alpha_{\nu,\mu}(t)\})x^{(\nu)}(t) + \{\alpha_{\nu,\mu}(t)\}x^{(\nu+1)}(t), \quad \mu = 0,1,\ldots,l_\nu,$$

$$x^{(\beta_{\nu,\eta}(t))}(t) = (1 - \{\beta_{\nu,\eta}(t)\})x^{(\nu)}(t) + \{\beta_{\nu,\eta}(t)\}x^{(\nu+1)}(t), \quad \eta = 0,1,\ldots,k_\nu,$$

$$\nu = 0,1,\ldots,m-1.$$

Получим уравнение

$$\sum_{\nu=0}^{m}\left(b_\nu(t)x^{(\nu)}(t) + \int_0^1 f_\nu(t,\tau)x^{(\nu)}(\tau)d\tau\right) = y(t),$$

$$b_0(t) = \sum_{\mu=0}^{l_0}(1 - \{\alpha_{0,\mu}(t)\})a_{\nu,\mu}(t),$$

$$b_\nu(t) = \sum_{\mu=0}^{l_\nu}(1-\{\alpha_{\nu,\mu}(t)\})a_{\nu,\mu}(t) + \sum_{\mu=0}^{l_{\nu-1}}\{\alpha_{\nu-1,\mu}(t)\}a_{\nu,\mu}(t), \quad \nu = 1,2,\ldots,m-1,$$

$$b_m(t) = \sum_{\mu=0}^{l_{m-1}}\{\alpha_{m-1,\mu}(t)\}a_{m-1,\mu}(t), \tag{13}$$

$$f_0(t,\tau) = \sum_{\eta=0}^{k_0}(1-\{\beta_{0,\eta}(\tau)\})g_{0,\eta}(t,\tau),$$

$$f_\nu(t,\tau) = \sum_{\eta=0}^{k_\nu}(1-\{\beta_{\nu,\eta}(\tau)\})g_{\nu,\eta}(t,\tau) + \sum_{\eta=0}^{k_{\nu-1}}\{\beta_{\nu-1,\eta}(\tau)\}g_{\nu-1,\eta}(t,\tau), \quad \nu = 1,2,\ldots,m-1,$$

$$f_m(t,\tau) = \sum_{\eta=0}^{k_{m-1}}\{\beta_{m-1,\eta}(\tau)\}g_{m-1,\eta}(t,\tau), \quad t\in[0,1], \quad \tau\in[0,1].$$

Задачи (10), (11) и (13), (11) равносильны в том смысле, что они обе однозначно разрешимы или нет одновременно, и в случае однозначной разрешимости их решения совпадают.

Теорема 1. *Пусть для задачи* (10), (11) *выполнены следующие условия.*

A1. *Функции* $a_{\nu,\mu}$, $\mu = 0,1,\ldots,l_\nu$, $g_{\nu,\eta}$, $\eta = 0,1,\ldots,k_\nu$, $\nu = 0,1,\ldots,m-1$, *и* y *непрерывны, причем* $g_{\nu,\eta}$, $\eta = 0,1,\ldots,k_\nu$, $\nu = 0,1,\ldots,m-1$, *непрерывны по каждому аргументу равномерно относительно другого аргумента.*

A2: $\sum_{\nu=0}^{l_{m-1}}\{\alpha_{m-1,\mu}(t)\}a_{m-1,\mu}(t) \ne 0$, $t\in[0,1]$.

A3: $\sum_{\nu=0}^{m-1}\|b_\nu/b_m\|_Y + \sum_{\nu=0}^{m}\|f_\nu/b_m\|_Y < 1$.

Тогда задача (13), (11) *и, следовательно, задача* (10), (11) *однозначно разрешимы при любой правой части* $y\in Y$.

Доказательство. Задачу (13), (11) запишем в виде операторного уравнения

$$Kx \equiv D^m x + Bx = y/b_m, \quad K: X\to Y,$$

$$D^m : X\to Y,$$

$$(Bx)(t) = \left(\sum_{\nu=0}^{m-1} b_\nu(t)x^{(\nu)}(t) + \sum_{\nu=0}^{m}\int_0^1 f_\nu(t,\tau)x^{(\nu)}(\tau)d\tau\right)/b_m(t), \quad B: X\to Y,$$

и оценим норму оператора $B: X\to Y$. Зафиксируем произвольный элемент $x\in X$ и оценим норму Bx в пространстве Y:

$$\|Bx\|_Y = \max_{0\le t\le 1}\left|\left(\sum_{\nu=0}^{m-1} b_\nu(t)x^{(\nu)}(t) + \sum_{\nu=0}^{m}\int_0^1 f_\nu(t,\tau)x^{(\nu)}(t)d\tau\right)/b_m(t)\right| \le \sum_{\nu=0}^{m-1}\|b_\nu/b_m\|_Y\left\|x^{(\nu)}\right\|_Y + \sum_{\nu=0}^{m}\|f_\nu/b_m\|_Y\left\|x^{(\nu)}\right\|_Y.$$

По теореме Лагранжа для любого $x\in X$ выполняются равенства

$$\left\|x^{(\nu)}\right\|_Y \le \left\|x^{(\nu+1)}\right\|_Y, \quad \nu = 0,1\ldots,m-1,$$

поэтому

$$\left\|x^{(\nu)}\right\|_Y \le \|x\|_X, \quad \nu = 0,1,\ldots,m,$$

и, следовательно,

$$\|Bx\|_Y \le \left(\sum_{\nu=0}^{m-1}\|b_\nu/b_m\|_Y + \sum_{\nu=0}^{m}\|f_\nu/b_m\|_m\right)\|x\|_X.$$

Это означает, что

$$\|B\|_{X\to Y} \le \left(\sum_{\nu=0}^{m-1}\|b_\nu/b_m\|_Y + \sum_{\nu=0}^{m}\|f_\nu/b_m\|_m\right).$$

По лемме 1, учитывая, что $\left\|D^m\right\|_{X\to Y} = 1$, получаем, что при

$$u = \sum_{\nu=0}^{m-1}\|b_\nu/b_m\|_Y + \sum_{\nu=0}^{m}\|b_\nu/b_m\|_Y < 1$$

оператор $K : X \to Y$ обратим, т.е. задача (13), (11) и, следовательно, задача (10), (11) однозначно разрешимы при любой правой части $y \in Y$. Более того, это означает, что обратный оператор $\left\|K^{-1}\right\|_{Y\to X}$ ограничен

$$\left\|K^{-1}\right\|_{Y\to X} \le \frac{1}{1-u},$$

поэтому для решения $x^* \in X$ задач (13), (11) и (10), (11) справедлива оценка

$$\|x^*\|_X \le \frac{\|y/b_m\|_Y}{1-u}.$$

Теорема 1 доказана.

Условия теоремы 1 являются лишь достаточными для однозначной разрешимости задачи (10), (11). На самом деле класс разрешимых задач вида (10), (11) значительно шире. Тем не менее теорема 1 необходима для того, чтобы предположение о существовании решения этой задачи в теореме 2 не было пустым.

6. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СХЕМА

Приближенное решение задачи (10), (11) будем искать в виде вектора

$$\mathbf{x}_n = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in X_n. \tag{14}$$

Компоненты вектора (14) $[\mathbf{x}_n]_k = x_k$, $k = 0,1,\ldots,n$, приближенные значения искомой функции в узлах t_k, $k = 0,1,\ldots,n$, найдем из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{\nu=0}^{m}(b_\nu(t_k)[D_n^\nu\mathbf{x}_n]_k + \sum_{l=0}^{n}\xi_{l,\nu}f_\nu(t_k,t_l)[D_n^\nu\mathbf{x}_n]_l) = y(t_k), \quad k = 0,1,..,n. \tag{15}$$

Здесь $D_n^\nu\mathbf{x}_n$, $\nu = 0,1,\ldots,m$, – формулы численного дифференцирования вида (5), использующие только значения x_k, $k = \ldots,-m+1,-m+2,\ldots,n$, причем $x_k = 0$, $k = \ldots,-m+1,-m+2,\ldots,0$, а

$$\sum_{l=0}^{n}\xi_{l,\nu}f_\nu(t_k,t_l)[D_n^\nu\mathbf{x}_n]_l, \quad \nu = 0,1,\ldots,m,$$

некоторые квадратурные формулы такие, что остаточные члены

$$\rho_{n,\nu}(w_\nu) = \int_0^1 w_\nu(\tau)d\tau - \sum_{l=0}^{n}\xi_{l,\nu}w_\nu(t_l)$$

стремятся к нулю при $n \to \infty$ для любых непрерывных на $[0,1]$ функций w_ν, $\nu = 0,1,\ldots,m$.

7. ОБОСНОВАНИЕ КВАДРАТУРНО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА

Теорема 2. *Пусть для задачи* (10), (11) *и вычислительной схемы* (14), (15) *выполнены условия* A1, A2 *теоремы* 1 *и, кроме того, следующие условия.*

A4. *Задача* (10), (11) *имеет единственное решение* $x^* \in X$.

B1. *Формулы численного дифференцирования* (5) $\mathcal{PQ}$*-сходятся.*

B2. *Характеристические значения оператора* D_n^m *по модулю отличны от* 1.

Тогда при достаточно больших n система уравнений (15) *однозначно разрешима и приближенные решения* $\mathbf{x}_n^*$ *сходятся к точному решению* x^* *задачи* (10), (11) *при* $n \to \infty$ *со скоростью*

$$\left\|\mathbf{x}_n^* - p_n x^*\right\|_{X_n} \leq c(\varepsilon_n + \delta_n), \tag{16}$$

где

$$\varepsilon_n = \max_{0\leq\nu\leq m}\left\|D_n^\nu p_n x^* - q_n D^\nu x^*\right\|_{Y_n}, \quad \delta_n = \max_{0\leq\nu\leq m}\left\|q_n\rho_{n,\nu}(f_\nu D^\nu x^*)\right\|_{Y_n}.$$

Доказательство. Пусть $z = D^m x$ и представим задачу (10), (11) в виде равносильного ей операторного уравнения

$$z + Tz = y/b_m, \quad T = BD^{-m} : Y \to Y. \tag{17}$$

Здесь равносильность понимается в том смысле, что если задача (10), (11) имеет решение $x^* \in X$, то $z^* = D^m x^* \in Y$ будет решением уравнения (17).

Так как условие B2 теоремы 2 означает, что оператор $D_n^m : X_n \to Y_n$ обратим, то пусть $\mathbf{z}_n = D_n^m \mathbf{x}_n$ и представим также систему уравнений (15) в виде операторного уравнения

$$\mathbf{z}_n + T_n\mathbf{z}_n = q_n(y/b_m), \quad T_n = B_n D_n^{-m} : Y_n \to Y_n,$$

$$\begin{aligned} B_n\mathbf{x}_n = \Bigg(&\sum_{\nu=0}^{m-1}(b_\nu(t_0)/b_m(t_0))[D_n^\nu\mathbf{x}_n]_0 + \sum_{\nu=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\xi_{l,\nu}(f_\nu(t_0,t_l)/b_m(t_0))[D_n^\nu\mathbf{x}_n]_l, \\ &\sum_{\nu=0}^{m-1}(b_\nu(t_1)/b_m(t_1))[D_n^\nu\mathbf{x}_n]_1 + \sum_{\nu=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\xi_{l,\nu}(f_\nu(t_1,t_l)/b_m(t_1))[D_n^\nu\mathbf{x}_n]_l, \ldots, \\ &\sum_{\nu=0}^{m-1}(b_\nu(t_n)/b_m(t_n))[D_n^\nu\mathbf{x}_n]_n + \sum_{\nu=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\xi_{l,\nu}(f_\nu(t_n,t_l)/b_m(t_n))[D_n^\nu\mathbf{x}_n]_l\Bigg). \end{aligned} \tag{18}$$

Покажем, что для уравнений (17) и (18) выполняются все условия леммы 2.

По условию A4 теоремы 2 задача (10), (11) имеет единственное решение $x^* \in X$, тогда, как указано выше, $z^* = D^m x^*$ будет решением уравнения (17), поэтому условие 4) леммы 2 выполнено.

Условие 3) леммы 2 означает, что элемент $z \in TY$ имеет норму $\|z\|_Y > 0$. Оператор q_n является связывающим отображением, поэтому по определению 1 имеем

$$\lim_{n\to\infty}\|q_n z\|_{Y_n} = \|z\|_Y > 0,$$

и, значит, условие 3) леммы 2 также выполнено.

Условие 2) леммы 2 выполняется тривиально.

Проверим выполнение условия 1).

Так как оператор $D^m : X \to Y$ ограничен, то все операторы $D^\nu : X \to Y$, $\nu = 0,1,\ldots,m-1$, вполне непрерывны, а вместе с ними, с учетом условия A1, вполне непрерывен и оператор $\sum_{\nu=0}^{m-1} b_\nu D^\nu : X \to Y$. Интегралы с непрерывными ядрами f_ν, $\nu = 0,1,\ldots,m$, представляют собой (см., например, [54]) вполне непрерывные операторы, поэтому оператор $B : X \to Y$ вполне непрерывен. Так как оператор $D^{-m} : Y \to X$ ограничен, то композиция $T = BD^{-m} : Y \to Y$ является вполне непрерывным оператором.

Проверим теперь $\mathcal{QQ}$-сходимость операторов T_n, $n \in \mathbb{N}$, к оператору T. Покажем вначале, что последовательность операторов $D_n^{-m} : Y_n \to X_n$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{QP}$-сходятся к оператору $D^{-m} : Y \to X$.

Пусть последовательность $(\mathbf{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{y}_n \in Y_n$, и функция $y \in Y$ таковы, что $(\mathbf{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathfrak{Q}$-сходится к y. Обозначим через $x = D^{-m}y \in X$ и оценим разность

$$\left\|D_n^{-m}\mathbf{y}_n - p_n D^{-m}y\right\|_{X_n} \le \left\|D_n^{-m}\right\|_{Y_n\to X_n}\left\|\mathbf{y}_n - D_n^m p_n D^{-m}y\right\|_{Y_n} \le \left\|D_n^{-m}\right\|_{Y_n\to X_n}\left(\left\|\mathbf{y}_n - q_n y\right\|_{Y_n} + \left\|q_n D^m x - D_n^m p_n x\right\|_{Y_n}\right).$$

Слагаемое $\|\mathbf{y}_n - q_n y\|_{Y_n}$ стремится к нулю при $n\to\infty$ по условию, а слагаемое $\left\|q_n D^m x - D_n^m p_n x\right\|_{Y_n}$ стремится к нулю при $n\to\infty$, так как операторы D_n^m $\mathcal{P}\mathfrak{Q}$-сходятся к оператору D^m. Вместе с $\mathcal{P}\mathfrak{Q}$-сходимостью операторов численного дифференцирования и интегрирования $\mathfrak{Q}\mathcal{P}$-сходимость операторов D_n^{-m} к D^{-m} означает $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}$-сходимость операторов T_n к T.

Проверим выполнение условия компактности:

$$\mathbf{z}_n \in Y_n,\quad \|\mathbf{z}_n\|_{Y_n} \le 1,\quad n\in\mathbb{N} \Rightarrow (T_n\mathbf{z}_n)\ \mathfrak{Q} - \text{компактна}.$$

Зафиксируем последовательность $(\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{z}_n \in Y_n$, $\|\mathbf{z}_n\|_{Y_n} \le 1$. Из обратимости операторов D_n^{-m}, $n\in\mathbb{N}$, следует, что существует последовательность $\mathbf{x}_n = D_n^{-m}\mathbf{z}_n \in X_n$, $n\in\mathbb{N}$, и она ограничена $\|\mathbf{x}_n\|_{X_n} \le \left\|V_n^{-m}\right\|_{Y_n\to Y_n}$. Ограниченность этой последовательности влечет ограниченность последовательности $(\bar{D}_n^m\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left\|\bar{D}_n^m\mathbf{x}_n\right\|_{Y_n} = \|\mathbf{x}_n\|_{X_n}$, и, следовательно, $\mathfrak{Q}$-компактность последовательностей $(\bar{D}_n^\nu\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\nu = 0,1,\ldots,m-1$. Действительно, так как

$$[\bar{D}_n^{m-1}\mathbf{x}_n]_1 = n^{-1}[\bar{D}_n^m\mathbf{x}_n]_1 \le \|\mathbf{x}_n\|_{X_n},$$

$$[\bar{D}_n^{m-1}\mathbf{x}_n]_2 = n^{-1}([\bar{D}_n^m\mathbf{x}_n]_1 + [\bar{D}_n^m\mathbf{x}_n]_2) \le \|\mathbf{x}_n\|_{X_n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$[\bar{D}_n^{m-1}\mathbf{x}_n]_n = n^{-1}\sum_{k=1}^n[\bar{D}_n^m\mathbf{x}_n]_k \le \|\mathbf{x}_n\|_{X_n},$$

то $\left\|\bar{D}_n^{m-1}\mathbf{x}_n\right\|_{Y_n} \le \|\mathbf{x}_n\|_{X_n}$. Теперь по значениям $[\bar{D}_n^{m-1}\mathbf{x}_n]_k$, $k = 0,1,\ldots,n$, вектора $\bar{D}_n^{m-1}\mathbf{x}_n$ постороим на $[0,1]$ сплайн первого порядка $v_{n,m-1}(t)$, совпадающий со значениями $[\bar{D}_n^{m-1}\mathbf{x}_n]_k$, $k = 0,1,\ldots,n$, в узлах t_k, $k = 0,1,\ldots,n$. Оценки

$$\left|[\bar{D}_n^{m-1}\mathbf{x}_n]_k - \bar{D}_n^{m-1}\mathbf{x}_n]_{k-1}\right| \le n^{-1}\left|[\bar{D}_n^m\mathbf{x}_n]_k\right| \le n^{-1}\|\mathbf{x}_n\|_{X_n},\quad k = 1,2,\ldots,n,$$

следующие из определения простейших формул численного дифференцирования, означают равностепенную непрерывность сплайнов $v_{n,m-1}$, $n\in\mathbb{N}$, что вместе с их ограниченностью, по теореме Арцела, означает их компактность в пространстве Y. По лемме 3 компактность $(v_{n,m-1})_{n\in\mathbb{N}}$ в Y означает $\mathfrak{Q}$-компактность последовательности $q_n v_{n,m-1} = \bar{D}_n^{m-1}\mathbf{x}_n$, $n\in\mathbb{N}$. Аналогично, из ограниченности последовательности $(\bar{D}_n^{m-1}\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ будет следовать $\mathfrak{Q}$-компактность последовательности $(\bar{D}_n^{m-2}\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и так далее для всех последовательностей $(\bar{D}_n^\nu\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\nu = 0,1,\ldots,m-1$. Наконец, линейные комбинации

$$D_n^\nu\mathbf{x}_n = V_n^\nu S_n^{-r_\nu+\nu}\bar{D}_n^\nu\mathbf{x}_n,\quad \nu = 0,1,\ldots,m-1,$$

$\mathfrak{Q}$-компактных последовательностей являются, очевидно, $\mathfrak{Q}$-компактными последовательностями, что и означает $\mathfrak{Q}$-компактность последовательности

$$\left(\sum_{\nu=0}^{m-1}(b_\nu(t_0)/b_m(t_0))[D_n^\nu\mathbf{x}_n]_0, \sum_{\nu=0}^{m-1}(b_\nu(t_1)/b_m(t_1))[D_n^\nu\mathbf{x}_n]_1, \ldots, \sum_{\nu=0}^{m-1}(b_\nu(t_n)b_m(t_n))[D_n^\nu\mathbf{x}_n]_n\right)_{n\in\mathbb{N}}. \tag{19}$$

Используя равномерную непрерывность и ограниченность на $[0,1]^2$ функций $f_\nu(t,\tau)/b_m(t)$, $\nu = 0,1,\dots,m$, с помощью теоремы Арцела легко убедиться, что последовательности

$$w_{n,\nu}(t) = \sum_{l=0}^{n} \xi_{l,\nu}(f_\nu(t,t_l)/b_m(t))[D_n^\nu \mathbf{x}_n]_l, \quad \nu = 0,1,\dots,m,$$

компактны в Y. Вновь применяя лемму 3, получим, что последовательности

$$q_n w_{n,\nu} = \left(\sum_{l=0}^{n} \xi_{l,\nu}(f_\nu(t_0,t_l)/b_m(t_0))[D_n^\nu \mathbf{x}_n]_l, \sum_{l=0}^{n} \xi_{l,\nu}(f_\nu(t_1,t_l)/b_m(t_1))[D_n^\nu \mathbf{x}_n]_l, \dots \right.$$
$$\left. \dots, \sum_{l=0}^{n} \xi_{l,\nu}(f_\nu(t_n,t_l)/b_m(t_n))[D_n^\nu \mathbf{x}_n]_l \right), \quad \nu = 0,1,\dots,m, \tag{20}$$

а значит, и их сумма $\mathcal{Q}$-компактны.

Суммируя последовательности (19) и (20), получаем, что последовательность $B_n\mathbf{x}_n$, а с учетом ограниченности операторов D_n^{-m}, и последовательность $T_n\mathbf{z}_n = B_nD_n^{-m}\mathbf{z}_n$ $\mathcal{Q}$-компактны. Таким образом, условие 1) леммы 2 также выполнено.

По лемме 2 получаем, что для достаточно больших n уравнение (18) имеет единственное решение $\mathbf{z}_n^*$ и верна оценка

$$\left\|\mathbf{z}_n^* - q_n z^*\right\|_{Y_n} \le c\left\|q_n T z^* - T_n q_n z^*\right\|_{Y_n}. \tag{21}$$

Для завершения доказательства теоремы 2 осталось получить оценку (16). Используя замены переменных $\mathbf{z}_n^* = D_n^m\mathbf{x}_n^*$ и $z^* = D^m x^*$, получаем

$$\left\|\mathbf{x}_n^* - p_n x^*\right\|_{X_n} \le \left\|D_n^{-m}\right\|_{Y_n\to X_n}\left\|D_n^m\mathbf{x}_n^* - D_n^m p_n x^*\right\|_{Y_n} \le \left\|V_n^{-m}\right\|_{Y_n\to Y_n}\left\|\mathbf{z}_n^* - D_n^m p_n x^*\right\|_{Y_n} \le$$
$$\le \left\|V_n^{-m}\right\|_{Y_n\to Y_n}\left(\left\|\mathbf{z}_n^* - q_n z^*\right\|_{Y_n} + \left\|q_n D^m x^* - D_n^m p_n x^*\right\|_{Y_n}\right).$$

Из (21) следует, что

$$\left\|\mathbf{x}_n^* - p_n x^*\right\|_{X_n} \le c\left(\left\|qTz^* - T_n q_n z^*\right\|_{Y_n} + \left\|q_n D^m x^* - D_n^m p_n x^*\right\|\right). \tag{22}$$

Оценим отдельно первое слагаемое правой части оценки (22)

$$\left\|q_nTz^* - T_nq_nz^*\right\|_{Y_n} = \left\|q_nBx^* - B_nD_n^{-m}q_nD^mx^*\right\|_{Y_n} \le \left\|q_nBx^* - B_np_nx^*\right\|_{Y_n} +$$
$$+ \left\|B_n\right\|_{Y_n\to Y_n}\left\|p_nx^* - D^{-m}q_nD^mx^*\right\|_{Y_n} \le \left\|q_nBx^* - B_np_nx^*\right\|_{Y_n} + \left\|B_n\right\|_{Y_n\to Y_n}\left\|D_n^{-m}\right\|_{Y_n\to Y_n}\left\|D_n^m p_nx^* - q_nD^mx^*\right\|_{Y_n}.$$

Возвращаясь к оценке (22), получаем

$$\left\|\mathbf{x}_n^* - p_nx^*\right\|_{X_n} \le c\left(\left\|q_nDx^* - B_np_nx^*\right\|_{Y_n} + \left(1 + \left\|B_n\right\|_{Y_n\to Y_n}\left\|D_n^{-m}\right\|_{Y_n\to X_n}\right)\left\|D_n^m p_nx^* - q_nD^mx^*\right\|_{Y_n}\right) \le$$
$$\le c\left(\left\|D_n^m p_nx^* - q_nD^mx^*\right\|_{Y_n} + \left\|q_nBx^* - B_np_nx^*\right\|_{Y_n}\right) \le c(\varepsilon_n + \delta_n),$$
$$\varepsilon_n = \max_{0\le\nu\le m}\left\|D_n^\nu p_nx^* - q_nD^\nu x^*\right\|_{Y_n}, \quad \delta_n = \max_{0\le\nu\le m}\left\|q_n\rho_{n,\nu}(f_\nu D^\nu x^*)\right\|_{Y_n}.$$

Теорема 2 доказана полностью.

8. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Рассмотрим уравнение вида (10)

$$(t^2+1)x^{(\alpha_1(t))}(t) + t^3x^{(\alpha_0(t))}(t) + \int_0^1 (t-\tau)x^{(\beta_1(\tau))}(\tau)d\tau + \int_0^1 (t-\tau^2)x^{\beta_0(\tau)}(\tau)d\tau = y(t), \quad t\in[0,1], \tag{23}$$

с производными искомой функции переменных и дробных порядков

$$\alpha_0(t) = \frac{1}{2}t^2, \quad 0 \le \alpha_0(t) < 1, \quad \alpha_1(t) = \frac{3}{2}, \quad 1 \le \alpha_1(t) < 2,$$

$$\beta_0(t) = \frac{1}{2}, \quad 0 \le \beta_0(t) < 1, \quad \beta_1(t) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t, \quad 1 \le \beta_1(t) < 2,$$

удовлетворяющих на $[0,1]$ условиям (2), с начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

По определениям (1), (3) производных переменных и дробных порядков найдем

$$\begin{aligned} &x^{(\alpha_1(t))}(t) = \frac{1}{2}x''(t) + \frac{1}{2}x'(t), \quad x^{(\alpha_0(t))}(t) = \frac{1}{2}t^2x'(t) + \left(1 - \frac{1}{2}t^2\right)x(t), \quad t \in [0,1], \\ &x^{(\beta_1(\tau))}(\tau) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tau\right)x''(\tau) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tau\right)x'(\tau), \quad x^{(\beta_0(\tau))}(\tau) = \frac{1}{2}x'(\tau) + \frac{1}{2}x(\tau), \quad \tau \in [0,1]. \end{aligned} \tag{24}$$

Заменяя производные переменных и дробных порядков их выражениями (24), перейдем от уравнения (23) к равносильному ему уравнению

$$\begin{aligned} &(t^2+1)x''(t) + (1+t^5)x'(t) + (2t^3 - t^5)x(t) + \int_0^1 (t-\tau)(\tau+1)x''(\tau)d\tau + \\ &+ \int_0^1 (2t - (t+1)\tau)x'(\tau)d\tau + \int_0^1 (t-\tau^2)x(\tau)d\tau = 2y(t), \quad t \in [0,1]. \end{aligned} \tag{25}$$

Подставляя в уравнение (25) функцию $x(t) = t^2 + \sin^2(t)$, получаем

$$\begin{aligned} 2y(t) = \frac{7}{15} + 5\frac{17}{30}t + 2t^5 + 2t^6 - t^7 + \left(1\frac{1}{2} - 1\frac{5}{8}\right)\sin 2 - \frac{3}{4}\cos 2 + \\ + (4t^2 + 2t^3 - t^5)\sin^2 t + 2\cos 2t + (1+t^5)\sin 2t. \end{aligned} \tag{26}$$

Для уравнения (23) с правой частью (26) функция $x(t) = t^2 + \sin^2 t$ будет точным решением.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. По предлагаемому в статье методу приближенное решение уравнения (23) будем искать в виде вектора значений $\mathbf{x}_n = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ искомой функции в узлах сетки $t_k = k/n$, $k = 0,1,\dots,n$. Значения производных искомой функции в узлах сетки будем приближать простейшими разностями

$$x''(t_k) \sim n^2(x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2}), \quad x'(t_k) \sim n(x_k - x_{k-1}), \quad k = 1,2,\dots .$$

Интегралы аппроксимируем квадратурными формулами трапеций

$$\int_0^1 (t_k - \tau)(\tau+1)x''(\tau)d\tau \sim n\sum_{l=1}^{n-1}(t_k - t_l)(t_l+1)(x_l - 2x_{l-1} + x_{l-2}) + \frac{n}{2}(x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}),$$

$$\int_0^1 (2t_k - (t_k+1)\tau)x'(\tau)d\tau \sim \sum_{l=1}^{n-1}(2t_k - (t_k+1)t_l)(x_l - x_{l-1}) + \frac{1}{2}(t_k - 1)(x_n - x_{n-1}),$$

$$\int_0^1 (T_k - \tau^2)x(\tau)d\tau \sim \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n-1}(t_k - t_l^2)x_l + \frac{1}{2n}(t_k - 1)x_n.$$

Заменяя в уравнении (25) производные искомой функции конечными разностями, а интегралы квадратурными суммами, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} &(t_k^2+1)n^2(x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2}) + (1+t_k^5)n(x_k - x_{k-1}) + (2t_k^3 - t_k^5)x_k + \\ &+ n\sum_{l=1}^{n-1}(t_k - t_l)(t_l+1)(x_l - 2x_{l-1} + x_{l-2}) + \frac{n}{2}(x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}) + \sum_{l=1}^{n-1}(2t_k - (t_k+1)t_l)(x_l - x_{l-1}) + \end{aligned}$$

Таблица 1. Оценки погрешностей приближенного решения задачи (1), (2) разностей и квадратур

n	$\left\| \mathbf{x}_n^* - p_n x^* \right\|_{X_n}$	ε_n	δ_n
10	0.3424108	0.3972079	0.393998
20	0.1654387	0.1997317	0.199488
30	0.1065912	0.1333025	0.133253
40	0.0788687	0.1004065	0.999968
50	0.0666081	0.0804866	0.080014
60	0.0613689	0.0674291	0.066683
70	0.0549078	0.0580792	0.057159

$$+\frac{1}{2}(t_k-1)(x_n-x_{n-1})+\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n-1}(t_k-t_l^2)x_l+\frac{1}{2n}(t_k-1)x_n=\frac{7}{15}+5\frac{17}{30}t_k+2t_k^5+2t_k^6-t_k^7+ \tag{27}$$
$$+\left(1\frac{1}{2}-1\frac{5}{8}\right)\sin 2-\frac{3}{4}\cos 2+(4t_k^2+2t_k^3-t_k^5)\sin^2 t_k+2\cos 2t_k+(1+t_k^5)\sin 2t_k,$$
$$k=1,2,\ldots,n,\quad x_{-1}=x_0=0,$$

квадратурно-разностного метода решения задачи (10), (11).

В табл. 1 приведены результаты решений системы уравнений (27). В первой графе указано число узлов n, во второй — погрешность приближенного решения $\left\| \mathbf{x}_n^* - p_n x^* \right\|_{X_n}$, в третьей и четвертой — погрешности разностей ε_n и квадратур δ_n соответственно. Результаты вычислительных экспериментов подтверждают теретические выводы теоремы 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Появление данной работы мотивировано трудностями, возникшими у автора при попытках конструирования и обоснования численных методов решения уравнений с дробными производными. Главным неудобством была нелокальность производных, определенных через интегралы. Действительно, простые разностные схемы решения дифференциальных уравнений используют локальность производных натуральных порядков и при ее отсутствии становятся неприменимыми. Идею определить производные дробного порядка интерполированием производных целого порядка подсказали переписка Лейбница с Лопиталем и замечания Эйлера.

В данной работе определение производных дробного порядка дано самым простым способом: на основании интерполирования сплайнами первого порядка. Очевидно, что возможны и более сложные виды интерполирования. Так же, из соображения простоты и наглядности, для вычислительной схемы были выбраны простейшие формулы численного дифференцирования. И здесь для увеличения скорости сходимости метода можно использовать более точные (но при этом и более сложные) формулы численного дифференцирования. Существенным здесь является то, что при введенном определении дробных производных все результаты по приближенным методам решения уравнений натуральных порядков легко переносятся на случай уравнений с дробными производными.

В дальнейших исследованиях предполагается непосредственное сравнение преимуществ/недостатков введенных производных на задачах, решенных с помощью призводных дробного порядка других авторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техн., 1987. 688 с.
2. *Ross B.* The development of fractional calculus 1695–1900 // Historia math. 1977. № 4. P. 75–89.

3. *Бутковский А.Г., Постнов С.С., Постнова Е.А.* Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. I. Математические основы и проблема интерпретации // Автомат. и телемехан. 2013. Вып. 4. С. 3–42.
4. *Khalil R., Al Horani M., Yousef A., Sababhehb M.* A new definition of fractional derivative // J. of Comput. and Appl. Math. 2014. № 264. P. 65–70.
5. *Rezapour M., Sijuwade A., Asaki T.J.* A new sigmoidal fractional derivative for regularization // https://arxiv.org/pdf/2001.01610.pdf
6. *Khalid Hattaf.* A new generalized definition of fractional derivative with non-singular kernel // Comput. 2020. 8. 49. P. 1–9. www.mdpi.com/journal/computation
7. *Diethelm K., Garrappa R., Giusti A., Stynes M.* Why fractional derivatives with nonsingular kernels should not be used // Fract. Calc. Appl. Anal. 2020. 23. № 3. P. 610–634.
8. *Чуриков В.А.* Программа и принципы построения дробного анализа // Известия Томского политехнического университета. 2009. Т. 314. № 2. С. 9–12.
9. *Hadamar J.* Essai sur l'etude des fonctions donnees par leur development de Taylor // J. Math. Pures et Appl. 1892. Ser. 4. V. VIII. P. 101–186.
10. *Samko S.G.* Fractional integration and differentiation of variable order // Anal. Math. 1995. V. 218. P. 213–236.
11. *Lorenzo C.F., Hartley T.T.* Variable order and distributed order fractional operators // Nonlin. Dyn. 2002. V. 29. P. 57–98.
12. *Valerio D., da Costa J.S.* Variable-order fractional derivetievs and their numerical approximations // Signal Proc. 2011. V. 91. P. 470–483.
13. *Sun H., Chen Y., Chen W.* Time fractional differential equation model with random derivative order // Proc. ASME int.design engin. tecnical conf & computes and inform in engin. Conf. IDETC/CIE 2009. San Diego, 2009. Paper ID DETC2009-87483 (6 pages)
14. *Al-Salam W.A., Verma A.* A fractional Leibniz q-formula // Pac. J. Math. 1975. V. 60. P. 1–9.
15. *Al-Salam W.A.* Some fractional q-integrals and q-derivatives // Proc. Edin. Math. Soc. 1969. V. 15. P. 135–140.
16. *Agarwal R.P.* Certain fractional q-integrals and q-derivatives // Proc. Camb. Phil. Soc. 1969. V. 66. P. 365–370.
17. *Predrag M.R., Sladana D.M., Miomir S.S.* Fractional integrals and derivatives in q-calculus // Appl. Anal. Discr. Math. 2007. V. 1. P. 311–323.
18. *Atici F.M., Eloe P.W.* A transform method in discrete fractional calculus // Int. J. Differ. Equat. 2007. V. 2. № 2. P. 165–176.
19. *Atici F.M., Eloe P.W.* Initial value problems in discrete fractional calculus // Proc. Amer. Math Soc. 2009. V. 137. P. 981–989.
20. *Atici F.M., Eloe P.W.* Fractional q-calculus on a time scale // J. Nonlin. Math. Phys. 2007. V. 14. № 3. P. 341–352.
21. *Holm M.T.* The Laplace transform in discrete fractional calculus // Comput. Math. Appl. 2011. V. 62. P. 1591–1601.
22. *Abdeljawad T., Baleanu D.* Fractional differences and integration by parts // J. Comput. Anal. Appl. 2011. V. 13. № 3. P. 574–582.
23. *Abdeljawad T., Baleanu D.* Caputo q-fractional initial value problems and a q-analogue Mittag-Leffler function // Commun. Nonlin.Sci. Numer. Simulat. 2011. V. 16. P. 4682–4688.
24. *Abdeljawad T.* On Riamann and Caputo fractional differences // Comput. Math. Appl. 2011. V. 62. P. 1602–1611.
25. *Miyakoda T.* Direct discretization of the fractional-order differential by ustng Chebyshev series expansion //Proc. Appl. Math. Mech. 2007. V. 7. P. 2020011–2020012.
26. *Miller K.S., Ross B.* An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. New York: John Wiley & Sons, 1993.
27. *Учайкин В.В.* Метод дробных призводных. Ульяновск: Артишок, 2008.
28. *Nishimoto K.* An essence of Nishimoto's fractional calculus (Calculus of the 21st century), Integrals and differentiations of arbitrary order. Koriyama: Descartes Press, 1991.
29. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение М.: Физматлит, 2003.
30. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.
31. *Podlubny I.* Fractional differential equations. San Diego: Academic Press, 1999.
32. *Diethelm K.* The analysis of fractional differential equations. Berlin: Springer, 2010.
33. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005.
34. *Lakshmikantham V., Leela S., Vasundhara D.J.* Theory of fractional Dynamic systems. Cambridge: Cambridge Academic Publishers, 2009.
35. *Caponetto R., Dongola G., Fortuna L., Petras I.* Fractional Order systems. Modeling and control applications. Singapore: World Scientific, 2010.

36. *Luchko Y., Yamamoto M.* The general fractional derivative and related fractional differential equations // Math. 2020. 8. 2115.
37. *Kochubei A.N.* General fractional calculus, evolution equations, and renewal processes // Integr. Equa. Oper. Theory. 2011. V. 71. P. 583–600.
38. *Kochubei A.N.* General fractional calculus // Handbook of Fractional Calculus with Applications; Volume 1: Basic Theory, Berlin, Germany; Boston,MA, USA. 2019. P. 111–126.
39. *Kochubei A.N.* Equations with general fractional time derivatives. Cauchy problem // Handbook of Fractional Calculus with Applications; Volume 2: Fractional Differential Equations; Berlin, Germany; Boston, MA, USA. 2019. P. 223–234.
40. *Zwillinger D.* Handbook of differential equations. New York: Academic Press, 1997.
41. *Агачев Ю.Р., Гуськова А.В.* Обобщенный полиномиальный метод решения задачи типа Коши для одного дробно-дифференциального уравнения // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2020. Т. 176. С. 80–90.
42. *Бештоков М.Х., Худалов М.З.* Третья краевая задача для нагруженного уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто // Матем. и матем. моделирование. 2020. № 3. С. 52–64.
43. *Бештоков М.Х.* Нелокальные краевые задачи в дифференциальной и разностной трактовках для обобщенного нагруженного уравнения влагопереноса // Дифференц. ур-ния и процессы управления. 2020. № 4. С. 1–27. http://diffjournal.spbu.ru/
44. *Алимбеков Н.Б., Байгереев Д.Р., Мадияров М.Н.* Исследование численного метода решения краевой задачи для дифференциального уравнения с дробной производной по времени // Известия АлтГУ. Матем. и механ. 2020. № 4 (114) С. 64–69.
45. *Minh Duc Tran, Vu Ho, Hoa Ngo Van*. On the stability of Fractional differential equations involving generalized Caputo fractional derivative // Hindawi Mathematical Problems in Engineering Volume. 2020. Article ID 1680761, 14 pages
https://doi.org/10.1155/2020/1680761
46. *Hilfer R., Luchko Yu.* Disederata for fractional derivatives and integrals // Mathematics. 2019. 7. 149.
https://doi.org/10.3390/math7020149
47. *Вайникко Г.М.* Анализ дискретизационных методов. Тарту: Изд-во Тартуского ун-та, 1976. 161 с.
48. *Вайникко Г.М.* О сходимости квадратурно-разностного метода для линейных интегро-дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1971. Т. 11. № 3. 1971. С. 770–776.
49. *Крейн С.Г., Шаблицкая Л.Н.* Об устойчивости разностных схем для задачи Коши // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1966. Т. 6. № 4. С. 648–664.
50. *Крейн С.Г., Шаблицкая Л.Н.* Необходимые условия устойчивости разностных схем и собственные значения разностных операторов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1973. Т. 13. № 3. С. 647–657.
51. *Гудович Н.Н.* Об абстрактной схеме разностного метода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1966. Т. 6. № 5. С. 916–921.
52. *Гудович Н.Н.* О построении устойчивых разностных схем любого наперед заданного порядка для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1974. Т. 217. № 2. С. 264–267.
53. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 418 с.
54. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. 2-е издание. М.: Наука, 1965. 520 с.