ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 4, с. 616–624

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.958

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

А. П. Солдатов[1,2,3]

[1] *119333 Москва, Вавилова, 44, корп. 2, ФИЦ ИУ РАН, Россия*

[2] *119992 Москва, Воробьевы горы, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Россия*

[3] *111250 Москва, Красноказарменная ул, 14, НИУ МЭИ, Россия*

e-mail: soldatov48@gmail.com

Поступила в редакцию 12.07.2021 г.
Переработанный вариант 12.07.2021 г.
Принята к публикации 16.12.2021 г.

Для эллиптического уравнения четвертого порядка с постоянными вещественными коэффициентами в многосвязной области рассмотрена краевая задача, заключающаяся в задании на границе этой области самой функции и ее нормальной производной третьего порядка. В работе дан критерий фредгольмовости, удобный для использования, и приведена формула индекса этой задачи. Выделены классы уравнений, для которых критерий фредгольмовости особенно упрощается, и подсчитаны точные значения индекса. Библ. 8.

Ключевые слова: эллиптические уравнения, нормальные производные, условие фредгольмовости задачи, формула индекса.

DOI: 10.31857/S0044466922040111

В области D, ограниченной гладким контуром Γ, рассмотрим для эллиптического уравнения

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - \sum_{r=0}^{3} a_r \frac{\partial^4 u}{\partial x^{4-r}\partial y^r} + \sum_{i+j\le 3} a_{ij}\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i \partial y^j} = f \tag{1}$$

с коэффициентами $a_r \in \mathbb{R}$, $a_{ij} \in C^\mu(\overline{D})$, $0 < \mu < 1$, краевую задачу

$$u\big|_\Gamma = f_1, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial n^3}\bigg|_\Gamma = f_2, \tag{2}$$

где $n = n_1 + in_2$ означает единичную внешнюю нормаль. В предположении $\Gamma \in C^{4,\mu}$ оператор задачи ограничен: $C^{4,\mu}(\overline{D}) \to C^\mu(\overline{D}) \times C^{4,\mu}(\Gamma) \times C^{1,\mu}(\Gamma)$. Соответственно, решение ищется в классе $C^{4,\mu}(\overline{D})$ с правыми частями $f \in C^\mu(\overline{D})$, $f_1 \in C^{4,\mu}(\Gamma)$ и $f_2 \in C^{1,\mu}(\Gamma)$. Фредгольмовость и индекс задачи понимаются по отношению к этому оператору.

Эта задача занимает особое место в классе задач этого типа

$$\frac{\partial^{k_1} u}{\partial n^{k_1}}\bigg|_\Gamma = f_1, \quad \frac{\partial^{k_2} u}{\partial n^{k_2}}\bigg|_\Gamma = f_2, \quad 1 \le k_1 < k_2 \le 3,$$

поскольку, как установлено в [1], все остальные задачи фредгольмовы индекса нуль.

В силу эллиптичности характеристический многочлен $z^4 - a_3 z^3 - a_2 z^2 - a_1 z - a_0$ уравнения (1) не имеет вещественных корней. Обозначим через ν_1, ν_2 его корни в верхней полуплоскости, при этом случаи (i) $\nu_1 \ne \nu_2$ различных корней и (ii) $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ кратного корня выделим особо.

С точки зрения общей эллиптической теории (см. [2]) задача (1), (2) фредгольмова в пространстве $C^{4,\mu}(\overline{D})$ тогда и только тогда, когда ее краевые условия удовлетворяют так называемому условию дополнительности (или условию Шапиро–Лопатинского). В этом случае говорят также (см. [3]), что краевые условия (2) накрывают дифференциальный оператор, отвечающий главной части (1). Как показано в [1], в обозначениях

$$\omega(e,\nu) = \frac{e_2 - \nu e_1}{e_1 + \nu e_2}, \quad e = e_1 + ie_2,$$

это условие равносильно тому, что функция

$$H(e) = \begin{cases} [\omega(e,\nu_2)]^3 - [\omega(e,\nu_1)]^3, & \text{(i)} \\ [\omega(e,\nu)]^2, & \text{(ii)} \end{cases} \tag{3}$$

всюду отлична от нуля на единичной окружности $\mathbb{T}$.

Очевидно, в случае кратного корня это условие всегда выполнено и индекс задачи равен нулю. В случае (i) его можно выразить следующим образом.

Лемма 1. *Условие*

$$[\omega(e,\nu_2)]^3 \neq [\omega(e,\nu_1)]^3, \quad e \in \mathbb{T}, \tag{4}$$

равносильно тому, что

$$\nu_1 \neq e^{\pm 2\pi i}\nu_2, \quad a_k^{\pm} = \delta_k^{-1}\left[\sqrt{3}(1-\nu_1\nu_2) \pm \sqrt{\Delta}\right] \notin \mathbb{R}, \quad k = 1,\, 2, \tag{5}$$

где положено

$$\delta_1 = 2i\left(e^{\pi i/3}\nu_1 - e^{-\pi i/3}\nu_2\right), \quad \delta_2 = 2i\left(e^{\pi i/3}\nu_2 - e^{-\pi i/3}\nu_1\right),$$
$$\Delta = 3(\nu_1\nu_2 - 1)^2 + 4\left(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_1\nu_2\right).$$

При выполнении этого условия индекс Коши

$$\frac{1}{2\pi}[\arg H]_{\mathbb{T}} = -2(n+1), \tag{6}$$

где n равно числу точек $a_1^{\pm}$, $a_2^{\pm}$, лежащих в нижней полуплоскости (с учетом их возможных совпадений), и приращение на окружности берется против часовой стрелки.

Доказательство. Запишем

$$H(e) = \prod[\omega(e,\nu_2) - q\omega(e,\nu_1)],$$

где произведение берется по трем корням $q = 1, e^{\pm 2\pi i/3}$ уравнения $q^3 = 1$. В явном виде:

$$H(e) = \frac{(\nu_1 - \nu_2)(e_1^2 + e_2^2)h_1(e)h_2(e)}{(e_1 + \nu_1 e_2)^3(e_1 + \nu_2 e_2)^3},$$

где $h_k(e) = (\nu_1 - q\nu_2)e_2^2 + (1-q)(1-\nu_1\nu_2)e_1e_2 - (\nu_2 - q\nu_1)e_1^2$ и $q = e^{2\pi i/3}$ для $k = 1$, $q = e^{-2\pi i/3}$ для $k = 2$.

В частности, первое условие в (5) непосредственно следует из (4) при $e_2 = 0$. Поскольку $q^2 + q + 1 = 0$, то можно записать

$$h_k(e) = (\nu_1 - q\nu_2)\left(e_2 - z_k^+ e_1\right)\left(e_2 - z_k^- e_1\right), \quad k = 1,\, 2,$$

с корнями

$$z_k^{\pm} = \frac{(q-1)(1-\nu_1\nu_2) \pm \sqrt{-q\Delta}}{2(\nu_1 - q\nu_2)}.$$

Так как $e^{\pm 2\pi i/3} - 1 = \pm i\sqrt{3}e^{\pm\pi i/3}$, отсюда $z_1^{\pm} = a_2^{\pm}$, ł, $z_2^{\pm} = a_1^{\mp}$. Итак, при выполнении первого условия в (5) имеем равенство

$$H(e) = c\,\frac{\left(e_1^+ e_2^2\right)\left(e_2 - a_1^+ e_1\right)\left(e_2 - a_2^+ e_1\right)\left(e_2 - a_1^- e_1\right)\left(e_2 - a_2^- e_1\right)}{(e_1 + \nu_1 e_2)^3(e_1 + \nu_2 e_2)^3} \tag{7}$$

с некоторым $c \neq 0$, которое приводит к эквивалентности условий (4) и (5).

Обратимся ко второму утверждению леммы. Функция H четна, и потому

$$\frac{1}{2\pi}[\arg H]_{\mathbb{T}} = \frac{1}{\pi}[\arg H]_{\mathbb{T}^+}, \tag{8}$$

где $\mathbb{T}^+$ есть правая полуокружность. С другой стороны, отображение $e = e_1 + ie_2 \to t = e_2/e_1$ осуществляет гомеоморфизм этой полуокружности на расширенную вещественную прямую $\overline{\mathbb{R}}$, причем обход ее от точки $e = -i$ к $e = i$ против часовой стрелки соответствует движению на прямой в положительном направлении. Согласно (7) имеем соотношение $H(e) = cR(e_2/e_1)$ с некоторой ненулевой постоянной c и рациональной функцией

$$R(\zeta) = \frac{(\zeta^2+1)(\zeta - a_1^+)(\zeta - a_2^+)(\zeta - a_1^-)(\zeta - a_2^-)}{(1+\nu_1\zeta)^3(1+\nu_2\zeta)^3},$$

полюса $-1/\nu_k$ которой лежат в верхней полуплоскости. Поэтому на основании принципа аргумента, примененного к аналитической функции R в нижней полуплоскости, приходим к равенству

$$\frac{1}{2\pi}[\arg H]_{\mathbb{T}^+} = \frac{1}{2\pi}[\arg R]_{\mathbb{R}} = -(n+1),$$

где учтено, что положительное направление вещественной прямой оставляет эту полуплоскость слева. Совместно с (8) отсюда следует формула (6), что завершает доказательство леммы.

Теорема 1. *Пусть контур $\Gamma \in C^{4,\mu}$ состоит из связных компонент $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$, причем Γ_0 охватывает все остальные контуры, и условие* (4) *фредгольмовости задачи* (1), (2) *выполнено.*

Тогда ее индекс æ дается формулой

$$æ = 4(1-s)n, \tag{9}$$

где $n = 0$ в случае (ii)*, и n определяется леммой* 1 *в случае* (i).

Доказательство опирается на общие результаты (см. [1], [4], [5]) о фредгольмовости и индексе задач для эллиптических уравнений $2l$-го порядка с l краевыми условиями типа (2). Для односвязных областей D эти вопросы подробно исследованы в [1], [4], в частности, равенство (9) согласуется с формулой индекса, данной в этих статьях. Случаю многосвязной области посвящена работа [5], однако доказательство ее основной теоремы содержит пробел, который привел к ошибочной формуле индекса. Поэтому, следуя рассуждениям указанных работ, приведем полное доказательство применительно к рассматриваемой задаче (1), (2), восполняющее этот пробел.

В соответствии с леммой 1 достаточно убедиться, что

$$æ = \begin{cases} 2(s-1)(æ_0+2), & \text{(i)} \\ 0, & \text{(ii)} \end{cases} \tag{10}$$

где $æ_0$ означает левую часть (6).

Для функции $\varphi \in C^1(\Gamma)$ положим

$$d\varphi = \varphi' + m^0\varphi, \quad \left(m^0\varphi\right)\Big|_{\Gamma_i} = \frac{1}{|\Gamma_i|}\int_{\Gamma_i}\varphi(t)d_1t,$$

где штрих указывает на дифференцирование по параметру длины дуги, $|\Gamma_i|$ есть длина контура Γ_i, и d_1t означает элемент длины дуги. Видно, что оператор d обратим: $C^k(\Gamma) \to C^{k-1}(\Gamma)$, причем $d^k\varphi = \varphi^{(k)} + m^0\varphi$. Следовательно, краевое условие (2) можно заменить равносильным ему

$$d^3u^+ = d^3f_1, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial n^3}\Big|_{\Gamma} = f_2, \tag{2)'$$

где знак + указывает на граничное значение функции u. Очевидно,

$$d^3u^+ = \left[\left(e_1\frac{\partial}{\partial x} + e_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u + \sum_{i+j=1,2} b_{ij}\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i \partial y^j}\right]\Bigg|_\Gamma + m^0\left(u^+\right)$$

с некоторыми $b_{ij} \in C^{1,\mu}(\Gamma)$, где $e(t) = in(t)$ означает единичный касательный вектор к контуру Γ в точке t. В явном виде $2b_{20} = 3\left(e_1^2\right)'$, $2b_{02} = 3\left(e_2^2\right)'$, $b_{11} = 3(e_1e_2)'$ и $b_{10} = e_1^{(2)}$, $b_{01} = e_2^{(2)}$.

Очевидно, операторы

$$u \to \frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i \partial y^j}, \quad i + j \le 3,$$

компактны $C^{4,\mu}\left(\bar{D}\right) \to C^{\mu}\left(\bar{D}\right)$, а операторы

$$u \to \left(\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i \partial y^j}\right)^+, \quad i + j = 1, 2,$$

компактны $C^{4,\mu}\left(\bar{D}\right) \to C^{1,\mu}(\Gamma)$.

Поэтому вместе с (1), (2)' задача

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - \sum_{r=0}^{3} a_r \frac{\partial^4 u}{\partial x^{4-r}\partial y^r} = f, \tag{1''}$$

$$\left[\left(e_1\frac{\partial}{\partial x} + e_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u\right]\Bigg|_\Gamma = f_1^0, \quad \left[\left(n_1\frac{\partial}{\partial x} + n_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u\right]\Bigg|_\Gamma = f_2^0 \tag{2''}$$

также фредгольмова и ее индекс равен æ.

Зафиксируем точку $z_0 \in D$ и обозначим $\tilde{C}^{4,\mu}\left(\bar{D}\right)$ подпространство всех функций $u \in C^{4,\mu}\left(\bar{D}\right)$, обращающихся в точке в нуль вместе с частными производными до порядка 3 включительно. Очевидно, оно замкнуто и его коразмерность, т.е. размерность фактор-пространства $C^{4,\mu}/\tilde{C}^{4,\mu}$, равна 6. Поэтому в силу известных свойств фредгольмовых операторов (см. [6]) задача (1)'', (2)'' фредгольмова в классе $\tilde{C}^{4,\mu}\left(\bar{D}\right)$ и ее индекс

$$\tilde{æ} = æ - 6. \tag{11}$$

Каждой функции $u \in \tilde{C}^{4,\mu}\left(\tilde{D}\right)$ поставим в соответствие вектор $\mathcal{D}u = U$, составленный из частных производных третьего порядка:

$$U_j = \frac{\partial^3 u}{\partial^{4-j}x\partial^{j-1}y}, \quad 1 \le j \le 4.$$

Очевидно, оператор $\mathcal{D}$ взаимно однозначен на $\tilde{C}^{4,\mu}(\bar{D})$ и его образ $\tilde{X}$ содержится в замкнутом подпространстве $X \subseteq \left[C^{1,\mu}(\bar{D})\right]^4$, выделяемом условием

$$\frac{\partial U_j}{\partial y} = \frac{\partial U_{j+1}}{\partial x}, \quad 1 \le j \le 4. \tag{12}$$

Утверждается, что подпространство $\tilde{X}$ замкнуто в X и имеет конечную коразмерность, равную

$$\dim(X/\tilde{X}) = 6s. \tag{13}$$

Действительно, в любой односвязной подобласти $D_0 \subseteq D$, содержащей точку z_0, уравнение $\mathcal{D}u = U$ с правой частью $U \in X$ всегда разрешимо, и его решение определяется последовательным интегрированием вдоль дуги, соединяющей произвольную точку $z \in D_0$ с z_0. Например, для $l = 1$

$$u(z) = \int_{z_0}^{z} U_1 dx + U_2 dy.$$

Аналогично, для $l = 2$ следует положить

$$u_{1,j}(z) = \int_{z_0}^{z} U_j dx + U_{j+1} dy, \quad 1 \le j \le 3,$$

$$u_{2,j}(z) = \int_{z_0}^{z} u_{1,j} dx + u_{2,j+1} dy, \quad j = 1, 2; \quad \left(\mathcal{D}^{(-1)} U\right)(z) = \int_{z_0}^{z} u_{2,1} dx + u_{2,2} dy$$

и т.д.

По отношению к исходной области D решением уравнения $\mathcal{D}u = U$ с правой частью $U \in X$ служит многозначная функция u, принадлежащая классу $C^{4,\mu}$ в односвязных подобластях D_0. При обходе контура Γ_j, $1 \le j \le s$, она получает приращение в виде некоторого многочлена $p_j \in P_2$ степени не выше двух. Этот факт можно выразить следующим образом. Соединим внутри $D \backslash \{z_0\}$ контура Γ_0 и Γ_j, $1 \le j \le s$, дугой L_j, считая эти дуги попарно непересекающимися. Тогда в области $D_0 = D \backslash (L_1 \cup \ldots \cup L_n)$ решение u рассматриваемого уравнения однозначно. Предполагая дуги L_j ориентируемыми, для односторонних предельных значений $u_j^{\pm}$ на L_j функции u будем иметь соотношения

$$u_j^+ - u_j^- = p_j\big|_{L_j}, \quad 1 \le j \le n,$$

с некоторыми p_j, причем аналогичные соотношения выполняются и для частных производных функций u и p_j до порядка $k - 1$ включительно. Очевидно, отображение $U \to (p_1, \ldots, p_n)$ переводит пространство $\tilde{X}$ на все P_2^s, и класс $\mathscr{X}_0$ описывается условиями $p_1 = \ldots = p_n = 0$ в этих соотношениях. Поскольку $\dim P_2 = 6$, отсюда следует равенство (13).

По отношению к вектору $U = \mathcal{D}u$ задача (1)'', (2)'' может быть переписана в эквивалентной форме

$$\frac{\partial U}{\partial y} - A \frac{\partial U}{\partial x} U = f^1, \quad CU^+ = f^0, \tag{14}$$

с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \end{pmatrix},$$

где элементы $C_{ij}(t)$, $t \in \Gamma$, определяются из соотношений

$$\sum_{k=1}^{4} C_{1k}(t) z^{k-1} = [e_1(t) + e_2(t) z]^3, \quad \sum_{k=1}^{4} C_{2k}(t) z^{k-1} = [e_2(t) - e_1(t) z]^3,$$

и положено $f^1 = (0, 0, 0, f), f^0 = (f_1^0, f_1^0)$. В этой связи введем подпространство $Y \subseteq \left[C^{\mu}\left(\bar{D}\right)\right]^4$ векторов f^1, первые три компоненты которых равны нулю. Заметим, что прообраз

$$L^{-1}(Y) = X, \tag{15}$$

где для краткости

$$L = \frac{\partial}{\partial y} - A\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Задачу Римана–Гильберта (14) для эллиптической системы первого порядка, рассматриваемую во всем классе $\left[C^{1,\mu}\left(\bar{D}\right)\right]^4$, обозначим через R, символ R сохраняем и для ее оператора, действующего $\left[C^{1,\mu}\left(\bar{D}\right)\right]^4 \to \left[C^{\mu}\left(\bar{D}\right)\right]^4 \times \left[C^{1,\mu}(\Gamma)\right]^2$. Символы $R_{\tilde{X}}$ и R_X указывают на эту задачу в соответствующих классах, причем ее операторы действуют из этих классов в $Y \times \left[C^{1,\mu}(\Gamma)\right]^2$.

Поскольку задача $R_{\tilde{X}}$ равносильна задаче (9), (10), то она фредгольмова и ее индекс равен $\tilde{æ}$. Поэтому на основании (13) задача R_X также фредгольмова и ее индекс

$$\operatorname{ind} R_X = \operatorname{ind} R_{\tilde{X}} + 6s.$$

Совместно с (11) отсюда

$$æ = \operatorname{ind} R_X + 6(1-s). \tag{16}$$

К задаче R, рассматриваемой во всем классе $\left[C^{1,\mu}\left(\bar{D}\right)\right]^4$, можно применить результаты [7]. С этой целью введем 4×2-матрицу B с элементами

$$\begin{matrix} B_{k,1} = \nu_1^{k-1}, \quad B_{k,2} = \nu_2^{k-1}, \qquad \text{(i)} \\ B_{k,1} = \nu^{k-1}, \quad B_{k,2} = (k-1)\nu^{k-2}, \quad \text{(ii)} \end{matrix} \qquad 1 \le k \le 4.$$

Составленная с помощью нее квадратная матрица $\tilde{B} = (B\bar{B})$ обратима и приводит матрицу A к жордановой форме

$$\tilde{B}^{-1}A\tilde{B} = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & \bar{J} \end{pmatrix},$$

где

$$\text{(i)} \quad J = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii)} \quad J = \begin{pmatrix} \nu & 1 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях на основании теоремы 2 из [7] задача R фредгольмова в классе $C^{1,\mu}\left(\bar{D}\right)$ тогда и только тогда, когда

$$\det C(t)B \ne 0, \quad t \in \Gamma, \tag{18}$$

и ее индекс дается формулой

$$\operatorname{ind} R = -\sum_{j=0}^{s} \frac{1}{\pi}[\arg\det(CB)]_{\Gamma_j} + 2(1-s), \tag{19}$$

где приращение вдоль Γ_j берется в направлении, оставляющем область D слева.

Из определений матриц C и B видно, что

$$CB = \begin{pmatrix} (e_1 + e_2\nu_1)^3 & (e_1 + e_2\nu_2)^3 \\ (e_2 - e_1\nu_1)^3 & (e_2 - e_1\nu_2)^3 \end{pmatrix}, \tag{i}$$

$$CB = \begin{pmatrix} (e_1 + e_2\nu)^3 & 3e_2(e_1 + e_2\nu)^2 \\ (e_2 - e_1\nu)^3 & -3e_1(e_2 - e_1\nu)^2 \end{pmatrix}, \tag{ii}$$

так что в обозначениях (3) имеем соотношение

$$\det[C(t)B] = \begin{cases} (e_1 + e_2\nu_1)^3(e_1 + e_2\nu_2)^3 H[e(t)], & \text{(i)} \\ -3(e_1 + e_2\nu)^4 H[e(t)], & \text{(ii)} \end{cases} \quad t \in \Gamma.$$

В частности, на основании (5) условие (18) выполнено, так что задача R фредгольмова.

Когда точка t обходит простой контур Γ_j в положительном направлении, единичный вектор $e(t)$ обходит окружность $\mathbb{T}$ против часовой стрелки при $j = 0$ и по часовой стрелке при $1 \le j \le s$. Поэтому при $\operatorname{Im} z > 0$ имеем равенство

$$\frac{1}{2\pi}[\arg(e_1 + ze_2)]\big|_\Gamma = 1 - s$$

и в обозначениях (8) аналогичным образом

$$\frac{1}{2\pi}\arg H[e(t)]\Big|_\Gamma = 1 - s,$$

так что формула (19) принимает следующий вид:

$$\operatorname{ind} R = \begin{cases} -2(1-s)(æ_0 + 5), & \text{(i)} \\ -2(1-s)(æ_0 + 3). & \text{(ii)} \end{cases} \tag{20}$$

Утверждается, что индексы задач R и R_X совпадают:

$$\operatorname{ind} R = \operatorname{ind} R_X. \tag{21}$$

В самом деле, в силу (15) пространство решений однородных задач R_X и R совпадают. С другой стороны, условия разрешимости неоднородной задачи R достаточны и для разрешимости неоднородной задачи R_X. Поэтому остается убедиться, что в действительности они и необходимы. Запишем необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородной задачи R в виде $p_i^1 f^1 + p_i^0 f^0 = 0$, $1 \le i \le s$, где линейные функционалы p_i^0 и p_i^1 непрерывны на $\left[C^{1,\mu}(\Gamma)\right]^2$ и $\left[C^\mu(\overline{D})\right]^4$ соответственно, и пары $p_i = \left(p_i^1, p_i^0\right)$ линейно независимы. Необходимо показать, что они линейно независимы и как функционалы на $Y \times \left[C^{1,\mu}(\Gamma)\right]^2$.

Предположим противное, т.е. найдется некоторая ненулевая линейная комбинация этих функционалов с коэффициентами α_i, равная нулю на $Y \times \left[C^{1,\mu}(\Gamma)\right]^2$. В частности,

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i p_i^0 = 0. \tag{22}$$

Пусть вектор-функция $f^1 \in \left[C^\mu(\overline{D})\right]^4$, продолжим ее до вектор-функции φ с компактным носителем из того же класса C^μ и положим

$$U(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} (t - z)_A^{-1}\varphi(t)d_2t, \qquad z \in \mathbb{C},$$

где d_2t означает элемент площади. Легко проверяется, что при дополнительном условии $\varphi \in C^1$, функция $U = T\varphi$ также непрерывно дифференцируема и удовлетворяет неоднородной системе $Lu = \varphi$. В действительности, этот факт справедлив и для функций φ, локально удовлетворяющих условию Гельдера (см., например, [8, лемма 3.4.2]). Таким образом, в области D вектор-функция U является решением задачи R с правой частью f^1 и $f^0 = CU^+$. Поэтому $p_i^1\left(f^1\right) + p_i^0\left(f^0\right) = 0$, $1 \le i \le s$, так что с учетом (22)

$$\left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i p_i^1\right)\left(f^1\right) = 0.$$

Поскольку вектор-функция f^1 была выбрана произвольно, совместно с (22) отсюда заключаем, что система функционалов p_i линейно зависима, что невозможно. Тем самым равенство (21) установлено.

Объединяя равенства (20), (21) с (16), приходим к справедливости формулы (10), завершающей доказательство теоремы.

Для некоторых классов уравнений (1) в условиях теоремы 1 критерий фредгольмовости задачи (2) упрощается, и в формуле (9) ее индекса число n подсчитывается явно.

Теорема 2. (а) *При* $|\nu_1| = |\nu_2| = 1$ *условие* (4) *равносильно*

$$|\nu_1 - \nu_2| \neq \sqrt{3}, \tag{23а}$$

и в формуле (9) *число* $n = 0$ *при* $|\nu_1 - \nu_2| < \sqrt{3}$ *и* $n = 2$ *при* $|\nu_1 - \nu_2| > \sqrt{3}$.

(б) *При* $\nu_1 = i\rho_1, \nu_2 = i\rho_2$ *условие* (4) *равносильно*

$$|\rho_1 - \rho_2| \neq \sqrt{3}(1 + \rho_1\rho_2), \tag{23б}$$

и в формуле (9) *число* $n = 0$ *при* $|\rho_1 - \rho_2| < \sqrt{3(1 + \rho_1\rho_2)}$ *и* $n = 2$ *при* $|\rho_1 - \rho_2| > \sqrt{3}(1 + \rho_1\rho_2)$.

(в) *При* $\nu_1 = \nu, \nu_2 = -1/\nu$ *условие* (4) *равносильно*

$$4\,\mathrm{Im}\,\nu \neq |\nu|^2 + 1 \tag{23в}$$

и в формуле (9) *число* $n = 0$ *при* $4\,\mathrm{Im}\,\nu < |\nu|^2 + 1$ *и* $n = 2$ *при* $4\,\mathrm{Im}\,\nu > |\nu|^2 + 1$.

Доказательство достаточно провести для случая (ii) различных корней ν_k, в котором можно воспользоваться леммой 1.

(а) Положим $\nu_k = e^{\theta_k}$, и пусть для краткости

$$\theta_{(1)} = \frac{\pi}{3} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}, \quad \theta_{(2)} = \frac{\pi}{3} + \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}, \quad \theta_\pm = \theta_1 \pm \theta_2.$$

Тогда в обозначениях (6)

$$\delta_k = -4\sin\theta_{(k)} e^{i\theta_+/2}, \quad 1 - \nu_1\nu_2 = -2i\sin(\theta_+/2)e^{i\theta_+/2},$$

и $\Delta = e^{i\theta_+}\left[-12\sin^2(\theta_+/2) + 8\cos\theta_- + 4\right]$. Заметим, что условие (23а), которое можно записать в форме первого условия в (5), равносильно $0 < |\theta_{(k)}| < \pi$. Поэтому при выполнении этого условия можем записать

$$a_k^\pm = [4\sin\theta_{(k)}]^{-1}\left(ib \mp \sqrt{c - b^2}\right),$$

где положено $b = 2\sqrt{3}\sin(\theta_+/2)$, $c = 4(2\cos\theta_- + 1)$. Таким образом,

$$[4\sin\theta_{(k)}]\left(\mathrm{Im}\,a_k^\pm\right) = \begin{cases} b, & c \geq b^2, \\ b \mp \sqrt{b^2 - c}, & b^2 > c. \end{cases} \tag{24}$$

Заметим, что число c имеет одинаковый знак с разностью $\pi/3 - |\theta_1 - \theta_2|$. В частности, второе условие в (5) равносильно $c \neq 0$, что, в свою очередь, эквивалентно (23а).

Что касается подсчета n в лемме 1, то при $|\theta_2 - \theta_1| < \pi/2$ числа $\sin\theta_{(k)}$, $k = 1, 2$, и c положительны. Поэтому согласно (24) все точки $a_k^\pm$ лежат в верхней полуплоскости и, значит, $n = 0$. При $|\theta_2 - \theta_1| > \pi/2$ числа $\sin\theta_{(k)}$, $k = 1, 2$, имеют противоположные знаки. Поскольку знак левой части (24) не зависит от $k = 1, 2$, четыре точки $a_k^\pm$ распределены поровну в верхней и нижней полуплоскостях, т.е. $n = 2$.

(б) В этом случае первое условие в (5) очевидным образом выполнено, и

$$\delta_k a_k^\pm = \sqrt{3}(1 + \rho_1\rho_2) \pm \sqrt{\Delta}, \quad k = 1, 2,$$

по отношению к вещественным числам $\delta_k = (-1)^k(\rho_1 - \rho_2) - i\sqrt{3}(\rho_1 + \rho_2)$ и $\Delta = 3(1+\rho_1\rho_2)^2 - 4(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_1\rho_2)$. В частности,

$$\operatorname{Im} a_k^{\pm} > 0 \quad \text{при} \quad \Delta \geq 0, \quad k = 1, 2. \tag{25}$$

Пусть далее $\Delta < 0$. Тогда

$$\left|\rho_k^2\right| \operatorname{Im} a_k^{\pm} = \pm(-1)^k(\rho_1 - \rho_2)\sqrt{-\Delta} + 3(\rho_1 + \rho_2)(1 + \rho_1\rho_2), \quad k = 1, 2.$$

Поэтому (5) равносильно

$$\beta = 9(\rho_1 + \rho_2)^2(1 + \rho_1\rho_2)^2 + (\rho_1 - \rho_2)^2\Delta \neq 0, \tag{26}$$

причем

$$\operatorname{Im} a_k^{\pm} > 0 \quad \text{при} \quad \beta > 0, \quad k = 1, 2; \quad \pm(-1)^k(\rho_1 - \rho_2)\left(\operatorname{Im} a_k^{\pm}\right) > 0 \quad \text{при} \quad \beta < 0. \tag{27}$$

Поскольку

$$\beta = 4\left(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_1\rho_2\right)\left[3(1+\rho_1\rho_2)^2 - (\rho_1 - \rho_2)^2\right],$$

условие (26) равносильно (23б), и соотношения (25), (27) приводят к соответствующим значениям числа n леммы 1.

(в) В этом случае первое условие в (5) также выполнено. Что касается второго условия, то по отношению к ν оно записывается довольно громоздко. Однако этот случай подробно разобран в [1, теорема 3]. Именно, условие (4) равносильно тому, что точка $z_0 = e^{\pi i/6}$ не принадлежит окружности $\Gamma_0(\nu)$, определяемой уравнением $\left(|z|^2 + 1\right)(\operatorname{Im}\nu) = \left(|\nu|^2 + 1\right)(\operatorname{Im} z)$, т.е. должно выполняться условие $|\nu|^2 + 1 \neq 4\operatorname{Im}\nu$. При этом имеет место равенство (6) с

$$n = \begin{cases} 0, & |\nu|^2 + 1 < 4\operatorname{Im}\nu, \\ 2, & |\nu|^2 + 1 > 4\operatorname{Im}\nu, \end{cases}$$

что на основании (10) завершает доказательство (в) и теоремы.

Заметим, что для $\nu = i\rho$, $\rho > 1$, условие (23в) теоремы согласуется с (23б). В самом деле, в этом случае уравнение $\rho^2 + 1 = 4\rho$ дает корень $\rho = 2 + \sqrt{3}$. С другой стороны, этот же корень дает и уравнение $\rho - 1/\rho = 2\sqrt{3}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Солдатов А.П.* О фредгольмовости и индексе обобщенной задачи Неймана // Дифференц. ур-ния. 2020. Т. 56. № 2. С. 217–225.
2. *Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991. 336 с.
3. *Лионс Ж.Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
4. *Кошанов Б.Д., Солдатов А.П.* Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения на плоскости // Дифференц. ур-ния. 2016. Т. 52. № 12. С. 1666–1681.
5. *Солдатов А.П.* Об одной краевой задаче для эллиптического уравнения на плоскости в многосвязной области // Владикавказ. матем. журн. 2017. Т. 19. Вып. 3. С. 51–58.
6. *Пале Р.* Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе. М.: Мир, 1970.
7. *Солдатов А.П., Чернова О.В.* Задача Римана–Гильберта для эллиптических систем первого порядка на плоскости с постоянными старшими коэффициентами // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обз. 149. С. 95–102.
8. *Солдатов А.П.* Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. Современная математика // Фундамент. направления. 2016. Т. 63. С. 1–179.