ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 5, с. 768–776

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.977

РЕКОНСТРУКЦИЯ ВХОДНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ ВКЛЮЧЕНИИ, НЕРАЗРЕШЕННОМ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

 В. И. Максимов

620990 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, Институт математики и механики УрО РАН, Россия

e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 03.06.2021 г.
Переработанный вариант 03.06.2021 г.
Принята к публикации 16.12.2021 г.

Рассматривается задача реконструкции распределенных входных воздействий в параболических включениях, неразрешенных относительно производной. Указывается алгоритм решения задачи, который является устойчивым к информационным помехам и погрешностям вычислений. Алгоритм основан на комбинации методов теории некорректных задач и теории позиционного управления. Он позволяет осуществить процесс реконструкции неизвестных входных воздействий на основе неточных измерений решений включений в дискретные достаточно частые моменты времени. Библ. 18.

Ключевые слова: динамическое восстановление, метод управляемых моделей.

DOI: 10.31857/S0044466922040093

1. ВВЕДЕНИЕ

Обсуждается проблема реконструкции распределенных входных воздействий в параболических включениях, неразрешенных относительно производной. Суть проблемы такова. Имеется параболическое включение. Эволюция его фазового состояния, т.е. решение включения, порождается неизвестным входным воздействием. Само решение априори не задано. Требуется организовать процесс реконструкции (восстановления) входа при условии, что в дискретные (достаточно частые) моменты неточно измеряется решение. Указанная выше проблема относится к классу обратных задач динамики и в более общем контексте вкладывается в проблематику теории некорректных задач [1]–[5]. Один из методов исследования подобных задач, основанный на идеях теории позиционного управления [6] и теории некорректных задач [2], был развит в работах [7]–[14]. Суть этого метода состоит в том, что алгоритм реконструкции представляется в виде алгоритма управления некоторой вспомогательной динамической системой – моделью. Управление в модели конструируется на основе текущих измерений решения таким образом, что его реализация во времени приближает неизвестное входное воздействие. В данной статье, продолжающей [7]–[14], указывается алгоритм решения указанной выше проблемы, являющийся устойчивым к информационным и вычислительным помехам. При этом рассматривается случай отсутствия “мгновенных” ограничений на входные воздействия. Другие алгоритмы динамического восстановления “неограниченных” управлений в распределенных системах, основанные на принципе обратной связи, см. в работах [12]–[14], в которых приведена достаточно обширная библиография.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассматривается включение следующего вида:

$$\begin{gathered}\beta(y(t,\eta))_t - \Delta y(t,\eta) \ni u(t,\eta), \quad (t,\eta)\in T\times\Omega,\\ y(t,\sigma) = 0, \quad (t,\sigma)\in T\times\Gamma,\\ y(0,\eta) = y_0(\eta) \quad \eta\in\Omega.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь $T = [0,\vartheta]$ – промежуток времени, $\vartheta = \mathrm{const} \in (0,+\infty)$, Ω – область в пространстве $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей Γ, Δ – оператор Лапласа, $\beta(\cdot) : R \to R$ – максимально монотонный граф со свойствами: $0 \in \beta(0)$, для некоторого $\omega > 0$ верно неравенство

$$(\beta(r) - \beta(s))(r - s) \geq \omega|r - s|^2 \quad \forall r, s \in R, \tag{2.2}$$

отображение β переводит ограниченные множества в ограниченные множества.

Заметим, что в виде включения (2.1) может быть формализована двухфазная задача Стефана (см., например, [15]–[17]). При этом

$$\beta(r) = \begin{cases} c_1 r, & r < 0, \\ [0, c_2], & r = 0, \\ c_3 r + c_2, & r > 0. \end{cases}$$

Следуя [17], [18], пару функций $\{y(\cdot), v(\cdot)\}$, $y(\cdot) = y(\cdot; v_0, u(\cdot))$, $v(\cdot) = v(\cdot; v_0, u(\cdot))$, удовлетворяющую соотношениям

$$\begin{gathered} v_t(t,\eta) - \Delta y(t,\eta) = u(t,\eta), \quad (t,\eta) \in T \times \Omega, \\ y(t,\sigma) = 0, \quad (t,\sigma) \in T \times \Gamma, \\ v(t,\eta) \in \beta(y(t,\eta)), \quad (t,\eta) \in T \times \Omega, \\ v(0,\eta) = v_0(\eta) \in \beta(y_0(\eta)), \quad \eta \in \Omega, \end{gathered} \tag{2.3}$$

назовем *решением включения* (2.1), если эти функции таковы

$$\begin{gathered} y(\cdot) \in W^{1,2}(T; H) \cap L_2(T; V), \\ v(\cdot) \in W^{1,2}(T; V^*) \cap L_\infty(T; H). \end{gathered}$$

Здесь $H = L_2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$, $V^* = H^{-1}(\Omega)$. Скалярные произведения в последних двух пространствах определяются следующим образом:

$$(x, y)_V = \int_\Omega \{x(\eta)y(\eta) + \nabla x(\eta)\nabla y(\eta)\} d\eta \quad \forall x, y \in V,$$

$$(x, y)_{V^*} = -\left\langle \Delta^{-1} x, y \right\rangle_{V \times V^*} \quad \forall x, y \in V^*,$$

где символ $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V \times V^*}$ означает двойственность пространств V и V^*, а оператор Δ действует из $H_0^1(\Omega)$ в $H^{-1}(\Omega)$ (канонический изоморфизм $H_0^1(\Omega)$ на $H^{-1}(\Omega)$).

На протяжении всей статьи мы будем пользоваться известным свойством троек Гельфанда, которое состоит в следующем: двойственность между пространствами V и V^* эквивалентна скалярному произведению в пространстве H:

$$(u, v)_H = \langle v, u \rangle_{V \times V^*} \quad \forall u \in H \subset V^*, \quad v \in V \subset H.$$

Имеет место

Теорема 1 (см. [16, с. 152]). *Пусть* $\eta \to v_0(\eta) \in L_2(\Omega)$, $y_0(\eta) = \beta^{-1}(v_0(\eta)) \in H_0^1(\Omega)$. *Тогда для любого* $u(\cdot) \in L_2(T; H)$ *существует единственное решение включения* (2.1).

Заметим, что при выполнении условия (2.2) отображение β^{-1} однозначно и липшицево. Поэтому будем полагать, что функция $y_0(\eta)$ удовлетворяет условию теоремы 1.

Обсуждаемая в данной статье задача такова. На промежутке времени T реализуется решение включения (2.1), порождаемое неизвестным входным воздействием $u(\cdot) \in L_2(T; H)$. Промежуток T разбит на конечное число полуинтервалов $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \in [0 : m-1]$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$, $\tau_0 = 0$, $\tau_m = \vartheta$. В узлах разбиения $\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$, измеряются (приближенно) величины $v(\tau_i)$, т.е. находятся элементы $\xi_i^h \in V^*$ со свойствами:

$$\left| v(\tau_i) - \xi_i^h \right|_{V^*} \leq h. \tag{2.4}$$

Здесь $h \in (0, 1)$ – величина погрешности измерения. Решение включения (2.1) неизвестно. Задача состоит в приближенном восстановлении $u(\cdot)$ на основе неточного измерения $v(\tau_i)$.

Для решения сформулированной выше задачи воспользуемся методом вспомогательных позиционно-управляемых моделей [6]–[10]. Согласно этому методу задача реконструкции неизвестного входного воздействия по результатам измерения решения заменяется другой задачей, а именно задачей позиционного управления вспомогательной системой, называемой *моделью*. Таким образом, задача восстановления функции $u(\cdot)$ сводится к следующим двум задачам:

1) задаче выбора вспомогательной модели;

2) задаче формирования управления моделью по принципу обратной связи.

В работе (см. [10, гл. I]) было отмечено, что для достаточно широкого класса систем с распределенными параметрами в качестве моделей удобно брать "копии" реальных систем. Оказывается, что и в нашей ситуации в качестве модели можно брать "копию" включения (2.1), которая имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} w_t^h(t,\eta) - \Delta z^h(t,\eta) = u^h(t,\eta), \quad (t,\eta) \in T \times \Omega, \\ z^h(t,\sigma) = 0, \quad (t,\sigma) \in T \times \Gamma, \\ w^h(t,\eta) \in \beta(z^h(t,\eta)), \quad (t,\eta) \in T \times \Omega, \\ w^h(0,\eta) = v_0(\eta) \in \beta(y_0(\eta)), \quad \eta \in \Omega. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Здесь $u^h(\cdot)$ – управление, закон формирования которого требуется сконструировать. Решение модели (2.5) определяется аналогично решению уравнения (2.1) (см. (2.3)).

Закон формирования управления в модели $u^h(\cdot)$ (при каждом $h \in (0, 1)$) отождествим с парой $S_h = (\Delta_h, \mathcal{U}_h)$, где

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}$$

есть разбиение отрезка T на полуинтервалы $[\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$, $\tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta$, $\delta = \delta(h)$, $\tau_{h,0} = 0$, $\tau_{h,m_h} = \vartheta$, $\mathcal{U}_h$ – отображение, ставящее в соответствие каждой тройке $p_i^h = \{\tau_i, \xi_i^h, w^h(\tau_i)\}$ элемент

$$v_i^h = \mathcal{U}_h(p_i^h) \in H. \tag{2.6}$$

При этом управление $u^h(\cdot)$ в правой части включения (2.5) определяется по правилу

$$u^h(t) = v_i^h, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}). \tag{2.7}$$

3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Опишем алгоритм решения рассматриваемой задачи. Фиксируем некоторую функцию $\alpha = \alpha(h) : (0, 1) \to (0, 1)$, $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Отображение $\mathcal{U}_h$ зададим следующим образом:

$$\mathcal{U}_h(p_i^h) = \arg\min\left\{2(\Delta^{-1}(w^h(\tau_i) - \xi_i^h), u)_H + \alpha|u|_H^2 : u \in H\right\} = \alpha^{-1}\Delta^{-1}(\xi_i^h - w^h(\tau_i)), \tag{3.1}$$

где $\alpha = \alpha(h)$.

После того как модель M и семейство $S_h = (\Delta_h, \mathcal{U}_h)$ выбраны, работу алгоритма восстановления $u(\cdot)$ осуществляем по следующей схеме. До начального момента фиксируем погрешность h, число $\alpha = \alpha(h)$ и разбиение $\Delta = \Delta_h = \{\tau_i\}_{i=0}^m$, $(\tau_i = \tau_{h,i}$, $m = m_h)$ отрезка T с шагом $\delta = \delta(h)$. На i-м шаге алгоритма, осуществляемом на промежутке времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$, выполняем следующие операции. Сначала измеряем (с ошибкой) фазовое состояние $v(\tau_i)$, т.е. находим элемент $\xi_i^h \in V^*$ со свойством (2.4). Затем, зная $w^h(\tau_i)$ и ξ_i^h, по правилу (2.6), (2.7), (3.1) определяем управление в модели (2.5). После этого вместо траектории $w^h(t)$, $z^h(t)$, $t \in [0, \tau_i]$, формируем фазовую траекторию $w^h(t)$, $z^h(t)$, $t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$, т.е. осуществляем корректировку памяти.

Прежде, чем перейти к доказательству основных утверждений работы, приведем одну теорему, которая нам понадобится в дальнейшем.

Теорема 2 (см. [17, предложение 1.3, с. 125]). *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда*

$$y(\cdot; y_0, v_0, u_j(\cdot)) \to y(\cdot; y_0, v_0, u(\cdot)) \quad \text{в} \quad C(T; H),$$

$$v(\cdot; y_0, v_0, u_j(\cdot)) \to v(\cdot; y_0, v_0, u(\cdot)) \quad \text{в} \quad C(T; V^*),$$

если $u_j(\cdot) \to u(\cdot)$ *слабо в* $L_2(T; H)$ *при* $j \to \infty$. *Кроме того, для всех* $u(\cdot) \in L_2(T; H)$ *справедливы оценки*

$$|y_t(\cdot; y_0, v_0, u(\cdot))|_{L_2(T;H)} + |y(\cdot; y_0, v_0, u(\cdot))|_{L_\infty(T;V)} \le b_1\left(1 + |u(\cdot)|_{L_2(T;H)}\right),$$

$$|v_t(\cdot; y_0, v_0, u(\cdot))|_{L_2(T;V^*)} + |v(\cdot; y_0, v_0, u(\cdot))|_{L_\infty(T;H)} \le b_2\left(1 + |u(\cdot)|_{L_2(T;H)}\right),$$

где $b_k = b_k\left(|y_0|_V, |v_0|_H\right)$, $k = 1, 2$.

Справедлива

Теорема 3. *Пусть* $\alpha(h) \to 0$, $\delta(h)\alpha^{-1}(h) \to 0$, $h^2\delta^{-1}(h)\alpha^{-1}(h) \to 0$ *при* $h \to 0$. *Тогда найдется такое* $h_* \in (0, 1)$, *что при всех* $h \in (0, h_*)$ *справедливы неравенства*

$$\varepsilon(t) + 2\omega\int_0^t \left|z^h(\tau) - y(\tau)\right|_H^2 d\tau \le d_1\left(h^2\delta^{-1}(h) + \delta(h) + \alpha(h)\right) \quad \text{при п.в.} \quad t \in T, \tag{3.2}$$

$$\int_0^\vartheta \left|u^h(t)\right|_H^2 dt \le \rho_1(\alpha(h), \delta(h)))\int_0^\vartheta |u(t)|_H^2 dt + \rho(h, \alpha(h), \delta(h)), \tag{3.3}$$

где d_1 — *постоянная, не зависящая от* h, α, δ,

$$\varepsilon(t) = \left|w^h(t) - v(t)\right|_{V^*}^2, \quad \rho_1(\alpha(h), \delta(h)) \to 1, \quad \rho(h, \alpha(h), \delta(h)) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Доказательство. Вычтем (2.3) из (2.5) и полученное выражение умножим (скалярно в V^*) на разность $w^h(t) - v(t)$. Будем иметь

$$\left(w_t^h(t) - v_t(t), w^h(t) - v(t)\right)_{V^*} + J_t = J_1(t), \tag{3.4}$$

где

$$J_t = \left(\Delta(z^h(t) - y(t)), w^h(t) - v(t)\right)_{V^*},$$

$$J_1(t) = \left(u^h(t) - u(t), w^h(t) - v(t)\right)_{V^*}.$$

Заметим, что справедливо равенство

$$J_t = \left(z^h(t) - y(t), w^h(t) - v(t)\right)_H.$$

Поэтому в силу (2.2) имеем неравенство

$$\omega\left|z^h(t) - y(t)\right|_H^2 \le J_t. \tag{3.5}$$

Нетрудно видеть, что при п.в. $t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}]$ справедливо неравенство

$$J_1(t) \le \left(w^h(\tau_i) - \xi_i^h, u^h(t) - u(t)\right)_{V^*} + \rho_i(t, h). \tag{3.6}$$

Здесь

$$\rho_i(t, h) = c_0\left(\left|u^h(t)\right|_{V^*} + |u(t)|_{V^*}\right)\left(h + \int_{\tau_i}^t \left\{\left|w_\tau^h(\tau)\right|_{V^*} + |v_\tau(\tau)|_{V^*}\right\} d\tau\right).$$

В таком случае, в силу (3.5), (3.6), при п.в. $t \in \delta_i$ имеем

$$2\omega\left|z^h(t) - y(t)\right|_H^2 + \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \le 2\left(w^h(\tau_i) - \xi_i^h, u^h(t) - u(t)\right)_{V^*} + 2\rho_i(t,h). \tag{3.7}$$

Если $x \in V^*$, $y \in H$, то в силу известного свойства троек Гельфанда получаем

$$\left\langle \Delta^{-1}x, y\right\rangle_{V\times V^*} = \left(\Delta^{-1}x, y\right)_H.$$

Значит, при п.в. $t \in \delta_i$

$$\left(w^h(\tau_i) - \xi_i^h, u^h(t) - u(t)\right)_{V^*} = \left(\Delta^{-1}(w^h(\tau_i) - \xi_i^h), u^h(t) - u(t)\right)_H.$$

Неравенство (3.7) влечет оценку

$$\begin{gathered}2\omega\left|z^h(t) - y(t)\right|_H^2 + \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \alpha\left\{\left|u^h(t)\right|_H^2 - \left|u(t)_H^2\right|\right\} \le 2\left(u^h(t), \Delta^{-1}\left(w^h(\tau_i) - \xi_i^h\right)\right)_H + \\ + \alpha\left|u^h(t)\right|_H^2 - 2\left(u(t), \Delta^{-1}\left(w^h(\tau_i) - \xi_i^h\right)\right)_H - \alpha\left|u(t)\right|_H^2 + 2\rho_i(t,h) \quad \text{при п.в} \quad t \in \delta_i.\end{gathered} \tag{3.8}$$

Пусть

$$\varepsilon^h(t) = \varepsilon(t) + 2\omega\int_0^t\left|z^h(\tau) - y(\tau)\right|_H^2 d\tau + \alpha\int_0^t\left\{\left|u^h(\tau)\right|_H^2 - \left|u(\tau)\right|_H^2\right\}d\tau.$$

Учитывая правило выбора управления $u^h(\cdot)$ (см. (2.6), (2.7), (3.1)), а также непрерывность вложения H в V^*, из (3.8) получаем при $t \in \delta_i$, $i \in [0 : m-1]$,

$$\begin{gathered}\varepsilon^h(t) \le \varepsilon^h(\tau_i) + c_1\int_{\tau_i}^t\left\{\left|u^h(\tau)\right|_H + \left|u(\tau)\right|_H\right\}d\tau \times \left(h + \int_{\tau_i}^t\left\{\left|w_\tau^h(\tau)\right|_{V^*} + \left|v_\tau(\tau)\right|_{V^*}\right\}d\tau\right) \le \\ \le \varepsilon^h(\tau_i) + c_2h^2 + c_3\delta\int_{\tau_i}^t\left\{\left|u^h(\tau)\right|_H^2 + \left|u(\tau)\right|_H^2\right\}d\tau + c_4\delta\int_{\tau_i}^t\left\{\left|w_\tau^h(\tau)\right|_{V^*}^2 + \left|v_\tau(\tau)\right|_{V^*}^2\right\}d\tau.\end{gathered} \tag{3.9}$$

Суммируя правую и левую части (3.9) по i и учитывая теорему 2, при $t \in T$ получаем

$$\begin{gathered}\varepsilon(t) + 2\omega\int_0^t\left|z^h(\tau) - y(\tau)\right|^2 d\tau + \alpha\int_0^t\left|u^h(\tau)\right|_H^2 d\tau \le \alpha\int_0^t\left|u(\tau)\right|_H^2 d\tau + c_5h^2\delta^{-1} + \\ + c_6\delta\left\{1 + \int_0^t\left\{\left|u^h(\tau)\right|_H^2 + \left|u(\tau)\right|_H^2\right\}d\tau\right\}.\end{gathered} \tag{3.10}$$

В таком случае в силу (3.10),

$$\varepsilon(t) + 2\omega\int_0^t\left|z^h(\tau) - y(\tau)\right|_H^2 d\tau + (\alpha - c_6\delta)\int_0^t\left|u^h(\tau)\right|_H^2 d\tau \le (\alpha + c_6\delta)\int_0^t\left|u(\tau)\right|_H^2 d\tau + c_5h^2\delta^{-1} + c_6\delta. \tag{3.11}$$

В свою очередь, из (3.11) следует неравенство

$$\int_0^t\left|u^h(\tau)\right|_H^2 d\tau \le \rho_1(\alpha,\delta)\int_0^t\left|u(\tau)\right|_H^2 d\tau + \rho_2(h,\delta,\alpha) + \rho_3(\alpha,\delta), \tag{3.12}$$

где

$$\rho_1(\alpha,\delta) = (\alpha + c_6\delta)(\alpha - c_6\delta)^{-1},$$

$$\rho_2(h,\delta,\alpha) = c_5h^2(\delta(\alpha - c_6\delta))^{-1}, \quad \rho_3(\alpha,\delta) = c_6\delta(\alpha - c_6\delta)^{-1}.$$

Учитывая сходимости $\delta(h)\alpha^{-1}(h) \to 0$, $h^2\delta^{-1}(h)\alpha^{-1}(h) \to 0$ при $h \to 0$, заключаем, что при $h \to 0$ справедливы соотношения

$$\rho_1(\alpha(h),\delta(h)) \to 1, \quad \rho_2(h,\delta(h),\alpha(h)) \to 0, \quad \rho_3(\alpha(h),\delta(h)) \to 0.$$

Из (3.11), учитывая (3.12), получаем : найдется такое $h_1 \in (0, 1)$, что при всех $h \in (0, h_1)$ справедливо (при п.в. $t \in T$) неравенство

$$\varepsilon(t) + 2\omega\int_0^t \left|z^h(\tau) - y(\tau)\right|_H^2 d\tau \le c_7\left(\alpha(h) + \delta(h) + h^2\delta^{-1}(h)\right). \tag{3.13}$$

Из (3.12), (3.13) следуют оценки (3.2), (3.3). Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда имеет место сходимость*

$$u^h(\cdot) \to u(\cdot) \ \ \textit{в} \ \ L_2 = L_2(T; H) \quad \textit{при} \quad h \to 0.$$

Доказательство. Покажем, что, каковы бы ни были последовательность чисел $h_j \to 0+$ при $j \to \infty$, а также последовательность элементов $\xi_i^{h_j}$ со свойствами (2.4) (в (2.4) полагаем $h = h_j$) , имеет место сходимость

$$u^{h_j}(\cdot) \to u(\cdot) \ \ \text{в} \ \ L_2 \quad \text{где} \quad j \to \infty.$$

Здесь и ниже управления $u^{h_j}(\cdot)$ определяются согласно (2.6), (2.7), (3.1), где полагается $h = h_j$. Предполагая противное, заключаем: найдется подпоследовательность последовательности $u^{h_j}(\cdot)$ (для простоты обозначаем ее тем же символом, т.е. $u^{h_j}(\cdot)$) такая, что

$$u^{h_j}(\cdot) \to u_0(\cdot) \ \ \text{слабо в} \ \ L_2 \quad \text{при} \quad j \to \infty, \tag{3.14}$$

$$u_0(\cdot) \ne u(\cdot). \tag{3.15}$$

Пусть $q^{h_j}(t) = z^{h_j}(t) - y^0(t)$, $p^{h_j}(t) = w^{h_j}(t) - v^0(t)$, где $\left\{z^{h_j}(\cdot), w^{h_j}(\cdot)\right\}$ — решение системы (2.5) при $h = h_j$, а $\left\{v^0(\cdot), y^0(\cdot)\right\}$ — решение системы

$$\begin{gathered} v_t^0(t,\eta) - \Delta y^0(t,\eta) = u_0(t,\eta), \quad (t,\eta) \in T \times \Omega, \\ y^0(t,\sigma) = 0, \quad (t,\sigma) \in T \times \Gamma, \\ v^0(t,\eta) \in \beta(y^0(t,\eta)), \quad (t,\eta) \in T \times \Omega, \\ v^0(0,\eta) = v_0(\eta) \in \beta(y_0(\eta)), \quad y^0(0,\eta) = y_0(\eta), \quad \eta \in \Omega.. \end{gathered} \tag{3.16}$$

Вычтем (3.16) из (2.5) (в (2.5) мы полагаем $h = h_j$). После этого умножим (скалярно в V^*) полученную разность на $p^{h_j}(t)$. Аналогично (3.4) устанавливаем равенство

$$d\tilde{\varepsilon}^{h_j}(t)/dt + \tilde{I}_{1t}^{h_j} = \tilde{I}_{2t}^{h_j} \quad \text{при п.в.} \quad t \in T, \tag{3.17}$$

где

$$\tilde{\varepsilon}^{h_j}(t) = 1/2\left|p^{h_j}(t)\right|_{V^*}^2, \quad \tilde{I}_{1t}^{h_j} = \int_0^t \left(q^{h_j}(\tau), p^{h_j}(\tau)\right)_H d\tau,$$

$$\tilde{I}_{2t}^{h_j} = \int_0^t \left(w^{h_j}(\tau) - v^0(\tau), u^{h_j}(\tau) - u_0(\tau)\right)_{V^*} d\tau.$$

Учитывая монотонность функции $\beta(\cdot)$, заключаем, что верно неравенство

$$\tilde{I}_{1t}^{h_j} \ge 0 \quad \text{при п.в.} \quad t \in T. \tag{3.18}$$

Рассмотрим $\tilde{I}_{2t}^{h_j}$. Имеем

$$\tilde{I}_{2t}^{h_j} = \int_0^t \left(w^{h_j}(\tau) - v(\tau), u^{h_j}(\tau) - u_0(\tau)\right)_{V^*} d\tau + \int_0^t \left(v(\tau) - v^0(\tau), u^{h_j}(\tau) - u_0(\tau)\right)_{V^*} d\tau.$$

Тогда

$$\sup_{t\in T}\left|I_{2t}^{h_j}\right| \to 0 \quad \text{при} \quad j\to\infty. \tag{3.19}$$

Этот факт вытекает из теоремы 3 и слабой сходимости последовательности функций $u^{h_j}(\cdot)$ к $u_0(\cdot)$ (см. (3.14)). В таком случае из (3.17)–(3.19) получаем

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\sup_{t\in T}\tilde{\varepsilon}^{h_j}(t) \to 0.$$

Учитывая это соотношение, а также теорему 2, устанавливаем справедливость равенств

$$\operatorname{vrai}\sup_{t\in T}\left|v^0(t)-v(t)\right|_{V^*} = 0. \tag{3.20}$$

Ввиду свойств графа β,

$$0 = \left(v^0(t)-v(t), y^0(t)-y(t)\right)_H \ge \omega\left|y^0(t)-y(t)\right|_H^2 \quad \text{при п.в.} \quad t\in T.$$

Отсюда получаем

$$y^0(\cdot) = y(\cdot).$$

Кроме того, в силу (3.20)

$$v^0(\cdot) = v(\cdot).$$

Поэтому

$$u_0(\cdot) = u(\cdot).$$

Последнее противоречит (3.14), (3.15). Следовательно,

$$u^{h_j}(\cdot) \to u(\cdot) \quad \text{слабо в} \quad L_2 \quad \text{при} \quad j\to\infty. \tag{3.21}$$

Ввиду известного свойства слабого предела, из (3.21) вытекает неравенство

$$\underline{\lim}_{j\to\infty}\left|u^{h_j}(\cdot)\right|_{L_2} \ge \left|u(\cdot)\right|_{L_2}. \tag{3.22}$$

Кроме того, в силу (3.3) имеет место оценка

$$\left|u^{h_j}(\cdot)\right|_{L_2}^2 \le \rho_1(\alpha(h),\delta(h))\left|u(\cdot)\right|_{L_2}^2 + \rho(h,\alpha(h),\delta(h)).$$

В таком случае,

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\left|u^{h_j}(\cdot)\right|_{L_2} \le \left|u(\cdot)\right|_{L_2}. \tag{3.23}$$

Значит (см. (3.22), (3.23)),

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\left|u^{h_j}(\cdot)\right|_{L_2} \le \left|u(\cdot)\right|_{L_2} \le \underline{\lim}_{j\to\infty}\left|u^{h_j}(\cdot)\right|_{L_2}.$$

Отсюда следует сходимость

$$\left|u^{h_j}(\cdot)\right|_{L_2} \to \left|u(\cdot)\right|_{L_2} \quad \text{при} \quad j\to\infty. \tag{3.24}$$

Учитывая (3.21) и (3.24), заключаем

$$u^{h_j}(\cdot) \to u(\cdot) \ \text{ в } \ L_2 \quad \text{при} \quad j\to\infty.$$

Теорема доказана.

4. ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА

Установим оценку скорости сходимости алгоритма. В дальнейшем нам понадобится

Лемма 1 (см. [12]). *Пусть заданы две функции: $t \to a(t) \in L_2(T;W^*)$ и $t \to b(t) \in W$, $t \in T$, причем $b(\cdot)$ является функцией с ограниченной вариацией. Если верны неравенства*

$$\left|\int_0^t a(\tau)d\tau\right|_{W^*} \le \varepsilon, \quad |b(t)|_W \le d, \quad t \in T,$$

то справедлива оценка

$$\int_0^\vartheta \langle b(t), a(t)\rangle_{W\times W^*} d\tau \le \varepsilon(\mathrm{var}_T\, b(t) + d).$$

Здесь W — банахово пространство с нормой $|\cdot|_W$; символ $\mathrm{var}_T\, b(t)$ означает полную вариацию функции $b(t)$ на промежутке T, а символ $\langle\cdot,\cdot\rangle_{W\times W^*}$ — двойственность между W и W^*.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 3, и функция $t \to u(t) \in V$ при $t \in T$ является функцией с ограниченной вариацией. Тогда справедлива следующая оценка скорости сходимости алгоритма:*

$$\int_0^\vartheta \left|u(t) - u^h(t)\right|^2_{V^*} dt \le C\left\{\left(\delta + \alpha + h^2\delta^{-1}\right)^{1/2} + \rho(h,\alpha,\delta) + |1 - \rho_1(\alpha,\delta)|\right\}, \tag{4.1}$$

где C — положительная постоянная, не зависящая от h, δ, α.

Доказательство. Заметим, что каково бы ни было $v \in V$, справедливо равенство

$$\left(\Delta(y(t) - z^h(t)), v\right)_{V^*} = \left(y(t) - z^h(t), v\right)_H \quad (t \in T).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t \left(u(\tau) - u^h(\tau)\right)d\tau\right|_{V^*} &= \sup_{v\in V, |v|_V\le 1}\left\langle v, \int_0^t \left\{v_\tau(\tau) - w^h_\tau(\tau) - \Delta(y(\tau) - z^h(\tau))\right\}d\tau\right\rangle_{V\times V^*} \le \\ &\le \left|v(t) - w^h(t)\right|_{V^*} + \sup_{v\in V, |v|_V\le 1}\left(\int_0^t \left(y(\tau) - z^h(\tau)\right)d\tau, v\right)_H.\end{aligned} \tag{4.2}$$

В силу непрерывности вложения пространства V в пространство H найдется такое число $d_* > 0$, что при всех $x \in V$ получим

$$|x|_H \le d_* |x|_V.$$

Значит, $d_*^{-1}|x|_H \le |x|_V$. В таком случае,

$$\sup_{v\in V, |v|_V\le 1}\left(\int_0^t \left(y(\tau) - z^h(\tau)\right)d\tau, v\right)_H \le \sup_{v\in H, |v|_H\le d_*}\left(\int_0^t \left(y(\tau) - z^h(\tau)\right)d\tau, v\right)_H = d_*\left|\int_0^t \left(y(\tau) - z^h(\tau)\right)d\tau\right|_H. \tag{4.3}$$

Из (4.2), учитывая (4.3), получаем

$$\left|\int_0^t \left(u(\tau) - u^h(\tau)\right)d\tau\right|_{V^*} \le \left|v(t) - w^h(t)\right|_{V^*} + d_*\int_0^t \left|y(\tau) - z^h(\tau)\right|_H d\tau. \tag{4.4}$$

В свою очередь, из (4.4), в силу (3.2), выводим ($\alpha = \alpha(h)$, $\delta = \delta(h)$)

$$\left|\int_0^t \left(u(\tau) - u^h(\tau)\right)d\tau\right|_{V^*} \le C_1\left(\delta + h^2\delta^{-1} + \alpha\right)^{1/2}, \quad t \in T.$$

Воспользовавшись неравенством (3.3), получим

$$\begin{aligned}\left|u(\cdot)-u^h(\cdot)\right|^2_{L_2(T;H)} &\le (1+\rho_1(\alpha,\delta))\left|u(\cdot)\right|^2_{L_2(T;H)} - 2\int\limits_0^{\vartheta}\left(u(\tau),u^h(\tau)\right)_H d\tau + \rho(h,\alpha,\delta) = \\ &= 2\int\limits_0^{\vartheta}\left\langle u(\tau),u(\tau)) - u^h(\tau)\right\rangle_{V\times V^*} d\tau + \rho(h,\alpha,\delta) + \left|1-\rho_1(\alpha,\delta)\right|\int\limits_0^{\vartheta}\left|u(\tau)\right|^2_H d\tau.\end{aligned} \tag{4.5}$$

В силу леммы 1 из (4.5) получаем (4.1). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1978.
2. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, 1980.
3. *Banks H.T., Kunisch K.* Estimation techniques for distributed parameter systems. Boston: Birkhäuser, 1989.
4. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
5. *Kabanikhin S.I.* Inverse and ill-posed problems. Theory and Applications. In: Inverse and Ill-Posed Problems Series, 55. Berlin: De Gruyter, 2011.
6. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
7. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Amsterdam: Gordon and Breach, 1995.
8. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: УрО РАН, 2011.
9. *Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.* Основы метода динамической регуляризации. М.: МГУ, 1999. 238 с.
10. *Maksimov V.I.* Dynamical inverse problems of distributed systems. Utrecht: VSP, 2002.
11. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Динамические обратные задачи для параболических систем // Дифференц. ур-ния. 2000. Т. 36. № 5. С. 579–597.
12. *Васильева Е.В., Максимов В.И.* О динамической реконструкции неограниченных управлений в параболическом уравнении // Дифференц. ур-ния. 2003. Т. 39. № 1. С. 23–29.
13. *Favini A., Maksimov V., Pandolfi L.* A deconvolution problem related to a singular system // J. of Mathematical Analysis and Applications. 2004. V. 292. № 1. P. 60–72.
14. *Maksimov V.I.* On dynamical reconstruction of boundary and distributed inputs in a Schlogl equation // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2019. V. 27. № 6. P. 877–889.
15. *Brezis H.* Problemes unilateraux // J. Math. Pures Appl. 1972. V. 51. P. 1–168.
16. *Barbu V.* Optimal Control of Variational Inequalities. Pitman: London, 1984.
17. *Tiba D.* Optimal Control of Nonsmooth Distributed Parameter Systems. Berlin: Springer Verlag, 1991.
18. *Neittaanmaki P., Tiba D.* Optimal Control of Nonlinear Parabolic Systems. New York: Marcel Dekker, 1994.