ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.613

О ПАРАХ СИММЕТРИЧНЫХ ТЁПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦ, КВАДРАТЫ КОТОРЫХ СОВПАДАЮТ[1)]

© 2022 г. В. Н. Чугунов

119333 Москва, ул. Губкина, 8, Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука, Россия

e-mail: chugunov.vadim@gmail.com

Поступила в редакцию 10.09.2021 г.
Переработанный вариант 10.09.2021 г.
Принята к публикации 14.01.2022 г.

Дано полное описание пар симметричных тёплицевых матриц, квадраты которых совпадают. Библ. 3.

Ключевые слова: тёплицева матрица, циркулянт, косой циркулянт, инволютивная матрица.

DOI: 10.31857/S0044466922050039

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Тёплицевой называется комплексная $n \times n$-матрица T, имеющая вид

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \dots & t_{n-2} \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \dots & t_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{-n+1} & t_{-n+2} & t_{-n+3} & \dots & t_0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Хорошо известными частными случаями тёплицевых матриц являются циркулянты и косые циркулянты. Тёплицева матрица (1) называется *циркулянтом*, если

$$t_{-j} = t_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

и *косым циркулянтом* при

$$t_{-j} = -t_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Обобщением циркулянтов и косых циркулянтов служат φ-*циркулянты* – тёплицевы матрицы, для которых

$$t_{-j} = \varphi t_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

где φ – некоторое число.

Рассмотрим следующую задачу: описать пары симметричных тёплицевых матриц (T_1, T_2), удовлетворяющих условиям

$$T_1^2 = T_2^2, \quad T_1 \neq \pm T_2.$$

В предлагаемой работе дается полное решение этой задачи в виде списка множеств требуемых пар матриц. В разд. 2 формулируется теорема, являющаяся главным результатом статьи, доказательство которой проводится в разд. 4. В разд. 3 приводятся вспомогательные утверждения.

Напомним вначале некоторые определения и факты. Согласно [1], если C – циркулянт, то для него справедливо спектральное разложение

$$C = F_n^* D F_n, \quad (2)$$

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение № 075-15-2019-1624).

где $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ – диагональная матрица, F_n – (нормированная) матрица дискретного преобразования Фурье

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \ldots & \epsilon^{n-1} \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \ldots & \epsilon^{2(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \epsilon^{n-1} & \epsilon^{2(n-1)} & \ldots & \epsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

и $\epsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ – первообразный корень n-й степени из единицы.

Если S – косой циркулянт, то вместо (2) имеем

$$S = G_{-1}F_n^* D F_n G_{-1}^*, \tag{3}$$

где

$$G_{-1} = \mathrm{diag}\left(1, \psi, \psi^2, \ldots, \psi^{n-1}\right),$$

$\psi = e^{\frac{i\pi}{n}}$ есть корень n-й степени из (-1).

В дальнейшем мы будем использовать матрицу-перестановку

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \ldots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}, \tag{4}$$

называемую иногда перъединичной матрицей.

2. ГЛАВНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема. *Ненулевые симметричные тёплицевы матрицы T_1 и T_2 удовлетворяют условиям*

$$T_1^2 = T_2^2, \quad T_1 \neq \pm T_2, \tag{5}$$

тогда и только тогда, когда они входят хотя бы в один из описываемых ниже классов:

Класс 1. Матрицы T_1 и T_2 являются циркулянтами, связанными соотношением

$$T_2 = T_1 C_0,$$

где C_0 – симметричный нескалярный инволютивный циркулянт.

Класс 2. Матрицы T_1 и T_2 суть косые циркулянты, для которых выполянется равенство

$$T_2 = T_1 S_0.$$

Здесь S_0 – симметричный нескалярный инволютивный косой циркулянт.

Класс 3. Матрицы T_1 и T_2 имеют вид

$$T_1 = \alpha C_0 + \beta S_0,$$

$$T_2 = \alpha S_0 + \beta C_0.$$

При этом C_0 и S_0 – симметричные инволютивные циркулянт и косой циркулянт соответственно, не являющиеся одновременно скалярными матрицами, α, β – некоторые числа, $\alpha \neq \pm\beta$.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Для доказательства главного результата нам понадобятся некоторые дополнительные утверждения. Начнем с результата, который принадлежит к тёплицеву фольклору. Все знают о нем, но никто не знает первоисточника.

Лемма 1. *Произведение нескалярных тёплицевых матриц T_1 и T_2 тогда и только тогда является тёплицевой матрицей, когда T_1 и T_2 принадлежат хотя бы одному из следующих классов*:

Класс 1'. Матрицы T_1 и T_2 суть φ-циркулянты для одного и того же числа $\varphi \neq 0$.

Класс 2'. Обе матрицы T_1 и T_2 — верхнетреугольные или же обе — нижнетреугольные.

Другим результатом, нужным в дальнейшем, является следующий факт.

Лемма 2. *Матрица T является нескалярным симметричным φ-циркулянтом тогда и только тогда, когда T — симметричный циркулянт или косой циркулянт.*

Доказательство леммы 2. Так как достаточность очевидна, то установим лишь необходимость.

Пусть T — φ-циркулянт с первой строкой $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$. В силу нескалярности T найдется число $j > 0$ такое, что $t_j \neq 0$. Из определения φ-циркулянта и его симметричности имеем

$$t_j = t_{-j} = \varphi t_{n-j} = \varphi t_{-(n-j)} = \varphi^2 t_j,$$

или

$$\left(1 - \varphi^2\right) t_j = 0.$$

Так как $t_j \neq 0$, то $\varphi = \pm 1$. Лемма 2 доказана.

Из лемм 1 и 2 следует

Лемма 3. *Квадрат симметричной нескалярной тёплицевой матрицы T тогда и только тогда является тёплицевой матрицей, когда T — симметричный циркулянт или косой циркулянт.*

Также нам потребуются критерии симметричности циркулянта и косого циркулянта.

Лемма 4. *Циркулянт C со спектральным разложением* (2) *является симметричной матрицей тогда и только тогда, когда*

$$d_j = d_{n+2-j}, \quad j = 2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.$$

Доказательство леммы 4. Запишем условие симметричности циркулянта C, используя спектральное разложение (2):

$$F_n^* D F_n = F_n D F_n^*.$$

После умножения слева и справа на F_n приходим к соотношению

$$D F_n^2 = F_n^2 D.$$

Так как $F_n^2 = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_{n-1}$ (см. [2, лемма 1.2.17]), получаем утверждение леммы. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть S — косой циркулянт, для которого записано спектральное разложение* (3). *Матрица S является симметричной тогда и только тогда, когда*

$$d_1 = d_2, \quad d_j = d_{n+3-j}, \quad j = 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Доказательство леммы 5. Запишем условие симметричности косого циркулянта S, используя спектральное разложение (3):

$$G_{-1} F_n^* D F_n G_{-1}^* = G_{-1}^* F_n D F_n^* G_{-1}.$$

Умножение слева на $F_n G_{-1}^*$, а справа на $G_{-1}^* F_n$ приводит к равенству

$$D F_n \left(G_{-1}^*\right)^2 F_n = F_n \left(G_{-1}^*\right)^2 F_n D.$$

Учитывая лемму 1.2.20 из [2], имеем

$$F_n\left(G_{-1}^*\right)^2 F_n = \mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{P}_{n-2}.$$

Вместе с предыдущим равенством это дает утверждение леммы. Лемма 5 доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГЛАВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

В этом разделе приведем обоснование теоремы, являющейся основным результатом.

Хорошо известно, что всякую тёплицеву матрицу можно однозначно представить в виде суммы скалярной матрицы, циркулянта и косого циркулянта с нулевыми диагоналями, поэтому запишем матрицы T_1 и T_2 в виде

$$T_1 = t_0^{(1)} I_n + C^{(1)} + S^{(1)}, \quad T_2 = t_0^{(2)} I_n + C^{(2)} + S^{(2)}, \tag{6}$$

где $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ – циркулянты, $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ – косые циркулянты с нулевыми диагоналями.

Обозначим элементы первых строк циркулянтов $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ через $0, c_1^{(1)}, \ldots, c_{n-1}^{(1)}$ и $0, c_1^{(2)}, \ldots, c_{n-1}^{(2)}$ соответственно. Аналогично, элементы первых строк косых циркулянтов $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ обозначим как $0, s_1^{(1)}, \ldots, s_{n-1}^{(1)}$ и $0, s_1^{(2)}, \ldots, s_{n-1}^{(2)}$.

Подставим представления (6) в (5):

$$\begin{gathered}\left(t_0^{(1)}\right)^2 I_n + 2t_0^{(1)}C^{(1)} + 2t_0^{(1)}S^{(1)} + \left(C^{(1)}\right)^2 + \left(S^{(1)}\right)^2 + C^{(1)}S^{(1)} + S^{(1)}C^{(1)} = \\ = \left(t_0^{(2)}\right)^2 I_n + 2t_0^{(2)}C^{(2)} + 2t_0^{(2)}S^{(2)} + \left(C^{(2)}\right)^2 + \left(S^{(2)}\right)^2 + C^{(2)}S^{(2)} + S^{(2)}C^{(2)},\end{gathered} \tag{7}$$

или

$$\begin{gathered}C^{(1)}S^{(1)} + S^{(1)}C^{(1)} - C^{(2)}S^{(2)} - S^{(2)}C^{(2)} = \\ = -\left(t_0^{(1)}\right)^2 I_n - 2t_0^{(1)}C^{(1)} - 2t_0^{(1)}S^{(1)} - \left(C^{(1)}\right)^2 - \left(S^{(1)}\right)^2 + \\ + \left(t_0^{(2)}\right)^2 I_n + 2t_0^{(2)}C^{(2)} + 2t_0^{(2)}S^{(2)} + \left(C^{(2)}\right)^2 + \left(S^{(2)}\right)^2.\end{gathered}$$

Матрица в правой части, как сумма циркулянтов и косых циркулянтов, тёплицева, значит, и матрица в левой части должна быть тёплицевой:

$$\begin{gathered}\left\{C^{(1)}S^{(1)} + S^{(1)}C^{(1)} - C^{(2)}S^{(2)} - S^{(2)}C^{(2)}\right\}_{k,m} = \\ = \left\{C^{(1)}S^{(1)} + S^{(1)}C^{(1)} - C^{(2)}S^{(2)} - S^{(2)}C^{(2)}\right\}_{k+1,m+1}, \\ k, m = 1, \ldots, n-1.\end{gathered}$$

Подробная запись последнего равенства

$$\begin{gathered}\sum_{l=1}^{n}\left\{C^{(1)}\right\}_{k,l}\left\{S^{(1)}\right\}_{l,m} + \sum_{l=1}^{n}\left\{S^{(1)}\right\}_{k,l}\left\{C^{(1)}\right\}_{l,m} - \\ - \sum_{l=1}^{n}\left\{C^{(2)}\right\}_{k,l}\left\{S^{(2)}\right\}_{l,m} - \sum_{l=1}^{n}\left\{S^{(2)}\right\}_{k,l}\left\{C^{(2)}\right\}_{l,m} - \\ - \sum_{l=1}^{n}\left\{C^{(1)}\right\}_{k+1,l}\left\{S^{(1)}\right\}_{l,m+1} - \sum_{l=1}^{n}\left\{S^{(1)}\right\}_{k+1,l}\left\{C^{(1)}\right\}_{l,m+1} + \\ + \sum_{l=1}^{n}\left\{C^{(2)}\right\}_{k+1,l}\left\{S^{(2)}\right\}_{l,m+1} + \sum_{l=1}^{n}\left\{S^{(2)}\right\}_{k+1,l}\left\{C^{(2)}\right\}_{l,m+1} = 0\end{gathered}$$

в силу тёплицевости $C^{(1)}$, $S^{(1)}$, $C^{(2)}$ и $S^{(2)}$ приобретает вид

$$\sum_{l=1}^{n} c_{l-k}^{(1)} s_{m-l}^{(1)} + \sum_{l=1}^{n} s_{l-k}^{(1)} c_{m-l}^{(1)} - \sum_{l=1}^{n} c_{l-k}^{(2)} s_{m-l}^{(2)} - \sum_{l=1}^{n} s_{l-k}^{(2)} c_{m-l}^{(2)} -$$
$$- \sum_{l=1}^{n} c_{l-k-1}^{(1)} s_{m+1-l}^{(1)} - \sum_{l=1}^{n} s_{l-k-1}^{(1)} c_{m+1-l}^{(1)} + \sum_{l=1}^{n} c_{l-k-1}^{(2)} s_{m+1-l}^{(2)} + \sum_{l=1}^{n} s_{l-k-1}^{(2)} c_{m+1-l}^{(2)} = 0.$$

Заменим индекс суммирования l на p, полагая $p = l$ в первых четырех суммах и $p = l - 1$ в остальных:

$$\sum_{p=1}^{n} c_{p-k}^{(1)} s_{m-p}^{(1)} + \sum_{p=1}^{n} s_{p-k}^{(1)} c_{m-p}^{(1)} - \sum_{p=1}^{n} c_{p-k}^{(2)} s_{m-p}^{(2)} - \sum_{p=1}^{n} s_{p-k}^{(2)} c_{m-p}^{(2)} -$$

$$- \sum_{p=0}^{n-1} c_{p-k}^{(1)} s_{m-p}^{(1)} - \sum_{p=0}^{n-1} s_{p-k}^{(1)} c_{m-p}^{(1)} + \sum_{p=0}^{n-1} c_{p-k}^{(2)} s_{m-p}^{(2)} + \sum_{p=0}^{n-1} s_{p-k}^{(2)} c_{m-p}^{(2)} = 0.$$

Выполняя элементарные преобразования, приходим к равенству

$$c_{n-k}^{(1)} s_{-(n-m)}^{(1)} - c_{-k}^{(1)} s_{m}^{(1)} + s_{n-k}^{(1)} c_{-(n-m)}^{(1)} - s_{-k}^{(1)} c_{m}^{(1)} - c_{n-k}^{(2)} s_{-(n-m)}^{(2)} + c_{-k}^{(2)} s_{m}^{(2)} - s_{n-k}^{(2)} c_{-(n-m)}^{(2)} + s_{-k}^{(2)} c_{m}^{(2)} = 0.$$

Так как $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ – циркулянты, $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ – косые циркулянты, то можем записать

$$-c_{n-k}^{(1)} s_{m}^{(1)} - c_{n-k}^{(1)} s_{m}^{(1)} + s_{n-k}^{(1)} c_{m}^{(1)} + s_{n-k}^{(1)} c_{m}^{(1)} + c_{n-k}^{(2)} s_{m}^{(2)} + c_{n-k}^{(2)} s_{m}^{(2)} - s_{n-k}^{(2)} c_{m}^{(2)} - s_{n-k}^{(2)} c_{m}^{(2)} = 0,$$

или

$$c_{n-k}^{(1)} s_{m}^{(1)} - s_{n-k}^{(1)} c_{m}^{(1)} - c_{n-k}^{(2)} s_{m}^{(2)} + s_{n-k}^{(2)} c_{m}^{(2)} = 0.$$

Заменяя k на $n - k$, получаем

$$c_{k}^{(1)} s_{m}^{(1)} - c_{m}^{(1)} s_{k}^{(1)} = c_{k}^{(2)} s_{m}^{(2)} - c_{m}^{(2)} s_{k}^{(2)}. \tag{8}$$

Введем в рассмотрение две вспомогательные $(n-1) \times 2$-матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, задавая их формулами

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} c_1^{(1)} & s_1^{(1)} \\ c_2^{(1)} & s_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ c_{n-1}^{(1)} & s_{n-1}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G} = \begin{bmatrix} c_1^{(2)} & s_1^{(2)} \\ c_2^{(2)} & s_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots \\ c_{n-1}^{(2)} & s_{n-1}^{(2)} \end{bmatrix},$$

и векторы $c^{(1)} = \left(c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \ldots, c_{n-1}^{(1)}\right)^{\mathrm{T}}$, $c^{(2)} = \left(c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \ldots, c_{n-1}^{(2)}\right)^{\mathrm{T}}$, $s^{(1)} = \left(s_1^{(1)}, s_2^{(1)}, \ldots, s_{n-1}^{(1)}\right)^{\mathrm{T}}$, $s^{(2)} = \left(s_1^{(2)}, s_2^{(2)}, \ldots, s_{n-1}^{(2)}\right)^{\mathrm{T}}$.

Из условия симметричности матриц T_1 и T_2 следует симметричность $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$, поэтому имеем соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{n-1} c^{(1)} &= c^{(1)}, \\ \mathcal{P}_{n-1} s^{(1)} &= -s^{(1)}, \\ \mathcal{P}_{n-1} c^{(2)} &= c^{(2)}, \\ \mathcal{P}_{n-1} s^{(2)} &= -s^{(2)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Определим величины

$$\Delta_{km}^{\mathcal{F}} = \det\begin{pmatrix} c_k^{(1)} & s_k^{(1)} \\ c_m^{(1)} & s_m^{(1)} \end{pmatrix} = c_k^{(1)}s_m^{(1)} - c_m^{(1)}s_k^{(1)},$$

$$\Delta_{km}^{\mathcal{G}} = \det\begin{pmatrix} c_k^{(2)} & s_k^{(2)} \\ c_m^{(2)} & s_m^{(2)} \end{pmatrix} = c_k^{(2)}s_m^{(2)} - c_m^{(2)}s_k^{(2)}.$$

Теперь (8) принимает вид

$$\Delta_{km}^{\mathcal{F}} = \Delta_{km}^{\mathcal{G}}, \quad k, m = 1, \ldots, n-1. \tag{10}$$

На основании равенства (10) рассмотрим несколько взаимоисключающих случаев, определяемых значениями рангов матриц $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, и в каждом из них найдем решение уравнения (5).

I. Матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ нулевые, тогда T_1 и T_2 являются скалярными матрицами и условия (5) не выполнены.

II. Матрица $\mathcal{G}$ нулевая, а $\mathcal{F}$ ненулевая. В этом случае матрица T_2 будет скалярной. Из уравнения (5) получаем, что T_1 – скалярное кратное инволютивной матрицы и, кроме того, квадрат T_1 является тёплицевой матрицей. По лемме 3 заключаем, что либо T_1 – симметричный циркулянт и пара (T_1, T_2) принадлежит классу 3 с $\beta = 0$ (скалярная матрица является косым циркулянтом), либо T_1 является симметричным косым циркулянтом и пара (T_1, T_2) принадлежит классу 3 с $\alpha = 0$.

III. Матрица $\mathcal{F}$ нулевая, $\mathcal{G}$ ненулевая. Повторяя рассуждения предыдущего случая, снова получаем, что пара (T_1, T_2) принадлежит классу 3.

IV. Матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ ненулевые и $\operatorname{rank} \mathcal{F} = 1$. В равенствах (10) все миноры $\Delta_{km}^{\mathcal{F}} = 0$, а потому и все миноры $\Delta_{km}^{\mathcal{G}} = 0$. Поскольку $\mathcal{G}$ – ненулевая матрица, то $\operatorname{rank} \mathcal{G} = 1$.

Так как $\operatorname{rank} \mathcal{F} = 1$, найдется ненулевой вектор $z^{(1)}$ такой, что $c^{(1)}$ и $s^{(1)}$ можно представить в виде $c^{(1)} = \gamma_1 z^{(1)}$ и $s^{(1)} = \delta_1 z^{(1)}$. Числа γ_1 и δ_1 удовлетворяют условию

$$|\gamma_1| + |\delta_1| \neq 0.$$

Соотношения (9) запишем в виде

$$\gamma_1 \mathcal{P}_{n-1} z^{(1)} = \gamma_1 z^{(1)}, \quad \delta_1 \mathcal{P}_{n-1} z^{(1)} = -\delta_1 z^{(1)},$$

или

$$\gamma_1 \left(\mathcal{P}_{n-1} z^{(1)} - z^{(1)}\right) = 0, \quad \delta_1 \left(\mathcal{P}_{n-1} z^{(1)} + z^{(1)}\right) = 0.$$

Если $\gamma_1\delta_1 \neq 0$, то из условий $\mathcal{P}_{n-1} z^{(1)} = z^{(1)}$ и $\mathcal{P}_{n-1} z^{(1)} = -z^{(1)}$ получаем, что $z^{(1)}$ – нулевой вектор. Однако $z^{(1)} \neq 0$, поэтому $\gamma_1\delta_1 = 0$.

Так как $\operatorname{rank} \mathcal{G} = 1$, найдется ненулевой вектор $z^{(2)}$ такой, что $c^{(2)}$ и $s^{(2)}$ можно представить в виде $c^{(2)} = \gamma_2 z^{(2)}$ и $s^{(2)} = \delta_2 z^{(2)}$. Числа γ_2 и δ_2 удовлетворяют условию

$$|\gamma_2| + |\delta_2| \neq 0.$$

Из (9) имеем

$$\gamma_2 \mathcal{P}_{n-1} z^{(2)} = \gamma_2 z^{(2)}, \quad \delta_2 \mathcal{P}_{n-1} z^{(2)} = -\delta_2 z^{(2)},$$

или

$$\gamma_2 \left(\mathcal{P}_{n-1} z^{(2)} - z^{(2)}\right) = 0, \quad \delta_2 \left(\mathcal{P}_{n-1} z^{(2)} + z^{(2)}\right) = 0.$$

Если $\gamma_2\delta_2 \neq 0$, то из равенств $\mathcal{P}_{n-1}z^{(2)} = z^{(2)}$ и $\mathcal{P}_{n-1}z^{(2)} = -z^{(2)}$ следует, что $z^{(2)}$ – нулевой вектор. Однако $z^{(2)} \neq 0$, поэтому $\gamma_2\delta_2 = 0$.

Приходим к совокупности соотношений

$$c^{(1)} = \gamma_1 z^{(1)}, \quad s^{(1)} = \delta_1 z^{(1)}, \quad \gamma_1\delta_1 = 0, \quad |\gamma_1| + |\delta_1| \neq 0,$$
$$c^{(2)} = \gamma_2 z^{(2)}, \quad s^{(2)} = \delta_2 z^{(2)}, \quad \gamma_2\delta_2 = 0, \quad |\gamma_2| + |\delta_2| \neq 0,$$

из которых заключаем, что возможны четыре взаимоисключающих случая, определяемых равенством нулю или отличием от нуля чисел γ_1, δ_1, γ_2 и δ_2.

Если $\delta_1 = \delta_2 = 0$, то T_1 и T_2 – циркулянты, которые запишем как

$$T_1 = F_n^* D_1 F_n, \quad T_2 = F_n^* D_2 F_n,$$

где $D_1 = \mathrm{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$ и $D_2 = \mathrm{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$ – диагональные матрицы.

Решаемое уравнение приобретает вид

$$D_1^2 = D_2^2, \quad D_1 \neq \pm D_2,$$

из которого имеем, что

$$D_2 = D_1 D_0,$$

где $D_0 = \mathrm{diag}\left(d_1^{(0)}, d_2^{(0)}, \ldots, d_n^{(0)}\right)$ – нескалярная инволютивная диагональная матрица, для которой

$$d_j^{(0)} = d_{n+2-j}^{(0)}, \quad j = 2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.$$

Последние условия нужны для обеспечения симметричности T_2.

В результате получаем соотношение

$$T_2 = F_n^* D_2 F_n = F_n^* D_1 F_n F_n^* D_0 F_n = T_1 C_0,$$

где C_0 – симметричный нескалярный инволютивный циркулянт. Пара (T_1, T_2) принадлежит классу 1.

Если $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, то T_1 и T_2 суть косые циркулянты вида

$$T_1 = G_{-1} F_n^* D_1 F_n G_{-1}^*, \quad T_2 = G_{-1} F_n^* D_2 F_n G_{-1}^*,$$

где $D_1 = \mathrm{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)}\right)$ и $D_2 = \mathrm{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)}\right)$ – диагональные матрицы.

Подставляя в уравнение (5), снова имеем соотношение

$$D_2 = D_1 D_0,$$

где $D_0 = \mathrm{diag}\left(d_1^{(0)}, d_2^{(0)}, \ldots, d_n^{(0)}\right)$ – нескалярная инволютивная диагональная матрица, для которой

$$d_1^{(0)} = d_2^{(0)},$$
$$d_j^{(0)} = d_{n+3-j}^{(0)}, \quad j = 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1,$$

что обеспечивает симметричность T_2.

В этом случае можем записать

$$T_2 = G_{-1} F_n^* D_2 F_n G_{-1}^* = G_{-1} F_n^* D_1 F_n G_{-1}^* G_{-1} F_n^* D_0 F_n G_{-1}^* = T_1 S_0,$$

где S_0 – симметричный нескалярный инволютивный косой циркулянт. Пара (T_1, T_2) принадлежит классу 2.

Если $\delta_1 = \gamma_2 = 0$, то T_1 – циркулянт, T_2 – косой циркулянт. Равенство $T_1^2 = T_2^2$ можно рассматривать как систему

$$T_1^2 = \xi I_n,$$
$$T_2^2 = \xi I_n,$$

из которой следует, что T_1 и T_2 – скалярные кратные инволютивных циркулянта и косого циркулянта соответственно (класс 3 с $\beta = 0$).

Если $\delta_2 = \gamma_1 = 0$, то, рассуждая как в случае выше, приходим к ситуации, когда T_1 и T_2 – скалярные кратные инволютивных косого циркулянта и циркулянта соответственно. Получаем пару из класса 3 для $\alpha = 0$.

V. Пусть теперь матрицы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ ненулевые и rank $\mathcal{F} > 1$. Так как $\mathcal{F}$ – матрица размера $(n-1)\times 2$, то rank $\mathcal{F} = 2$. Поэтому в равенствах (10) найдется ненулевой минор $\Delta_{km}^{\mathcal{F}}$, а значит, и ненулевой минор $\Delta_{km}^{\mathcal{G}}$. Тем самым rank $\mathcal{G} = 2$.

Применяя лемму из [3], можем написать

$$\mathcal{G} = \mathcal{F}W. \tag{11}$$

Представим матрицу W в виде

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен единице:

$$w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21} = 1. \tag{12}$$

Используя соотношения (9), можем написать

$$\mathcal{P}_{n-1}\mathcal{F} = \mathcal{F}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_{n-1}\mathcal{G} = \mathcal{G}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Умножая равенство (11) слева на $\mathcal{P}_{n-1}$, получаем соотношение

$$\mathcal{G}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathcal{F}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}W,$$

или

$$\mathcal{G} = \mathcal{F}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}W\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Почленно вычитая из последнего равенства соотношение (11), имеем

$$\mathcal{F}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}W\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - W\right] = 0.$$

Так как матрица $\mathcal{F}$ имеет полный ранг, можем написать

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}W\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - W = 0,$$

или с учетом вида матрицы W:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} = 0.$$

Приходим к равенству

$$\begin{pmatrix} w_{11} & -w_{12} \\ -w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix},$$

из которого следует, что $w_{12} = w_{21} = 0$. Пусть $w_{11} = \lambda$, тогда, так как матрица W имеет определитель 1, то $w_{22} = 1/\lambda$ и W – матрица вида

$$W = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Поэтому верны соотношения

$$C^{(2)} = \lambda C^{(1)}, \quad S^{(2)} = \frac{1}{\lambda} S^{(1)}. \tag{13}$$

При этом из условия rank $\mathcal{F} = 2$ следует, что $C^{(1)}$ и $S^{(1)}$ – нескалярные матрицы.

Рассмотрим сначала два особых случая. Если $\lambda = 1$, то $C^{(2)} = C^{(1)}$, $S^{(2)} = S^{(1)}$ и, используя (6), можем записать

$$T_1 = t_0^{(1)} I_n + \hat{T}, \quad T_2 = t_0^{(2)} I_n + \hat{T}$$

для некоторой нескалярной матрицы $\hat{T}$. Подстановка в уравнение (5) дает условие

$$\left(t_0^{(1)} - t_0^{(2)}\right)\left(\left(t_0^{(1)} + t_0^{(2)}\right) I_n + 2\hat{T}\right) = 0,$$

из которого следует, что $t_0^{(1)} = t_0^{(2)}$ и, поэтому, $T_1 = T_2$. Этот случай не дает новых классов. Аналогично для $\lambda = -1$.

Пусть теперь $\lambda \neq \pm 1$. Подстановка представлений (13) в (7) дает соотношение

$$\left(t_0^{(1)}\right)^2 I_n + 2t_0^{(1)} C^{(1)} + 2t_0^{(1)} S^{(1)} + \left(C^{(1)}\right)^2 + \left(S^{(1)}\right)^2 =$$
$$= \left(t_0^{(2)}\right)^2 I_n + 2t_0^{(2)} \lambda C^{(1)} + 2\frac{t_0^{(2)}}{\lambda} S^{(1)} + \lambda^2 \left(C^{(1)}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2}\left(S^{(1)}\right)^2,$$

или

$$\left(1 - \lambda^2\right)\left(C^{(1)}\right)^2 + 2\left(t_0^{(1)} - \lambda t_0^{(2)}\right) C^{(1)} =$$
$$= \left(\left(t_0^{(2)}\right)^2 - \left(t_0^{(1)}\right)^2\right) I_n + \left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right)\left(S^{(1)}\right)^2 + 2\left(\frac{t_0^{(2)}}{\lambda} - t_0^{(1)}\right) S^{(1)}.$$

Так как в последнем равенстве слева стоит циркулянт, справа косой циркулянт, то это соотношение эквивалентно системе

$$\begin{gathered} \left(1 - \lambda^2\right)\left(C^{(1)}\right)^2 + 2\left(t_0^{(1)} - \lambda t_0^{(2)}\right) C^{(1)} = \xi I_n, \\ \left(\left(t_0^{(2)}\right)^2 - \left(t_0^{(1)}\right)^2\right) I_n + \left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right)\left(S^{(1)}\right)^2 + 2\left(\frac{t_0^{(2)}}{\lambda} - t_0^{(1)}\right) S^{(1)} = \xi I_n \end{gathered} \tag{14}$$

для некоторого числа ξ.

Запишем циркулянт $C^{(1)}$ в виде $C^{(1)} = F_n^* D_1 F_n$ и подставим в первое уравнение (14)

$$\left(1 - \lambda^2\right) F_n^* D_1^2 F_n + 2\left(t_0^{(1)} - \lambda t_0^{(2)}\right) F_n^* D_1 F_n = \xi I_n.$$

После домножения слева на F_n, а справа на F_n^* имеем

$$\left(1 - \lambda^2\right) D_1^2 + 2\left(t_0^{(1)} - \lambda t_0^{(2)}\right) D_1 - \xi I_n = 0.$$

Получаем, что каждый диагональный элемент матрицы D_1 должен удовлетворять одному и тому же квадратному уравнению

$$\left(1 - \lambda^2\right) x^2 + 2\left(t_0^{(1)} - \lambda t_0^{(2)}\right) x - \xi = 0 \tag{15}$$

относительно x. Для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ условимся записывать корни как

$$\frac{-b \pm \left(b^2 - 4ac\right)^{1/2}}{2a} = \gamma \pm \delta.$$

Тогда, если обозначить корни уравнения (15) как $\gamma_1 \pm \delta_1$, то диагональную матрицу D_1 можно представить в виде

$$D_1 = \gamma_1 I_n + \delta_1 D_0^{(1)},$$

где $D_0^{(1)}$ – нескалярная инволютивная диагональная матрица, подчиненная условиям

$$\left\{D_0^{(2)}\right\}_{jj} = \left\{D_0^{(2)}\right\}_{n+2-j,n+2-j}, \quad j = 2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.$$

Тогда для самой матрицы C_1 справедливо представление

$$C^{(1)} = F_n^* D_1 F_n = \gamma_1 I_n + \delta_1 C_0, \tag{16}$$

где C_0 – нескалярный симметричный инволютивный циркулянт.

Проведем аналогичные рассуждения для косого циркулянта $S^{(1)}$. А именно, подставим представление $S^{(1)} = G_{-1} F_n^* D_2 F_n G_{-1}^*$ во второе уравнение (14)

$$\left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right) G_{-1} F_n^* D_2^2 F_n G_{-1}^* + 2\left(\frac{t_0^{(2)}}{\lambda} - t_0^{(1)}\right) G_{-1} F_n^* D_2 F_n G_{-1}^* =$$
$$= \left(\xi - \left(t_0^{(2)}\right)^2 + \left(t_0^{(1)}\right)^2\right) I_n.$$

После умножения слева на $F_n G_{-1}^*$, а справа на $G_{-1} F_n^*$ имеем

$$\left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right) D_2^2 + 2\left(\frac{t_0^{(2)}}{\lambda} - t_0^{(1)}\right) D_2 = \left(\xi - \left(t_0^{(2)}\right)^2 + \left(t_0^{(1)}\right)^2\right) I_n.$$

Получаем, что каждый диагональный элемент матрицы D_2 должен удовлетворять одному и тому же квадратному уравнению

$$\left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right) x^2 + 2\left(\frac{t_0^{(2)}}{\lambda} - t_0^{(1)}\right) x - \left(\xi - \left(t_0^{(2)}\right)^2 + \left(t_0^{(1)}\right)^2\right) = 0 \tag{17}$$

относительно x. Если предположить, что уравнение (17) имеет корни $\gamma_2 \pm \delta_2$, то диагональную матрицу D_2 можно записать в виде

$$D_2 = \gamma_2 I_n + \delta_2 D_0^{(2)},$$

где $D_0^{(2)}$ – нескалярная инволютивная диагональная матрица, подчиненная условиям

$$\left\{D_0^{(2)}\right\}_{11} = \left\{D_0^{(2)}\right\}_{22},$$
$$\left\{D_0^{(1)}\right\}_{jj} = \left\{D_0^{(1)}\right\}_{n+3-j,n+3-j}, \quad j = 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Тогда для самой матрицы $S^{(1)}$ справедливо представление

$$S^{(1)} = G_{-1} F_n^* D_2 F_n G_{-1}^* = \gamma_2 I_n + \delta_2 S_0, \tag{18}$$

в котором S_0 – нескалярный симметричный инволютивный косой циркулянт.

Заметим, что из нескалярности $C^{(1)}$ и $S^{(1)}$ следуют условия

$$\delta_1 \neq 0, \qquad \delta_2 \neq 0. \tag{19}$$

Используя представления (6), (13), (16) и (18), можем записать

$$
\begin{gathered}
T_1 = t_0^{(1)} I_n + C^{(1)} + S^{(1)} = t_0^{(1)} I_n + \gamma_1 I_n + \delta_1 C_0 + \gamma_2 I_n + \delta_2 S_0 = \\
= \left(t_0^{(1)} + \gamma_1 + \gamma_2\right) I_n + \delta_1 C_0 + \delta_2 S_0 = a I_n + \delta_1 C_0 + \delta_2 S_0, \\
T_2 = t_0^{(2)} I_n + C^{(2)} + S^{(2)} = t_0^{(2)} I_n + \lambda C^{(1)} + \frac{1}{\lambda} S^{(1)} = \\
= t_0^{(2)} I_n + \lambda\gamma_1 I_n + \lambda\delta_1 C_0 + \frac{1}{\lambda}\gamma_2 I_n + \frac{1}{\lambda}\delta_2 S_0 = \\
= \left(t_0^{(2)} + \lambda\gamma_1 + \frac{1}{\lambda}\gamma_2\right) I_n + \lambda\delta_1 C_0 + \frac{1}{\lambda}\delta_2 S_0 = b I_n + \lambda\delta_1 C_0 + \frac{1}{\lambda}\delta_2 S_0,
\end{gathered} \tag{20}
$$

где $a = t_0^{(1)} + \gamma_1 + \gamma_2$, $b = t_0^{(2)} + \lambda\gamma_1 + \frac{1}{\lambda}\gamma_2$.

Подставим выражения (20) в (5)

$$
\left(a^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2\right) I_n + 2a\delta_1 C_0 + 2a\delta_2 S_0 = \left(b^2 + \lambda^2\delta_1^2 + \frac{1}{\lambda^2}\delta_2^2\right) I_n + 2b\lambda\delta_1 C_0 + \frac{2b}{\lambda}\delta_2 S_0,
$$

или

$$
2(a - \lambda b)\delta_1 C_0 = \left(b^2 + \lambda^2\delta_1^2 + \frac{1}{\lambda^2}\delta_2^2 - a^2 - \delta_1^2 - \delta_2^2\right) I_n - 2\left(a - \frac{b}{\lambda}\right)\delta_2 S_0.
$$

Матрица в левой части является нескалярным циркулянтом, в правой – косым циркулянтом. Это возможно лишь в случае, если

$$
a = \lambda b \tag{21}
$$

и

$$
2\left(a - \frac{b}{\lambda}\right)\delta_2 S_0 = \left(b^2 + \lambda^2\delta_1^2 + \frac{1}{\lambda^2}\delta_2^2 - a^2 - \delta_1^2 - \delta_2^2\right) I_n. \tag{22}
$$

В последнем равенстве матрица в левой части является нескалярной, в правой – скалярной. Чтобы это равенство было верным, должно выполняться условие

$$
a = \frac{b}{\lambda}. \tag{23}
$$

Так как $\lambda \neq \pm 1$, то из (21) и (23) получаем, что $a = b = 0$ и (22) превращается в условие

$$
\delta_2 = \xi\lambda\delta_1, \quad \xi = \pm 1.
$$

Подстановка в (20) дает представление для T_1 и T_2

$$
\begin{gathered}
T_1 = \delta_1 C_0 + \xi\lambda\delta_1 S_0 = \delta_1 C_0 + \lambda\delta_1(\xi S_0), \\
T_2 = \lambda\delta_1 C_0 + \delta_1(\xi S_0).
\end{gathered}
$$

Приходим к классу 3 с $\alpha = \delta_1$, $\beta = \lambda\delta_1$ и нескалярными инволютивными циркулянтом C_0 и косым циркулянтом ξS_0. Из условия $\lambda \neq \pm 1$ и (19) имеем, что $\alpha \neq \pm\beta$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е.* Вычислительные процессы с тёплицевыми матрицами. М: Наука, 1987.
2. *Чугунов В.Н.* Нормальные и перестановочные тёплицевы и ганкелевы матрицы. М: Наука, 2017.
3. *Ефимов Н.В., Розендорн Е.Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия. М: Наука, 1975.