ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 5, с. 838–853

## УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 519.64

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2022 г. Э. Г. Халилов

*AZ 1010 Баку, пр-т Азадлыг, 20, Азербайджанский Государственный Университет Нефти и Промышленности, Азербайджан*

*e-mail: elnurkhalil@mail.ru*

Поступила в редакцию 20.08.2021 г.
Переработанный вариант 20.08.2021 г.
Принята к публикации 17.11.2021 г.

Дано обоснование метода коллокации для системы интегральных уравнений граничной задачи сопряжения для уравнения Гельмгольца в двухмерном пространстве. Построены квадратурные формулы для потенциалов простого и двойного слоев и нормальной производной потенциала простого слоя. В определенно выбранных точках система интегральных уравнений заменяется системой алгебраических уравнений, при этом устанавливаются существование и единственность решения системы алгебраических уравнений. Доказывается сходимость решения системы алгебраических уравнений к точному решению системы интегральных уравнений и указывается скорость сходимости метода. Кроме того, построена последовательность, сходящаяся к точному решению граничной задачи сопряжения. Библ. 16.

**Ключевые слова:** граничная задача сопряжения, уравнение Гельмгольца, система интегральных уравнений, потенциалы простого и двойного слоев, функция Ханкеля, квадратурные формулы, метод коллокации.

**DOI:** 10.31857/S0044466922050064

## 1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $D \subset R^2$ – ограниченная область с дважды непрерывно дифференцируемой границей $L$. Следует указать, что (см. [1, с. 112]) математическая формулировка задачи дифракции акустических волн на теле $D$ с различными акустическими характеристиками в $R^2 \backslash \bar{D}$ и $D$ приводит к задаче сопряжения, которая заключается в следующем: найти две функции $u \in C^{(2)}\left(R^2 \backslash \bar{D}\right) \cap C\left(R^2 \backslash D\right)$ и $u_0 \in C^{(2)}(D) \cap C(\bar{D})$, обладающие нормальной производной в смысле равномерной сходимости и удовлетворяющие уравнениям Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ в $R^2 \backslash \bar{D}$ и $\Delta u_0 + k^2 u_0 = 0$ в $D$, условию излучения Зоммерфельда

$$\left(\frac{x}{|x|}, \operatorname{grad}\, u(x)\right) - iku(x) = o\left(\frac{1}{|x|^{1/2}}\right), \quad x \to \infty,$$

равномерно по всем направлениям $x/|x|$ и условиям сопряжения

$$\mu u - \mu_0 u_0 = f \text{ на } L,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = g \text{ на } L,$$

где $\Delta$ – оператор Лапласа, $k$ и $k_0$ – волновые числа, причем $\operatorname{Im} k \geq 0$ и $\operatorname{Im} k_0 \geq 0$, $\nu(y)$ – внешняя единичная нормаль в точке $y \in L$, $f$ и $g$ – заданные непрерывные функции на $L$, а $\mu$ и $\mu_0$ – заданные комплексные числа, причем $\mu + \mu_0 \neq 0$. Отметим, что с физической точки зрения надлежащий выбор постоянных $\mu$ и $\mu_0$ гарантирует непрерывность давления и нормальной скорости акустических волн при переходе через границу $L$.

Пусть $\Phi_k(x,y)$ – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, т.е.

$$\Phi_k(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|x-y|} & \text{при} \quad k=0,\\ \dfrac{i}{4}H_0^{(1)}(k|x-y|) & \text{при} \quad k\neq 0,\end{cases}$$

где $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля I рода нулевого порядка, определяемая формулой $H_0^{(1)}(z)=J_0(z)+i\,N_0(z)$,

$$J_0(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

есть функция Бесселя нулевого порядка,

$$N_0(z)=\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{z}{2}+C\right)J_0(z)+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}\right)\frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

есть функция Неймана нулевого порядка, а $C=0.57721\ldots$ – постоянная Эйлера. Кресс и Роч (см. [2]) доказали, что комбинация потенциалов простого и двойного слоев

$$u(x)=\int_L\left\{\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial\nu(y)}\psi(y)+\mu\Phi_k(x,y)\varphi(y)\right\}dL_y,\quad x\in R^2\backslash\bar{D},$$

$$u_0(x)=\int_L\left\{\frac{\partial\Phi_{k_0}(x,y)}{\partial\nu(y)}\psi(y)+\mu_0\Phi_{k_0}(x,y)\varphi(y)\right\}dL_y,\quad x\in D,$$

с непрерывными плотностями $\psi$ и $\varphi$, является решением задачи сопряжения, если $\psi$ и $\varphi$ являются решениями системы интегральных уравнений

$$\begin{aligned}&\psi+\left(\frac{\mu}{\mu+\mu_0}K-\frac{\mu_0}{\mu+\mu_0}K_0\right)\psi+\left(\frac{\mu^2}{\mu+\mu_0}S-\frac{\mu_0^2}{\mu+\mu_0}S_0\right)\varphi=\frac{2f}{\mu+\mu_0},\\ &\varphi-\frac{1}{\mu+\mu_0}(T-T_0)\psi-\left(\frac{\mu}{\mu+\mu_0}\tilde{K}-\frac{\mu_0}{\mu+\mu_0}\tilde{K}_0\right)\varphi=-\frac{2g}{\mu+\mu_0},\end{aligned}\tag{1.1}$$

где

$$(S\varphi)(x)=2\int_L\Phi_k(x,y)\varphi(y)\,dL_y,\quad x\in L,\tag{1.2}$$

$$(K\psi)(x)=2\int_L\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial\nu(y)}\psi(y)\,dL_y,\quad x\in L,\tag{1.3}$$

$$(\tilde{K}\varphi)(x)=2\int_L\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial\nu(x)}\varphi(y)\,dL_y,\quad x\in L,\tag{1.4}$$

$$((T-T_0)\psi)(x)=2\int_L\frac{\partial}{\partial\nu(x)}\left(\frac{\partial(\Phi_k(x,y)-\Phi_{k_0}(x,y))}{\partial\nu(y)}\right)\psi(y)\,dL_y,\quad x\in L,\tag{1.5}$$

и

$$\Phi_{k_0}(x,y)=\Phi_k(x,y)\big|_{k=k_0},\quad S_0=S\big|_{k=k_0},\quad K_0=K\big|_{k=k_0},\quad \tilde{K}_0=\tilde{K}\big|_{k=k_0}.$$

Отметим, что ряд работ посвящены исследованию приближенных решений интегральных уравнений различных краевых задач для уравнения Гельмгольца (см. [3]–[7]), а в работе же [8] дано обоснование метода коллокации для системы интегральных уравнений задачи сопряжения для уравнения Гельмгольца в трехмерном пространстве. Однако до сих пор не исследованы приближенные решения задачи сопряжения для уравнения Гельмгольца в двухмерном пространстве методом интегральных уравнений. Как известно, в трехмерном пространстве фундаментальное решение уравнения Гельмгольца имеет вид

$$\Phi_k(x,y) = \frac{\exp(ik|x-y|)}{4\pi|x-y|}, \quad x, y \in R^3, \quad x \neq y,$$

и поэтому интегральные операторы, участвующие в системе (1.1) строго отличаются от интегральных операторов, участвующих в системе интегральных уравнений для задачи сопряжения для уравнения Гельмгольца в трехмерном пространстве. Кроме того, в [9] построена квадратурная формула для логарифмических потенциалов простого и двойного слоев, а в [10] построена квадратурная формула для потенциалов простого и двойного слоев. Однако в [10] для построения квадратурных формул использована асимптотическая формула для функций Ханкеля I рода нулевого порядка, которая не дает возможность определить скорость сходимости этих квадратурных формул. Поэтому более практичным способом построения квадратурных формул для потенциалов простого и двойного слоев, а также исследование приближенного решения задачи сопряжения для уравнения Гельмгольца в двухмерном пространстве методом системы интегральных уравнений (1.1) имеет важные значения, чему и посвящена настоящая заметка.

## 2. ПОСТРОЕНИЕ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ (1.2)–(1.5)

Предположим, что замкнутая и дважды непрерывно дифференцируемая кривая $L \subset R^2$ задана параметрическим уравнением $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $t \in [a,b]$. Разобьем промежуток $[a,b]$ на $n > 2M_0(b-a)/d$ равных частей: $t_p = a + \dfrac{(b-a)p}{n}$, $p = \overline{0,n}$, где $M_0 = \max\limits_{t\in[a,b]} \sqrt{\left(x_1'(t)\right)^2 + \left(x_2'(t)\right)^2} < +\infty$ (см. [11, с. 560]) и $d$ – стандартный радиус (см. [12, с. 400]). В качестве опорных точек возьмем $x(\tau_p)$, $p = \overline{1,n}$, где $\tau_p = a + \dfrac{(b-a)(2p-1)}{2n}$. Тогда кривая $L$ разбивается на элементарные части: $L = \bigcup_{p=1}^{n} L_p$, где $L_p = \{x(t) : t_{p-1} \le t \le t_p\}$.

Известно, что (см. [9])

(1) $\forall p \in \{1, 2, \ldots, n\}$: $r_p(n) \sim R_p(n)$, где $r_p(n) = \min\{|x(\tau_p) - x(t_{p-1})|, |x(t_p) - x(\tau_p)|\}$, $R_p(n) = \max\{|x(\tau_p) - x(t_{p-1})|, |x(t_p) - x(\tau_p)|\}$, а запись $a(n) \sim b(n)$ означает, что

$$C_1 \le \frac{a(n)}{b(n)} \le C_2,$$

где $C_1$ и $C_2$ – положительные постоянные, не зависящие от $n$;

(2) $\forall p \in \{1, 2, \ldots, n\}$: $R_p(n) \le d/2$;

(3) $\forall p, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$: $r_j(n) \sim r_p(n)$;

(4) $r(n) \sim R(n) \sim \dfrac{1}{n}$, где $R(n) = \max\limits_{p=\overline{1,n}} R_p(n)$, $r(n) = \min\limits_{p=\overline{1,n}} r_p(n)$.

В дальнейшем такое разбиение будем называть разбиением кривой $L$ на "регулярные" элементарные части.

Поступая точно также, как и в доказательстве леммы 2.1 работы [13], можно показать справедливость следующей леммы.

**Лемма 1.** *Существуют такие постоянные $C_0' > 0$ и $C_1' > 0$, не зависящие от $n$, для которых при $\forall p, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $j \neq p$, и $\forall y \in L_j$ справедливы следующие неравенства*:

$$C_0'|y - x(\tau_p)| \le |x(\tau_j) - x(\tau_p)| \le C_1'|y - x(\tau_p)|.$$

Через $C(L)$ обозначим пространство всех непрерывных функций на $L$ с нормой $\|\varphi\|_\infty = \max\limits_{x\in L} |\varphi(x)|$, и для функции $\varphi \in C(L)$ вводим модуль непрерывности вида

$$\omega(\varphi,\delta) = \max_{\substack{|x-y|\le\delta \\ x,y\in L}} |\varphi(x) - \varphi(y)|, \quad \delta > 0.$$

Сначала построим квадратурную формулу для интеграла (1.2). Пусть

$$\Phi_k^n(x,y) = \frac{i}{4} H_{0,n}^{(1)}(k|x-y|), \quad x,y \in L, \quad x \neq y,$$

где

$$H_{0,n}^{(1)}(z) = J_{0,n}(z) + iN_{0,n}(z),$$

$$J_{0,n}(z) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m},$$

и

$$N_{0,n}(z) = \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{z}{2} + C\right) J_{0,n}(z) + \sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{l}\right) \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}.$$

**Теорема 1.** *Пусть $L$ – замкнутая и дважды непрерывно дифференцируемая кривая в $R^2$ и $\varphi \in C(L)$. Тогда выражение*

$$(S_n\varphi)(x(\tau_p)) = \frac{2(b-a)}{n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2 + \left(x_2'(\tau_j)\right)^2}\, \varphi(x(\tau_j))$$

*в опорных точках $x(\tau_p)$, $p = \overline{1,n}$, является квадратурной формулой для интеграла* (1.2)*, причем справедлива следующая оценка*:

$$\max_{p=\overline{1,n}} \left|(S\varphi)(x(\tau_p)) - (S_n\varphi)(x(\tau_p))\right| \leq M\left(\omega(\varphi,1/n) + \|\varphi\|_\infty \frac{\ln n}{n}\right).$$

(Здесь и далее через $M$ будем обозначать положительные постоянные, разные в различных неравенствах.)

**Доказательство.** Несложно заметить, что

$$(S\varphi)(x(\tau_p)) - (S_n\varphi)(x(\tau_p)) = 2\int_{L_p} \Phi_k(x(\tau_p), y)\varphi(y) dL_y +$$

$$+ 2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} \int_{L_j} \left(\Phi_k(x(\tau_p), y) - \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))\right) \varphi(y)\, dL_y +$$

$$+ 2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} \int_{L_j} \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))(\varphi(y) - \varphi(x(\tau_j)))\, dL_y +$$

$$+ 2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \left(\sqrt{\left(x_1'(t)\right)^2 + \left(x_2'(t)\right)^2} - \sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2 + \left(x_2'(\tau_j)\right)^2}\right) \varphi(x(\tau_j))\, dt.$$

Слагаемые в последнем равенстве обозначим через $h_1^n(x(\tau_p))$, $h_2^n(x(\tau_p))$, $h_3^n(x(\tau_p))$ и $h_4^n(x(\tau_p))$ соответственно.

Очевидно, что

$$\left|J_0(k|x-y|)\right| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(|k|\,\mathrm{diam}L)^{2m}}{4^m (m!)^2} \leq M \quad \forall x,y \in L, \tag{2.1}$$

и

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{l}\right) \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} \left(\frac{k|x-y|}{2}\right)^{2m}\right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{l}\right) \frac{(|k|\,\mathrm{diam}L)^{2m}}{4^m (m!)^2} \leq M \quad \forall x,y \in L, \tag{2.2}$$

следовательно,

$$\left|\Phi_k(x,y)\right| \le M\left|\ln|x-y|\right| \quad \forall x,y\in L, \quad x\ne y. \tag{2.3}$$

Тогда, применяя формулу вычисления криволинейного интеграла, находим

$$\left|h_1^n\left(x\left(\tau_p\right)\right)\right| \le 2\|\varphi\|_\infty \int\limits_{L_p}\left|\Phi_k\left(x\left(\tau_p\right),y\right)\right|dL_y \le M\|\varphi\|_\infty\int\limits_0^{R(n)}|\ln\tau|\,d\tau \le M\|\varphi\|_\infty R(n)\left|\ln R(n)\right|.$$

Пусть $y\in L_j$ и $j\ne p$. Учитывая лемму 1, имеем

$$\left|\left|x\left(\tau_p\right)-y\right|^q-\left|x\left(\tau_p\right)-x\left(\tau_j\right)\right|^q\right| \le Mq\left|x\left(\tau_j\right)-y\right|\left|x\left(\tau_p\right)-y\right|^{q-1} \le MqR(n)\left(\operatorname{diam}L\right)^{q-1} \tag{2.4}$$

и

$$\begin{gathered}\left|\ln\left(k\left|x\left(\tau_p\right)-y\right|\right)-\ln\left(k\left|x\left(\tau_p\right)-x\left(\tau_j\right)\right|\right)\right| = \left|\ln\left(1+\frac{\left|x\left(\tau_p\right)-x\left(\tau_j\right)\right|-\left|x\left(\tau_p\right)-y\right|}{\left|x\left(\tau_p\right)-y\right|}\right)\right| \le \\ \le \left|\ln\left(1+\frac{\left|x\left(\tau_j\right)-y\right|}{\left|x\left(\tau_p\right)-y\right|}\right)\right| \le M\frac{R(n)}{\left|x\left(\tau_p\right)-y\right|},\end{gathered} \tag{2.5}$$

где $q\in\mathbb{N}$. Тогда, принимая во внимание неравенства (2.1), (2.2), (2.4) и (2.5), получаем, что

$$\begin{gathered}\left|\Phi_k\left(x\left(\tau_p\right),y\right)-\Phi_k\left(x\left(\tau_p\right),x\left(\tau_j\right)\right)\right| \le \\ \le \frac14\left|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\left(\frac{k\left|x\left(\tau_p\right)-y\right|}{2}\right)^{2m}-\left(\frac{k\left|x\left(\tau_p\right)-x\left(\tau_j\right)\right|}{2}\right)^{2m}\right)\right| + \\ + \frac{1}{2\pi}\left|\left(\ln\frac{k\left|x\left(\tau_p\right)-x\left(\tau_j\right)\right|}{2}+C\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\left(\frac{k\left|x\left(\tau_p\right)-y\right|}{2}\right)^{2m}-\left(\frac{k\left|x\left(\tau_p\right)-x\left(\tau_j\right)\right|}{2}\right)^{2m}\right)\right| + \\ + \frac{1}{2\pi}\left|\left(\ln\left(k\left|x\left(\tau_p\right)-y\right|\right)-\ln\left(k\left|x\left(\tau_p\right)-x\left(\tau_j\right)\right|\right)\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{k\left|x\left(\tau_p\right)-y\right|}{2}\right)^{2m}\right| + \\ + \frac14\left|\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac1l\right)\frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2}\left(\left(\frac{k\left|x\left(\tau_p\right)-y\right|}{2}\right)^{2m}-\left(\frac{k\left|x\left(\tau_p\right)-x\left(\tau_j\right)\right|}{2}\right)^{2m}\right)\right| \le \frac{MR(n)}{\left|x\left(\tau_p\right)-y\right|}.\end{gathered}$$

Кроме того, учитывая неравенства

$$\left|J_0\left(k|x-y|\right)-J_{0,n}\left(k|x-y|\right)\right| \le \sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{|k|^{2m}|x-y|^{2m}}{4^m(m!)^2} \le \frac{M}{(n+1)!} \quad \forall x,y\in L, \tag{2.6}$$

и

$$\left|N_0\left(k|x-y|\right)-N_{0,n}\left(k|x-y|\right)\right| \le \frac{M\left|\ln|x-y|\right|}{(n+1)!} \quad \forall x,y\in L, \tag{2.7}$$

имеем

$$\left|\Phi_k\left(x\left(\tau_p\right),x\left(\tau_j\right)\right)-\Phi_k^n\left(x\left(\tau_p\right),x\left(\tau_j\right)\right)\right| \le \frac{M\left|\ln\left|x\left(\tau_p\right)-x\left(\tau_j\right)\right|\right|}{(n+1)!} \le \frac{M}{(n+1)!\left|x\left(\tau_p\right)-y\right|}.$$

В результате находим, что

$$\begin{gathered}\left|\Phi_k\left(x\left(\tau_p\right),y\right)-\Phi_k^n\left(x\left(\tau_p\right),x\left(\tau_j\right)\right)\right| \le \left|\Phi_k\left(x\left(\tau_p\right),y\right)-\Phi_k\left(x\left(\tau_p\right),x\left(\tau_j\right)\right)\right| + \\ + \left|\Phi_k\left(x\left(\tau_p\right),x\left(\tau_j\right)\right)-\Phi_k^n\left(x\left(\tau_p\right),x\left(\tau_j\right)\right)\right| \le \frac{M}{\left|x\left(\tau_p\right)-y\right|}\left(R(n)+\frac{1}{(n+1)!}\right).\end{gathered}$$

Следовательно,

$$\left|h_2^n(x(\tau_p))\right| \le M\|\varphi\|_\infty\left(R(n)+\frac{1}{(n+1)!}\right)\int\limits_{r(n)}^{\operatorname{diam}L}\frac{d\tau}{\tau} \le M\|\varphi\|_\infty\left(R(n)+\frac{1}{(n+1)!}\right)\left|\ln R(n)\right|.$$

Из неравенства (2.3), получаем, что

$$\int\limits_L\left|\Phi_k(x,y)\right|dL_y$$

сходится как несобственный и

$$\int\limits_L\left|\Phi_k(x,y)\right|dL_y \le M \quad \forall x\in L.$$

Тогда из неравенства (2.6) и (2.7) получим

$$\int\limits_L\left|\Phi_k^n(x,y)\right|dL_y \le \int\limits_L\left|\Phi_k(x,y)\right|dL_y + \int\limits_L\left|\Phi_k(x,y)-\Phi_k^n(x,y)\right|dL_y \le M \quad \forall x\in L, \quad \forall n\in \mathrm{N}.$$

В итоге, принимая во внимание лемму 1, получаем, что

$$\left|h_3^n(x(\tau_p))\right| \le M\omega(\varphi,R(n))\int\limits_L\left|\Phi_k^n(x(\tau_p),y)\right|dL_y \le M\omega(\varphi,R(n)).$$

Очевидно, что

$$\left|\sqrt{\left(x_1'(t)\right)^2+\left(x_2'(t)\right)^2}-\sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2+\left(x_2'(\tau_j)\right)^2}\right| \le MR(n) \quad \forall t\in[t_{j-1},t_j]. \tag{2.8}$$

Пусть $y\in L_j$ и $j\neq p$. Учитывая леммы 1 и неравенства (2.1) и (2.2), имеем

$$\left|J_{0,n}(k\left|x(\tau_p)-x(\tau_j)\right|)\right| \le \sum_{m=0}^{n}\frac{\left(|k|\operatorname{diam}L\right)^{2m}}{4^m(m!)^2} \le M \quad \forall n\in \mathrm{N},$$

и

$$\left|N_{0,n}(k\left|x(\tau_p)-x(\tau_j)\right|)\right| \le M\left|\ln\left|x(\tau_p)-y\right|\right| \quad \forall n\in \mathrm{N},$$

следовательно,

$$\left|\Phi_k^n(x(\tau_p),x(\tau_j))\right| \le M\left|\ln\left|x(\tau_p)-y\right|\right| \quad \forall n\in \mathrm{N}.$$

Отсюда получаем, что

$$\left|h_4^n(x(\tau_p))\right| \le M\|\varphi\|_\infty R(n)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\left|\Phi_k^n(x(\tau_p),x(\tau_j))\right|dt \le$$

$$\le M\|\varphi\|_\infty R(n)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}\int\limits_{L_j}\left|\Phi_k^n(x(\tau_p),x(\tau_j))\right|dL_y \le M\|\varphi\|_\infty R(n)\int\limits_L\left|\ln\left|x(\tau_p)-y\right|\right|dL_y \le M\|\varphi\|_\infty R(n).$$

В результате, суммируя полученные оценки для выражений $h_1^n(x(\tau_p))$, $h_2^n(x(\tau_p))$, $h_3^n(x(\tau_p))$ и $h_4^n(x(\tau_p))$, и, принимая во внимание соотношение $R(n)\sim\frac{1}{n}$, доказываем справедливость теоремы 1.

Теперь построим квадратурную формулу для интеграла (1.3). Нетрудно показать, что

$$\frac{\partial\Phi_k^n(x,y)}{\partial\nu(y)} = \frac{i}{4}\left(\frac{\partial J_{0,n}(k|x-y|)}{\partial\nu(y)}+i\frac{\partial N_{0,n}(k|x-y|)}{\partial\nu(y)}\right),$$

где

$$\frac{\partial J_{0,n}(k|x-y|)}{\partial \nu(y)} = (y-x, \nu(y)) \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m k^{2m} |x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1}(m-1)!\,m!}$$

и

$$\frac{\partial N_{0,n}(k|x-y|)}{\partial \nu(y)} = \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{k|x-y|}{2} + C\right)\frac{\partial J_{0,n}(k|x-y|)}{\partial \nu(y)} + \frac{2(y-x,\nu(y))}{\pi|x-y|^2} J_{0,n}(k|x-y|) +$$
$$+ (y-x,\nu(y)) \sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}\right)\frac{(-1)^{m+1} k^{2m}|x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1}(m-1)!\,m!}.$$

Справедлива следующая

**Теорема 2.** *Пусть $L$ — замкнутая и дважды непрерывно дифференцируемая кривая в $R^2$ и $\psi \in C(L)$. Тогда выражение*

$$(K_n\psi)(x(\tau_p)) = \frac{2(b-a)}{n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial \nu(x(\tau_j))} \sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2 + \left(x_2'(\tau_j)\right)^2}\, \psi(x(\tau_j))$$

*в опорных точках $x(\tau_p)$, $p = \overline{1, n}$, является квадратурной формулой для интеграла* (1.3)*, причем справедлива следующая оценка*:

$$\max_{p=\overline{1,n}} \left|(K\psi)(x(\tau_p)) - (K_n\psi)(x(\tau_p))\right| \le M\left(\omega(\psi, 1/n) + \|\psi\|_\infty \frac{\ln n}{n}\right).$$

**Доказательство.** Нетрудно увидеть, что

$$(K\psi)(x(\tau_p)) - (K_n\psi)(x(\tau_p)) = 2\int_{L_p} \frac{\partial \Phi_k(x(\tau_p), y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) dL_y +$$
$$+ 2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} \int_{L_j} \left(\frac{\partial \Phi_k(x(\tau_p), y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial \nu(x(\tau_j))}\right) \psi(y)\, dL_y +$$
$$+ 2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} \int_{L_j} \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial \nu(x(\tau_j))} (\psi(y) - \psi(x(\tau_j)))\, dL_y +$$
$$+ 2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial \nu(x(\tau_j))} \left(\sqrt{\left(x_1'(t)\right)^2 + \left(x_2'(t)\right)^2} - \sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2 + \left(x_2'(\tau_j)\right)^2}\right) \psi(x(\tau_j))\, dt.$$

Слагаемые в последнем равенстве обозначим через $\delta_1^n(x(\tau_p))$, $\delta_2^n(x(\tau_p))$, $\delta_3^n(x(\tau_p))$ и $\delta_4^n(x(\tau_p))$ соответственно.

Легко вычислить, что

$$\frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \nu(y)} = \frac{i}{4}\left(\frac{\partial J_0(k|x-y|)}{\partial \nu(y)} + i\frac{\partial N_0(k|x-y|)}{\partial \nu(y)}\right),$$

здесь

$$\frac{\partial J_0(k|x-y|)}{\partial \nu(y)} = (y-x, \nu(y)) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m k^{2m} |x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1}(m-1)!\,m!}$$

и

$$\frac{\partial N_0(k|x-y|)}{\partial \nu(y)} = \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{k|x-y|}{2}+C\right)\frac{\partial J_0(k|x-y|)}{\partial \nu(y)} + \frac{2(y-x,\nu(y))}{\pi|x-y|^2}J_0(k|x-y|) +$$
$$+ (y-x,\nu(y))\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}\right)\frac{(-1)^{m+1}k^{2m}|x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1}(m-1)!\,m!}.$$

Так как (см. [12, с. 403])

$$|(y-x,\nu(y))| \le M|x-y|^2, \tag{2.9}$$

то

$$\left|\frac{\partial J_0(k|x-y|)}{\partial \nu(y)}\right| \le M|x-y|^2 \tag{2.10}$$

и

$$\left|\frac{\partial N_0(k|x-y|)}{\partial \nu(y)}\right| \le M\left(|x-y|^2\left|\ln|x-y|\right| + |x-y|^2+1\right), \tag{2.11}$$

а значит,

$$\left|\frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \nu(y)}\right| \le M \quad \forall\, x,y\in L, \quad x\ne y. \tag{2.12}$$

Тогда, учитывая формулу вычисления криволинейного интеграла, получаем

$$\left|\delta_1^n(x(\tau_p))\right| \le M\|\psi\|_\infty \int_0^{R(n)} d\tau \le M\|\psi\|_\infty R(n).$$

Пусть $y\in L_j$ и $j\ne p$. Из леммы 1 и неравенства (2.9) очевидно, что

$$\begin{gathered}\left|(y-x(\tau_p),\nu(y)) - (x(\tau_j)-x(\tau_p),\nu(x(\tau_j)))\right| = |(y-x(\tau_j),\nu(y))| +\\ + \left|(x(\tau_j)-x(\tau_p),\nu(y)-\nu(x(\tau_j)))\right| \le M|y-x(\tau_p)|R(n).\end{gathered} \tag{2.13}$$

Тогда, учитывая неравенства (2.4), получаем, что

$$\begin{gathered}\left|\frac{\partial J_0(k|x(\tau_p)-y|)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial J_0(k|x(\tau_p)-x(\tau_j)|)}{\partial \nu(x(\tau_j))}\right| \le\\ \le \left|(y-x(\tau_p),\nu(y)) - (x(\tau_j)-x(\tau_p),\nu(x(\tau_j)))\right|\times\\ \times\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|k|^{2m}|x(\tau_p)-y|^{2m-2}}{2^{2m-1}(m-1)!\,m!} + \left|(x(\tau_j)-x(\tau_p),\nu(x(\tau_j)))\right|\times\\ \times\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|k|^{2m}\left||x(\tau_p)-x(\tau_j)|^{2m-2} - |x(\tau_p)-y|^{2m-2}\right|}{2^{2m-1}(m-1)!\,m!} \le M|y-x(\tau_p)|R(n).\end{gathered} \tag{2.14}$$

Кроме того, из леммы 1 и неравенств (2.9) и (2.13) имеем

$$\left|\frac{(y-x(\tau_p),\nu(y))}{|x(\tau_p)-y|^2} - \frac{(x(\tau_j)-x(\tau_p),\nu(x(\tau_j)))}{|x(\tau_p)-x(\tau_j)|^2}\right| \le \frac{MR(n)}{|x(\tau_p)-y|}.$$

Тогда, принимая во внимание неравенства (2.1), (2.5), (2.10), (2.11), (2.13) и (2.14), нетрудно показать, что

$$\left|\frac{\partial N_0(k|x(\tau_p)-y|)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial N_0(k|x(\tau_p)-x(\tau_j)|)}{\partial \nu(x(\tau_j))}\right| \le \frac{MR(n)}{|x(\tau_p)-y|}.$$

В результате находим

$$\left|\frac{\partial\Phi_k(x(\tau_p),y)}{\partial\nu(y)}-\frac{\partial\Phi_k(x(\tau_p),x(\tau_j))}{\partial\nu(x(\tau_j))}\right|\le\frac{MR(n)}{|x(\tau_p)-y|}.$$

Также, учитывая неравенство

$$\left|\frac{\partial\Phi_k(x(\tau_p),x(\tau_j))}{\partial\nu(x(\tau_j))}-\frac{\partial\Phi_k^n(x(\tau_p),x(\tau_j))}{\partial\nu(x(\tau_j))}\right|\le\frac{M\left|\ln|x(\tau_p)-y|\right|}{n!},\tag{2.15}$$

получаем, что

$$\left|\frac{\partial\Phi_k(x(\tau_p),y)}{\partial\nu(y)}-\frac{\partial\Phi_k^n(x(\tau_p),x(\tau_j))}{\partial\nu(x(\tau_j))}\right|\le M\left(\frac{R(n)}{|x(\tau_p)-y|}+\frac{\left|\ln|x(\tau_p)-y|\right|}{n!}\right).$$

В итоге

$$\left|\delta_2^n(x(\tau_p))\right|\le M\|\psi\|_\infty\left(R(n)\int_{r(n)}^{\operatorname{diam}L}\frac{d\tau}{\tau}+\frac{1}{n!}\int_{r(n)}^{\operatorname{diam}L}|\ln\tau|\,d\tau\right)\le M\|\psi\|_\infty\left(R(n)|\ln R(n)|+\frac{1}{n!}\right).$$

Пусть $y\in L_j$ и $j\ne p$. Так как из леммы 1 и неравенства (2.12) и (2.15) очевидно, что

$$\begin{gathered}\left|\frac{\partial\Phi_k^n(x(\tau_p),x(\tau_j))}{\partial\nu(x(\tau_j))}\right|\le\left|\frac{\partial\Phi_k(x(\tau_p),x(\tau_j))}{\partial\nu(x(\tau_j))}\right|+\left|\frac{\partial\Phi_k(x(\tau_p),x(\tau_j))}{\partial\nu(x(\tau_j))}-\frac{\partial\Phi_k^n(x(\tau_p),x(\tau_j))}{\partial\nu(x(\tau_j))}\right|\le\\ \le\frac{M\left|\ln|x(\tau_p)-y|\right|}{n!}\quad\forall n\in\mathrm{N},\end{gathered}\tag{2.16}$$

тогда

$$\left|\delta_3^n(x(\tau_p))\right|\le2\omega(\psi,R(n))\int_L\left|\frac{\partial\Phi_k^n(x(\tau_p),x(\tau_j))}{\partial\nu(y)}\right|dL_y\le M\omega(\psi,R(n)).$$

Кроме того, учитывая леммы 1 и неравенства (2.8) и (2.16), получаем

$$\begin{gathered}\left|\delta_4^n(x(\tau_p))\right|\le M\|\psi\|_\infty R(n)\sum_{\substack{j=1\\j\ne p}}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left|\frac{\partial\Phi_k^n(x(\tau_p),x(\tau_j))}{\partial\nu(x(\tau_j))}\right|dt\le\\ \le M\|\psi\|_\infty R(n)\int_L\left|\frac{\partial\Phi_k^n(x(\tau_p),x(\tau_j))}{\partial\nu(x(\tau_j))}\right|dL_y\le M\|\psi\|_\infty R(n).\end{gathered}$$

В результате, суммируя полученные оценки для выражений $\delta_1^n(x(\tau_p))$, $\delta_2^n(x(\tau_p))$, $\delta_3^n(x(\tau_p))$ и $\delta_4^n(x(\tau_p))$, и учитывая соотношение $R(n)\sim\dfrac{1}{n}$, получаем доказательство теоремы 2.

Очевидно, что

$$\frac{\partial\Phi_k^n(x,y)}{\partial\nu(x)}=\frac{i}{4}\left(\frac{\partial J_{0,n}(k|x-y|)}{\partial\nu(x)}+i\frac{\partial N_{0,n}(k|x-y|)}{\partial\nu(x)}\right),$$

где

$$\frac{\partial J_{0,n}(k|x-y|)}{\partial\nu(x)}=(x-y,\nu(x))\sum_{m=1}^n\frac{(-1)^m k^{2m}|x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1}(m-1)!\,m!}$$

и

$$\frac{\partial N_{0,n}(k|x-y|)}{\partial \nu(x)} = \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{k|x-y|}{2}+C\right)\frac{\partial J_{0,n}(k|x-y|)}{\partial \nu(x)} + \frac{2(x-y,\nu(x))}{\pi|x-y|^2}J_{0,n}(k|x-y|) +$$
$$+(x-y,\nu(x))\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}\right)\frac{(-1)^{m+1}k^{2m}|x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1}(m-1)!\,m!}.$$

Тогда, поступая точно также, как и в доказательстве теоремы 2, можно доказать следующую теорему.

**Теорема 3.** *Пусть $L$ — замкнутая и дважды непрерывно дифференцируемая кривая в $R^2$ и $\varphi\in C(L)$. Тогда выражение*

$$\left(\tilde{K}_n\varphi\right)(x(\tau_p)) = \frac{2(b-a)}{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}\frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p),x(\tau_j))}{\partial \nu(x(\tau_p))}\sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2+\left(x_2'(\tau_j)\right)^2}\,\varphi(x(\tau_j))$$

*в опорных точках $x(\tau_p)$, $p=\overline{1,n}$, является квадратурной формулой для интеграла* (1.4)*, причем справедлива следующая оценка*:

$$\max_{p=\overline{1,n}}\left|\left(\tilde{K}\varphi\right)(x(\tau_p)) - \left(\tilde{K}_n\varphi\right)(x(\tau_p))\right| \le M\left(\omega(\varphi,1/n)+\|\varphi\|_\infty\frac{\ln n}{n}\right).$$

Кроме того, можно убедиться, что

$$\frac{\partial}{\partial \nu(x)}\left(\frac{\partial \Phi_k^n(x,y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \Phi_{k_0}^n(x,y)}{\partial \nu(y)}\right) = \frac{i}{4}\frac{\partial}{\partial \nu(x)}\left(\frac{\partial J_{0,n}(k|x-y|)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial J_{0,n}(k_0|x-y|)}{\partial \nu(y)}\right) -$$
$$-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial \nu(x)}\left(\frac{\partial N_{0,n}(k|x-y|)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial N_{0,n}(k_0|x-y|)}{\partial \nu(y)}\right),$$

где

$$\frac{\partial}{\partial \nu(x)}\left(\frac{\partial J_{0,n}(k|x-y|)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial J_{0,n}(k_0|x-y|)}{\partial \nu(y)}\right) = (\nu(x),\nu(y))\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{m+1}\left(k^{2m}-k_0^{2m}\right)|x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1}(m-1)!\,m!} +$$
$$+(y-x,\nu(y))(x-y,\nu(x))\sum_{m=2}^{n}\frac{(-1)^{m}\left(k^{2m}-k_0^{2m}\right)|x-y|^{2m-4}}{2^{2m-2}(m-2)!\,m!}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial \nu(x)}\left(\frac{\partial N_{0,n}(k|x-y|)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial N_{0,n}(k_0|x-y|)}{\partial \nu(y)}\right) =$$
$$=\frac{2}{\pi}(\ln k-\ln k_0)(y-x,\nu(y))(x-y,\nu(x))\sum_{m=2}^{n}\frac{(-1)^{m}k^{2m}|x-y|^{2m-4}}{2^{2m-2}(m-2)!\,m!} +$$
$$+\frac{2(x-y,\nu(x))}{\pi|x-y|^2}\left(\frac{\partial J_{0,n}(k|x-y|)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial J_{0,n}(k_0|x-y|)}{\partial \nu(y)}\right) +$$
$$+\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{k_0|x-y|}{2}+C\right)\frac{\partial}{\partial \nu(x)}\left(\frac{\partial J_{0,n}(k|x-y|)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial J_{0,n}(k_0|x-y|)}{\partial \nu(y)}\right) -$$
$$-\frac{2(\nu(x),\nu(y))|x-y|^2+4(y-x,\nu(y))(x-y,\nu(x))}{\pi|x-y|^4}\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{m}\left(k^{2m}-k_0^{2m}\right)|x-y|^{2m}}{2^{2m}(m!)^2} +$$
$$+\frac{2(y-x,\nu(y))}{\pi|x-y|^2}\left(\frac{\partial J_{0,n}(k|x-y|)}{\partial \nu(x)} - \frac{\partial J_{0,n}(k_0|x-y|)}{\partial \nu(x)}\right) -$$

$$
-(\nu(x),\nu(y))\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}\right)\frac{(-1)^{m+1}\left(k^{2m}-k_0^{\,2m}\right)|x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1}(m-1)!\,m!}+
$$

$$
+(y-x,\nu(y))(x-y,\nu(x))\sum_{m=2}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}\right)\frac{(-1)^{m+1}\left(k^{2m}-k_0^{\,2m}\right)|x-y|^{2m-4}}{2^{2m-2}(m-2)!\,m!}.
$$

Тогда также справедлива следующая

**Теорема 4.** *Пусть $L$ — замкнутая и дважды непрерывно дифференцируемая кривая в $R^2$ и $\psi\in C(L)$. Тогда выражение*

$$
((T-T_0)_n\,\psi)(x(\tau_p))=\frac{2(b-a)}{n}\times
$$

$$
\times\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}\frac{\partial}{\partial\nu(x(\tau_p))}\left(\frac{\partial\Phi_k^n(x(\tau_p),x(\tau_j))}{\partial\nu(x(\tau_j))}-\frac{\partial\Phi_{k_0}^n(x(\tau_p),x(\tau_j))}{\partial\nu(x(\tau_j))}\right)\sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2+\left(x_2'(\tau_j)\right)^2}\,\psi(x(\tau_j))
$$

*в опорных точках $x(\tau_p)$, $p=\overline{1,n}$, является квадратурной формулой для интеграла* (1.5)*, причем справедлива следующая оценка*:

$$
\max_{p=\overline{1,n}}\left|((T-T_0)\,\psi)(x(\tau_p))-((T-T_0)_n\,\psi)(x(\tau_p))\right|\le M\left(\omega(\psi,1/n)+\|\psi\|_\infty\frac{\ln n}{n}\right).
$$

## 3. ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (1.1)

Пусть $C^{2n}$ — пространство $2n$-мерных векторов $z^{2n}=\left(z_1^{2n},z_2^{2n},\ldots,z_{2n}^{2n}\right)^{\mathrm{T}}$, $z_l^{2n}\in C$, $l=\overline{1,2n}$, с нормой $\left\|z^{2n}\right\|=\max_{l=\overline{1,2n}}\left|z_l^{2n}\right|$, где запись “$a^{\mathrm{T}}$” означает транспонировку вектора $a$. Рассмотрим $2n$-мерную матрицу $A^{2n}=(a_{pj})_{p,j=1}^{2n}$ с элементами

$$
a_{pj}=0\quad\text{при}\quad p=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,n}\quad\text{и}\quad p=j;
$$

$$
a_{pj}=\frac{2(b-a)\sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2+\left(x_2'(\tau_j)\right)^2}}{(\mu+\mu_0)\,n}\left(\mu\frac{\partial\Phi_k^n(x(\tau_p),x(\tau_j))}{\partial\nu(x(\tau_j))}-\mu_0\frac{\partial\Phi_{k_0}^n(x(\tau_p),x(\tau_j))}{\partial\nu(x(\tau_j))}\right)
$$

$$
\text{при}\quad p=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,n}\quad\text{и}\quad p\neq j;
$$

$$
a_{pj}=0\quad\text{при}\quad p=\overline{1,n},\quad j=\overline{n+1,2n}\quad\text{и}\quad p=j-n;
$$

$$
a_{pj}=\frac{2(b-a)\sqrt{\left(x_1'(\tau_{j-n})\right)^2+\left(x_2'(\tau_{j-n})\right)^2}}{(\mu+\mu_0)\,n}\left(\mu^2\Phi_k^n(x(\tau_p),x(\tau_{j-n}))-\mu_0^2\Phi_{k_0}^n(x(\tau_p),x(\tau_{j-n}))\right)
$$

$$
\text{при}\quad p=\overline{1,n},\quad j=\overline{n+1,2n}\quad\text{и}\quad p\neq j-n;
$$

$$
a_{pj}=0\quad\text{при}\quad p=\overline{n+1,2n},\quad j=\overline{1,n}\quad\text{и}\quad p=j+n;
$$

$$
a_{pj}=\frac{2(b-a)\sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2+\left(x_2'(\tau_j)\right)^2}}{(\mu+\mu_0)\,n}\times
$$

$$
\times\frac{\partial}{\partial\nu(x(\tau_{p-n}))}\left(\frac{\partial\left(\Phi_{k_0}^n(x(\tau_{p-n}),x(\tau_j))-\Phi_k^n(x(\tau_{p-n}),x(\tau_j))\right)}{\partial\nu(x(\tau_j))}\right)
$$

$$\text{при} \quad p = \overline{n+1, 2n}, \quad j = \overline{1, n} \quad \text{и} \quad p \neq j + n;$$

$$a_{pj} = 0 \quad \text{при} \quad p = \overline{n+1,\, 2n}, \quad j = \overline{n+1,\, 2n} \quad \text{и} \quad p = j;$$

$$a_{pj} = \frac{2(b-a)\sqrt{\left(x_1'(\tau_{j-n})\right)^2 + \left(x_2'(\tau_{j-n})\right)^2}}{(\mu+\mu_0)\,n}\left(\mu_0 \frac{\partial \Phi_{k_0}^n\left(x(\tau_{p-n}), x(\tau_{j-n})\right)}{\partial \nu\left(x(\tau_{p-n})\right)} - \mu \frac{\partial \Phi_k^n\left(x(\tau_{p-n}), x(\tau_{j-n})\right)}{\partial \nu\left(x(\tau_{p-n})\right)}\right)$$

$$\text{при} \quad p = \overline{n+1,\, 2n}, \quad j = \overline{n+1,\, 2n} \quad \text{и} \quad p \neq j.$$

Если через $z_p^{2n}$, $p = \overline{1,n}$, обозначим приближенные значения $\psi\left(x(\tau_p)\right)$, а через $z_{p+n}^{2n}$, $p = \overline{1,n}$, приближенные значения $\varphi\left(x(\tau_p)\right)$, то, используя построенные квадратурные формулы для интегралов (1.2)–(1.5), система интегральных уравнений (1.1) заменяется системой алгебраических уравнений относительно $z^{2n} \in C^{2n}$, которую запишем в виде

$$\begin{aligned} z_p^{2n} + \sum_{j=1}^{2n} a_{pj} z_j^{2n} &= \frac{2f\left(x(\tau_p)\right)}{\mu+\mu_0}, \quad p = \overline{1,\, n}, \\ z_p^{2n} + \sum_{j=1}^{2n} a_{pj} z_j^{2n} &= -\frac{2g\left(x(\tau_{p-n})\right)}{\mu+\mu_0}, \quad p = \overline{n+1,\, 2n} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Теперь сформулируем основной результат данной работы.

**Теорема 5.** *Пусть функции $f$ и $g$ непрерывны на кривой $L$. Тогда уравнения* (1.1) *и* (3.1) *имеют единственные решения $(\psi_*, \varphi_*) \in C(L) \times C(L)$ и $w^{2n} \in C^{2n}$ $(n \geq n_0)$ соответственно, причем справедливы следующие оценки*:

$$\max_{p=\overline{1,n}} \left| w_p^{2n} - \psi_*\left(x(\tau_p)\right)\right| \leq M\left(\omega(f, 1/n) + \omega(g, 1/n) + \frac{\ln n}{n}\right),$$

$$\max_{p=\overline{1,n}} \left| w_{p+n}^{2n} - \varphi_*\left(x(\tau_p)\right)\right| \leq M\left(\omega(f, 1/n) + \omega(g, 1/n) + \frac{\ln n}{n}\right).$$

**Доказательство.** Для обоснования метода коллокации будем пользоваться теоремой Г.М. Вайникко о сходимости для линейных операторных уравнений (см. [14]). Для этого сначала запишем уравнения (1.1) и (3.1) в операторном виде.

Отметим, что $C(L) \times C(L)$ является банаховым пространством с нормой $\|\rho\|_1 = \max\left\{\|\psi\|_\infty, \|\varphi\|_\infty\right\}$. Рассмотрим матричный оператор 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\mu}{\mu+\mu_0} K - \dfrac{\mu_0}{\mu+\mu_0} K_0 & \dfrac{\mu^2}{\mu+\mu_0} S - \dfrac{\mu_0^2}{\mu+\mu_0} S_0 \\ \dfrac{1}{\mu+\mu_0}(T_0 - T) & \dfrac{\mu_0}{\mu+\mu_0} \tilde{K}_0 - \dfrac{\mu}{\mu+\mu_0} \tilde{K} \end{pmatrix},$$

определенный в пространстве $C(L) \times C(L)$. Тогда систему интегральных уравнений (1.1) можно переписать в виде

$$(I + A)\rho = \chi, \tag{3.2}$$

а систему алгебраических уравнений (3.1) в виде

$$\left(I^{2n} + A^{2n}\right) z^{2n} = \chi^{2n}, \tag{3.3}$$

где $I$ – единичный оператор на $C(L) \times C(L)$,

$$\rho = \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad \chi = \frac{2}{\mu+\mu_0} \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix},$$

$I^{2n}$ – единичная матрица $2n$-го порядка, $\chi^{2n} = p^{2n}\chi$, а $p^{2n}: C(L)\times C(L) \to C^{2n}$ – линейный ограниченный оператор, определяемый формулой

$$p^{2n}\rho = p^{2n}\begin{pmatrix}\psi\\ \varphi\end{pmatrix} = \left(\psi(x(\tau_1)),\psi(x(\tau_2)),\ldots,\psi(x(\tau_n)),\varphi(x(\tau_1)),\varphi(x(\tau_2)),\ldots,\phi(x(\tau_n))\right)^{\mathrm{T}}.$$

Теперь проверим выполнение условий теоремы 4.2 из работы [14], при этом обозначения и необходимые определения и предложения возьмем из [14]. В работе [2] доказано, что система интегральных уравнений (1.1) однозначно разрешима в пространстве $C(L)\times C(L)$, т.е. $\operatorname{Ker}(I + A) = \{0\}$. Кроме того, операторы $I^{2n} + A^{2n}$ фредгольмовы с нулевым индексом. Принимая во внимание способ разбиения кривой $L$ на "регулярные" элементарные части, получаем, что для любого $\rho \in C(L)\times C(L)$ справедливо следующее равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\left\|p^{2n}\rho\right\| = \lim_{n\to\infty}\max\left\{\max_{l=1,n}\left|\psi(x(\tau_l))\right|,\max_{l=1,n}\left|\varphi(x(\tau_l))\right|\right\} = \max\left\{\max_{x\in L}\left|\psi(x)\right|,\max_{x\in L}\left|\varphi(x)\right|\right\} = \|\rho\|_1.$$

Следовательно, система операторов $P = \left\{p^{2n}\right\}$ является связывающей для пространств $C(L)\times C(L)$ и $C^{2n}$. Тогда $\chi^{2n}\xrightarrow{P}\chi$ и принимая во внимание теоремы 1– 4, получаем, что по определению 2.1 из работы [14] $I^{2n} + A^{2n}\xrightarrow{PP} I + A$. Так как по определению 3.2 из [14] $I^{2n} \to I$ устойчиво, то по предложению 3.5 и по определению 3.3 из [14] осталось проверить условие компактности, которое ввиду предложения 1.1 из [14] равносильно условию: $\forall\left\{z^{2n}\right\}$, $z^{2n} \in C^{2n}$, $\left\|z^{2n}\right\| \le M$, существует относительно компактная последовательность $\left\{A_{2n}z^{2n}\right\} \subset C(L)\times C(L)$ такая, что

$$\left\|A^{2n}z^{2n} - p^{2n}\left(A_{2n}z^{2n}\right)\right\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В качестве $\left\{A_{2n}z^{2n}\right\}$ выберем последовательность

$$\left(A_{2n}z^{2n}\right)(x) = \begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{j=1}^{2n} a_j^{(1)}(x)\, z_j^{2n}\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{2n} a_j^{(2)}(x)\, z_j^{2n}\end{pmatrix},$$

где

$$a_j^{(1)}(x) = \frac{2}{\mu+\mu_0}\left(\mu\int_{L_j}\frac{\partial\Phi_k^n(x,y)}{\partial\nu(y)}dL_y - \mu_0\int_{L_j}\frac{\partial\Phi_{k_0}^n(x,y)}{\partial\nu(y)}dL_y\right) \quad \text{при} \quad j = \overline{1,n},$$

$$a_j^{(1)}(x) = \frac{2}{\mu+\mu_0}\left(\mu^2\int_{L_{j-n}}\Phi_k^n(x,y)\,dL_y - \mu_0^2\int_{L_{j-n}}\Phi_{k_0}^n(x,y)\,dL_y\right) \quad \text{при} \quad j = \overline{n+1,2n},$$

$$a_j^{(2)}(x) = \frac{2}{\mu+\mu_0}\int_{L_j}\frac{\partial}{\partial\nu(x)}\left(\frac{\partial\left(\Phi_{k_0}^n(x,y) - \Phi_k^n(x,y)\right)}{\partial\nu(y)}\right)dL_y \quad \text{при} \quad j = \overline{1,n},$$

$$a_j^{(2)}(x) = \frac{2}{\mu+\mu_0}\left(\mu_0\int_{L_{j-n}}\frac{\partial\Phi_{k_0}^n(x,y)}{\partial\nu(x)}dL_y - \mu\int_{L_{j-n}}\frac{\partial\Phi_k^n(x,y)}{\partial\nu(x)}dL_y\right) \quad \text{при} \quad j = \overline{n+1,\,2n}.$$

Из неравенства (2.1), (2.2) и (2.9) очевидно, что для любых точек $x, y \in L$, $x \ne y$, и для любого натурального числа $n$, справедливы следующие оценки:

$$\left|\Phi_k^n(x,y)\right| \le M\left|\ln|x-y|\right|, \quad \left|\frac{\partial\Phi_k^n(x,y)}{\partial\nu(y)}\right| \le M, \quad \left|\frac{\partial\Phi_k^n(x,y)}{\partial\nu(x)}\right| \le M$$

и

$$\left|\frac{\partial}{\partial\nu(x)}\left(\frac{\partial\left(\Phi^n_{k_0}(x,y)-\Phi^n_k(x,y)\right)}{\partial\nu(y)}\right)\right|\le M.$$

Отсюда получаем, что

$$\left|\sum_{j=1}^{2n}a_j^{(1)}(x)\,z_j^{2n}\right|\le\frac{2\left\|z^{2n}\right\|}{|\mu+\mu_0|}\int_L\left(|\mu|\left|\frac{\partial\Phi^n_k(x,y)}{\partial\nu(y)}\right|+\right.$$
$$\left.+|\mu_0|\left|\frac{\partial\Phi^n_{k_0}(x,y)}{\partial\nu(y)}\right|+|\mu|^2\left|\Phi^n_k(x,y)\right|+|\mu_0|^2\left|\Phi^n_{k_0}(x,y)\right|\right)dL_y\le M\left\|z^{2n}\right\|\quad\forall\ x\in L,$$

и

$$\left|\sum_{j=1}^{2n}a_j^{(2)}(x)\,z_j^{2n}\right|\le\frac{2\left\|z^{2n}\right\|}{|\mu+\mu_0|}\int_L\left(|\mu|\left|\frac{\partial\Phi^n_k(x,y)}{\partial\nu(x)}\right|+|\mu_0|\left|\frac{\partial\Phi^n_{k_0}(x,y)}{\partial\nu(x)}\right|+\right.$$
$$\left.+\left|\frac{\partial}{\partial\nu(x)}\left(\frac{\partial\left(\Phi^n_{k_0}(x,y)-\Phi^n_k(x,y)\right)}{\partial\nu(y)}\right)\right|\right)dL_y\le M\left\|z^{2n}\right\|\quad\forall\ x\in L.$$

Следовательно,

$$\left|\left(A_{2n}z^{2n}\right)(x)\right|\le M\left\|z^{2n}\right\|\quad\forall\ x\in L.$$

Тогда, принимая во внимание условие $\left\|z^N\right\|\le M$, получаем равномерную ограниченность последовательности $\left\{A_{2n}z^{2n}\right\}$.

Теперь возьмем любые точки $x',x''\in L$ такие, что $|x'-x''|=\delta<d/2$. Тогда, поступая точно также, как и в работе [15], можно показать, что

$$\left|\sum_{j=1}^{2n}a_j^{(1)}(x')\,z_j^{2n}-\sum_{j=1}^{2n}a_j^{(1)}(x'')\,z_j^{2n}\right|\le M\left\|z^{2n}\right\|\delta\left|\ln\delta\right|\quad\forall\ x',x''\in L,$$

и

$$\left|\sum_{j=1}^{2n}a_j^{(2)}(x')\,z_j^{2n}-\sum_{j=1}^{2n}a_j^{(2)}(x'')\,z_j^{2n}\right|\le M\left\|z^{2n}\right\|\delta\left|\ln\delta\right|\quad\forall\ x',x''\in L.$$

Следовательно,

$$\left|\left(A_{2n}z^{2n}\right)(x')-\left(A_{2n}z^{2n}\right)(x'')\right|\le M\left\|z^{2n}\right\|\left|x'-x''\right|\left|\ln\left|x'-x''\right|\right|\quad\forall\ x',x''\in L,$$

а значит, $\left\{A_{2n}z^{2n}\right\}\subset C(L)\times C(L)$. Отсюда непосредственно вытекает равностепенная непрерывность последовательности $\left\{A_{2n}z^{2n}\right\}$. Тогда из теоремы Арцеля следует относительная компактность последовательности $\left\{A_{2n}z^{2n}\right\}$. Кроме того, поступая точно также, как и в доказательствах теоремы 1 и 2, получим

$$\left\|A^{2n}z^{2n}-p^{2n}\left(A_{2n}z^{2n}\right)\right\|\to 0\quad\text{при}\quad n\to\infty.$$

Тогда, применяя теорему 4.2 из работы [14], находим, что уравнения (3.2) и (3.3) имеют единственные решения $\rho_*=\begin{pmatrix}\psi_*\\ \varphi_*\end{pmatrix}\in C(L)\times C(L)$ и $w^{2n}\in C^{2N}$ $(n\ge n_0)$ соответственно, причем

$$c_1\delta_n\le\left\|w^{2n}-p^{2n}\rho_*\right\|\le c_2\delta_n,$$

где

$$c_1 = 1\Big/\sup_{n\ge n_0}\left\|I^{2n} + A^{2n}\right\| > 0, \quad c_2 = \sup_{n\ge n_0}\left\|\left(I^{2n} + A^{2n}\right)^{-1}\right\| < +\infty,$$

$$\delta_n = \left\|\left(I^{2n} + A^{2n}\right)\left(p^{2n}\rho_*\right) - \chi^{2n}\right\|.$$

Принимая во внимание равенство

$$\chi^{2n} = p^{2n}\chi = p^{2n}\rho_* + p^{2n}\left(A\rho_*\right)$$

и оценки погрешности построенных квадратурных формул для интегралов (1.2)–(1.5), имеем

$$\delta_n = \left\|A^{2n}\left(p^{2n}\rho_*\right) - p^{2n}\left(A\rho_*\right)\right\| \le M\left(\left\|\rho_*\right\|_1 \frac{\ln n}{n} + \omega\left(\rho_*, 1/n\right)\right),$$

где

$$\omega\left(\rho_*, \delta\right) = \max_{\substack{|x-y|\le\delta\\ x,y\in L}} \sqrt{\left(\psi_*(x) - \psi_*(y)\right)^2 + \left(\varphi_*(x) - \varphi_*(y)\right)^2}, \quad \delta > 0.$$

Так как из неравенства (2.1), (2.2) и (2.9) ясно, что для любых точек $x, y \in L$, $x \ne y$,

$$\left|\Phi_k(x,y)\right| \le M\left|\ln|x-y|\right|, \quad \left|\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial\nu(y)}\right| \le M, \quad \left|\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial\nu(x)}\right| \le M$$

и

$$\left|\frac{\partial}{\partial\nu(x)}\left(\frac{\partial\left(\Phi_{k_0}(x,y) - \Phi_k(x,y)\right)}{\partial\nu(y)}\right)\right| \le M,$$

то, поступая точно также, как и в работе [16], можно показать, что

$$\left|\left(S\rho_*\right)(x') - \left(S\rho_*\right)(x'')\right| \le M\left\|\rho_*\right\|\left|x' - x''\right|\left|\ln|x' - x''|\right| \quad \forall\, x', x'' \in L,$$

$$\left|\left(K\rho_*\right)(x') - \left(K\rho_*\right)(x'')\right| \le M\left\|\rho_*\right\|\left|x' - x''\right|\left|\ln|x' - x''|\right| \quad \forall\, x', x'' \in L,$$

$$\left|\left(\tilde{K}\rho_*\right)(x') - \left(\tilde{K}\rho_*\right)(x'')\right| \le M\left\|\rho_*\right\|\left|x' - x''\right|\left|\ln|x' - x''|\right| \quad \forall\, x', x'' \in L,$$

и

$$\left|\left(\left(T - T_0\right)\rho_*\right)(x') - \left(\left(T - T_0\right)\rho_*\right)(x'')\right| \le M\left\|\rho_*\right\|\left|x' - x''\right|\left|\ln|x' - x''|\right| \quad \forall\, x', x'' \in L.$$

Следовательно,

$$\left|\left(A\rho_*\right)(x') - \left(A\rho_*\right)(x'')\right| \le M\left\|\rho_*\right\|\left|x' - x''\right|\left|\ln|x' - x''|\right| \quad \forall\, x', x'' \in L,$$

т.е.

$$\omega\left(A\rho_*, 1/n\right) \le M\left\|\rho_*\right\|_1 \frac{\ln n}{n}.$$

Тогда, принимая во внимание неравенство

$$\omega\left(\rho_*, 1/n\right) = \omega\left(\chi - A\rho_*, 1/n\right) \le \omega\left(\chi, 1/n\right) + \omega\left(A\rho_*, 1/n\right) \le \omega\left(f, 1/n\right) + \omega\left(g, 1/n\right) + M\left\|\rho_*\right\|_1 \frac{\ln n}{n}$$

и

$$\left\|\rho_*\right\|_1 \le \left\|\left(I + A\right)^{-1}\right\|\left\|\chi\right\|_1,$$

получаем, что

$$\delta_n \le M\left(\omega\left(f, 1/n\right) + \omega\left(g, 1/n\right) + \frac{\ln n}{n}\right).$$

Теорема доказана.

**Следствие 1.** *Пусть* $x_* \in D$, $x^* \in R^2/\overline{D}$ *и* $w^{2n} = \left(w_1^{2n}, w_2^{2n}, \ldots, w_{2n}^{2n}\right)^{\mathrm{T}}$ *является решением системы алгебраических уравнений* (3.1). *Тогда последовательность*

$$u^n(x^*) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{\partial \Phi_k^n(x^*, x(\tau_j))}{\partial \nu(x(\tau_j))} w_j^{2n} + \mu \Phi_k^n(x^*, x(\tau_j)) w_{n+j}^{2n} \right) \sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2 + \left(x_2'(\tau_j)\right)^2}$$

*сходится к* $u(x^*)$, *а последовательность*

$$u_0^n(x_*) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{\partial \Phi_{k_0}^n(x_*, x(\tau_j))}{\partial \nu(x(\tau_j))} w_j^{2n} + \mu_0 \Phi_{k_0}^n(x_*, x(\tau_j)) w_{n+j}^{2n} \right) \sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2 + \left(x_2'(\tau_j)\right)^2}$$

*сходится к* $u_0(x_*)$, *причем*

$$\left|u^n(x^*) - u(x^*)\right| \le M\left(\frac{\ln n}{n} + \omega(f, 1/n) + \omega(g, 1/n)\right),$$

$$\left|u_0^n(x_*) - u_0(x_*)\right| \le M\left(\frac{\ln n}{n} + \omega(f, 1/n) + \omega(g, 1/n)\right).$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.
2. *Kress R., Roach G.F.* Transmission problems Helmholtz equation // J. Math. Phys. 1978. V. 19. P. 1433–1437.
3. *Каширин А.А., Смагин С.И., Талтыкина М.Ю.* Применение мозаично-скелетонного метода при численном решении трехмерных задач Дирихле для уравнения Гельмгольца в интегральной форме // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 4. С. 625–638.
4. *Халилов Э.Г.* Обоснование метода коллокации для интегрального уравнения смешанной краевой задачи для уравнения Гельмгольца // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 7. С. 1340–1348.
5. *Harris P.J., Chen K.* On efficient preconditioners for iterative solution of a Galerkin boundary element equation for the three–dimensional exterior Helmholtz problem // J. Comp. Appl. Math. 2003. V. 156. P. 303–318.
6. *Khalilov E.H., Aliev A.R.* Justification of a quadrature method for an integral equation to the external Neumann problem for the Helmholtz equation // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. V. 41. № 16. P. 6921–6933.
7. *Turc C., Boubendir Y., Riahi M.K.* Well–conditioned boundary integral equation formulations and Nyström discretizations for the solution of Helmholtz problems with impedance boundary conditions in two-dimensional Lipschitz domains // J. Integral Eq. Appl. 2017. V. 29. № 3. P. 441–472.
8. *Халилов Э.Г.* Обоснование метода коллокации для одного класса систем интегральных уравнений // Украинский матем. ж. 2017. Т. 69. № 6. С. 823–835.
9. *Khalilov E.H., Bakhshaliyeva M.N.* Quadrature formulas for simple and double layer logarithmic potentials // Proceed. of IMM of NAS of Azerbaijan. 2019. V. 45. № 1. P. 155–162.
10. *Kress R.* Boundary integral equations in time-harmonic acoustic scattering // Math. Comp. Modeling. 1991. V. 15. № 3–5. P. 229–243.
11. *Мусхелешвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматлит, 1962. 599 с.
12. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.
13. *Халилов Э.Г.* Обоснование метода коллокации для одного класса поверхностных интегральных уравнений // Матем. заметки. 2020. Т. 107. № 4. С. 604–622.
14. *Вайникко Г.М.* Регулярная сходимость операторов и приближенное решение уравнений // Итоги науки и техники. Матем. анализ. 1979. Т. 16. С. 5–53.
15. *Бахшалыева М.Н., Халилов Э.Г.* Обоснование метода коллокации для интегрального уравнения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 6. С. 936–950.
16. *Халилов Э.Г., Бахшалыева М.Н.* Исследование приближенного решения интегрального уравнения, соответствующего смешанной краевой задаче для уравнения Лапласа // Уфимский матем. журн. 2021. Т. 13. № 1. С. 86–98.