ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 5, с. 777–789

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.85

НЕПРЕРЫВНЫЙ ПРОЕКЦИОННЫЙ ОБОБЩЕННЫЙ ЭКСТРАГРАДИЕНТНЫЙ КВАЗИНЬЮТОНОВСКИЙ МЕТОД ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СЕДЛОВЫХ ЗАДАЧ

В. Г. Малинов

432000 Ульяновск, ул. Толстого, 42, УлГУ, Россия

e-mail: vgmalinov@mail.ru

Поступила в редакцию 16.09.2020 г.
Переработанный вариант 04.10.2021 г.
Принята к публикации 14.01.2022 г.

Исследуется указанный метод решения седловых задач для выпукло-вогнутых гладких функций с липшицевыми частными градиентами на выпуклом замкнутом подмножестве конечномерного евклидова пространства. Средствами выпуклого анализа доказаны сходимость и экспоненциальная скорость сходимости метода. Библ. 11.

Ключевые слова: выпукло-вогнутая функция, седловая задача, непрерывный проекционный обобщенный экстраградиентный квазиньютоновский метод.

DOI: 10.31857/S0044466922050088

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Известны множество методов оптимизации и меньшее число методов для решения седловых задач (см. [1]–[11]); последние предназначены для отыскания седловых точек или точек равновесия. Напомним, точку $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in Q \times U \subset E^n \times E^m$, называют *седловой точкой* всякой функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, $\mathbf{x} \in Q \subset E^n$, $\mathbf{u} \in U \subset E^m$, с непустыми множествами $Q \subset E^n$, $U \subset E^m$, в евклидовых пространствах E^n и E^m, если эта точка есть решение системы неравенств:

$$\varphi(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}) \le \varphi(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \le \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*) \quad \forall \mathbf{x} \in Q, \quad \mathbf{u} \in U. \tag{1.1}$$

Существуют непрерывные проекционные методы отыскания седловых точек (НПМОСТ) и минимизации (НПММ), и итеративные для соответствующих математических моделей (ММ) исследуемых процессов. К разработке новых методов решения этих задач приводят экстремальные задачи теории игр, математической экономики, математической физики, оптимального управления [1]–[10]. В связи с наличием все более сложных ММ, приводящих к седловым задачам, и небогатым разнообразием методов их решения, актуальна задача исследования новых НПМОСТ [1]–[3], [7], [10], [11].

В работах [3], [10] детально рассмотрены применения седловых методов, в [10] седловые задачи охарактеризованы “как мостик, через который можно попытаться перенести развитую технику решения задач оптимизации для решения игровых задач”, исследованы управляемые (обратными связями по производной, по невязке и смешанными) НПМОСТ второго порядка. Разработана методика преобразования седловых задач и методов к равновесным. В [11] построены и изучены не исследованные в [10] равновесные методы второго порядка на основе управляемого (дифференциального) НПМОСТ второго порядка. В [3] исследовано, наряду с другими, несколько перспективных игровых равновесных методов. Здесь предлагается и исследуется базовый НПМОСТ второго порядка с переменной метрикой, на основе которого можно построить частные методы решения конкретных случаев седловых и равновесных задач в перечисленных науках.

Рассматриваемые НПМОСТ соответствуют задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), описывающих динамические процессы. Существенно одно из благоприятных свойств дифференциальных моделей — возможность использования численных методов вычислительной математики, для решения ОДУ в алгоритмах численной реализации НПМОСТ и НПММ [3]–[6].

Седловые задачи для конкретных математических моделей решаются при своих требованиях (к пространствам, множествам и функциям), выражающихся в постановке задачи и влияющих на метод ее решения. В этой работе предлагается и исследуется НПМОСТ для решения задачи в следующей постановке.

1.2. Постановка задачи

Требуется решить задачу об отыскании седловой точки $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in Q \times U \subset E^n \times E^m$ функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$.

Предполагаем следующее: а) множества $Q \subset E^n$, $U \subset E^m$, $Q \times U \subset E^n \times E^m$ непустые выпуклые замкнутые; б) выпукло-вогнутая функция $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ с овражными гиперповерхностями уровней определена в окрестности подмножества $W \subset Q \times U \subset E^n \times E^m$, выпукла по $\mathbf{x} \in Q \subset E^n$ и вогнута по $\mathbf{u} \in U \subset E^m$, т.е. для всех фиксированных $\mathbf{u} \in U$ функция $g(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ выпукла на $Q \subset E^n$, а $\forall\ \mathbf{x} \in Q$ фиксированного функция $h(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ вогнута на $U \subset E^m$; в) множество седловых точек $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ на $W \subset E^n \times E^m$ непустое, $W_* = Q_* \times U^* \neq \varnothing$; г) частные градиенты функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ липшицевы на $Q \times U$,

$$\begin{gathered} \|\nabla\varphi_x(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \nabla\varphi_x(\mathbf{x}^\wedge, \mathbf{u}^\wedge)\| \le L\left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\wedge\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^\wedge\|^2\right)^{1/2}, \\ \|\nabla\varphi_u(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \nabla\varphi_u(\mathbf{x}^\wedge, \mathbf{u}^\wedge)\| \le L^0\left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\wedge\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^\wedge\|^2\right)^{1/2}, \end{gathered} \tag{1.2}$$

где $L > 0$, $L^0 > 0$ – константы Липшица. В терминах оператора проектирования седловая точка $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in W_*$ задачи (1.1) характеризуется равенствами

$$\mathbf{x}^* = P_Q\left[\mathbf{x}^* - \tau\nabla\varphi_x\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*\right)\right], \quad \mathbf{u}^* = P_U\left[\mathbf{u}^* + \tau\nabla\varphi_u\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*\right)\right], \quad \tau > 0, \tag{1.3}$$

где $P_Q(\cdot)$ и $P_U(\cdot)$ – операторы проектирования на множества Q и U (см. [3], [4]).

1.3. Траектории не всех НПМОСТ сходятся к седловой точке. Например, сходимость на седловых задачах простейшего итеративного метода проекции градиента седлового [1] доказана лишь при весьма ограничительных предположениях сильной выпукло-вогнутости, что не выполняется для многих нужных классов седловых задач [2]. Поэтому предложено несколько способов устранения этого недостатка. Таковым является и изменение самого НПМОСТ: построением экстраградиентного метода (ЭГМ) [2]; включением в ОДУ управления с помощью прогноза и обратных связей [3], приводящим к ЭГМ. Успешный способ улучшения сходимости воплощен в НПМОСТ, использующих прогноз и, аналогично методам минимизации [4]–[6], операторы переменной метрики.

Цель данной работы в широком смысле — распространение подхода к построению методов минимизации из работ [4]–[6] на НПМОСТ; точнее, обоснование НПМОСТ второго порядка с лучшими свойствами, построенного на основе синтеза идеи и теории: НПММ переменной метрики [4], проекционного обобщенного двухточечного экстраградиентного метода минимизации квазиньютоновского (ПОДЭМК) [5], непрерывного проекционного обобщенного экстраградиентного квазиньютоновского метода минимизации (НПОЭКМ) второго порядка [6], итеративного ПОДЭМК седлового из [7]. Наша цель в узком смысле — исследование предложенного НПОЭКМ *седлового* (НПОЭКМС) *второго порядка*.

Последнее включает обоснование вспомогательных утверждений, доказательство сходимости НПОЭКМС и оценки скорости его сходимости для выпукло-вогнутых функций.

2. ПРЕДЛАГАЕМЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

2.1. Предлагается для решения задачи (1.1)–(1.3) *НПОЭКМС второго порядка*, обычно записываемый в виде задачи Коши для системы ОДУ:

$$\begin{gathered}\alpha(t)\mathbf{x}''(t)+\beta(t)\mathbf{x}'(t)+\mathbf{x}(t)=P_Q[\mathbf{y}(t)-\gamma(t)\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{y}(t))\nabla\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t))],\\ \alpha(t)\mathbf{u}''(t)+\beta(t)\mathbf{u}'(t)+\mathbf{u}(t)=P_U[\mathbf{v}(t)+\lambda(t)\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{v}(t))\nabla\varphi_u(\mathbf{y}(t),\mathbf{v}(t))],\\ \mathbf{y}(t)=\mathbf{x}(t)-\sigma(t)\mathbf{x}'(t),\quad \mathbf{v}(t)=\mathbf{u}(t)-\theta(t)\mathbf{u}'(t),\quad t\ge 0,\\ \mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}^0,\quad \mathbf{u}(t_0)=\mathbf{u}^0,\quad \mathbf{x}'(t_0)=\mathbf{x}^1,\quad \mathbf{u}'(t_0)=\mathbf{u}^1,\end{gathered}\tag{2.1}$$

где функции $\alpha(t)\in C^2[0,\infty),\beta(t),\gamma(t),\sigma(t),\theta(t)\in C^1[0,\infty)$, — положительные параметры метода, таковы, что $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t)=\alpha_0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\beta(t)=\beta_0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\gamma(t)=\gamma_0>0$; $\lim\limits_{t\to\infty}\sigma(t)=\sigma_0>0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\theta(t)=\theta_0>0$, $\alpha(t)\ge\alpha_0>0$, $1>\beta(t)>0$, $1>\sigma(t)>0$, $1>\theta(t)>\theta_0>0$; $\alpha'(t)<0$, $\beta'(t)<0$, $\sigma'(t)<0$, $\gamma'(t)<0$, $\theta'(t)<0$, $\alpha''(t)>0$.

В частности, этим условиям удовлетворяют такие параметры–функции НПОЭКМС (2.1): $\alpha(t)=\alpha_0+\dfrac{1}{1+t}$, $\beta(t)=\beta_0+\dfrac{1}{2+t}$, $\gamma(t)=\gamma_0+\dfrac{1}{3+t}$, $\lambda(t)=\lambda_0+\dfrac{1}{3+t}$, $\sigma(t)=\sigma_0+\dfrac{1}{t+1}$, $\theta(t)=\theta_0+\dfrac{1}{t+1}$.

Операторы $\mathbf{B}(\mathbf{x}):E^n\to E^n$ $\forall\mathbf{x}\in E^n$ фиксированного и $\mathbf{G}(\mathbf{u}):E^m\to E^m$ $\forall\mathbf{u}\in E^m$ фиксированного — положительно-определенные самосопряженные линейные, изменяющие метрику пространства; они в (2.1) таковы, что

$$m\|\mathbf{v}\|^2\le(\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{v},\mathbf{v})\le M\|\mathbf{v}\|^2,\quad 0<m\le M,\quad \mathbf{v},\mathbf{x}\in E^n,\tag{2.2}$$

$$m\|\mathbf{v}\|^2\le(\mathbf{G}(\mathbf{u})\mathbf{v},\mathbf{v})\le M\|\mathbf{v}\|^2,\quad 0<m\le M,\quad \mathbf{v},\mathbf{u}\in E^m.\tag{2.3}$$

Обратные операторы таковы, что

$$\begin{gathered}\|\mathbf{v}\|^2/M\le(\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{v},\mathbf{v})\le\|\mathbf{v}\|^2/m,\quad \mathbf{v},\mathbf{x}\in E^n,\\ \|\mathbf{v}\|^2/M\le(\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{u})\mathbf{v},\mathbf{v})\le\|\mathbf{v}\|^2/m,\quad \mathbf{v},\mathbf{u}\in E^m.\end{gathered}\tag{2.4}$$

2.2. Для метода (2.1)–(2.4) характеристики вида (1.3) седловой точки $(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*)$ имеют следующий вид:

$$\mathbf{x}^*=P_Q\left[\mathbf{x}^*-\gamma(t)\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla\varphi_x\left(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*\right)\right],\quad \gamma>0,\tag{2.5}$$

$$\mathbf{u}^*=P_U\left[\mathbf{u}^*+\lambda(t)\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{u}^*)\nabla\varphi_u\left(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*\right)\right],\quad \lambda>0.\tag{2.6}$$

2.3. **Замечание.** Отметим следующее.

1. В этой работе для простоты обозначены через $\nabla\varphi_x$ – частный градиент по первому аргументу, а $\nabla\varphi_u$ – по второму.

2. Поскольку в (2.1) операторы проектирования в исходной метрике**,** критерии проекций $\mathbf{w}=P_Q(\mathbf{v})$ по первой и $\mathbf{s}=P_U(\mathbf{v})$ по второй переменным будут по исходной метрике (см. [8, с. 189]):

$$(\mathbf{w}-\mathbf{v},\mathbf{x}-\mathbf{w})\ge 0,\quad \mathbf{x}\in Q,\quad (\mathbf{s}-\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{s})\ge 0,\quad \mathbf{u}\in U.\tag{2.7}$$

(Критерии проекций в новой метрике есть неравенства

$$(\mathbf{B}(\mathbf{x})(\mathbf{w}-\mathbf{v},\mathbf{x}-\mathbf{w})\ge 0,\quad \mathbf{x}\in Q,\quad (\mathbf{G}(\mathbf{u})(\mathbf{s}-\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{s})\ge 0,\quad \mathbf{u}\in U,$$

но здесь мы пользуемся (2.7), ибо в (2.1) оператор проектирования в исходной метрике.)

3. Имеются и непрерывные, и итеративные, проекционные методы с операторами проектирования: $P_Q(.)$, $P_U(.)$ – в исходной метрике; $P_Q^{\mathbf{G}(\mathbf{v}(t))}$, $P_U^{\mathbf{G}(\mathbf{u}(t))}$ – в новой метрике.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Приведем неравенства, дополняющие необходимый для обоснования сходимости и оценки скорости сходимости методов математический аппарат.

3.1. **Лемма 1.** *Если для* (2.1) *при любом фиксированном* $\mathbf{u} \in U \in E^m$ *выпуклая функция* $g_1(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(Q)$ *такова, что* $\nabla g_1(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x})\nabla\varphi_x(\mathbf{x},\mathbf{u})$,

$$\|\nabla g_1(\mathbf{w}) - \nabla g_1(\mathbf{v})\| \le K\|\mathbf{w}-\mathbf{v}\|, \quad K = \frac{L}{m} > 0,$$

то

$$(\nabla g_1(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}-\mathbf{x}^*) \ge 0, \quad \mathbf{x} \in Q. \tag{3.1}$$

Доказательство. Из характеристического свойства (2.5) седловой точки, критерия проекции $\mathbf{w} = P_Q(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} \in H_Q$ из (2.7), и равенства из условия леммы 1, имеем

$$(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^* - \gamma\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla\varphi_x(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*), \mathbf{x}-\mathbf{x}^*) = \gamma(\nabla g_1(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}-\mathbf{x}^*) \ge 0, \tag{3.1a}$$

$\gamma > 0$, $\mathbf{x} \in Q$. Из правого неравенства (3.1а) получим (3.1).

3.2. **Лемма 2.** *Если для* (2.1) *при любом фиксированном* $\mathbf{x} \in Q \subset E^n$ *вогнутая функция* $h_1(\mathbf{u}) \in C^{1,1}(U)$ *такова, что* $\nabla h_1(\mathbf{u}) = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{u})\nabla\varphi_u(\mathbf{x},\mathbf{u})$,

$$\|\nabla h_1(\mathbf{u}) - \nabla h_1(\mathbf{v})\| \le R\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|, \quad R = \frac{L^0}{2m} > 0,$$

то

$$(\nabla h_1(\mathbf{u}^*), \mathbf{u}^*-\mathbf{u}) \ge 0, \quad \mathbf{u} \in U. \tag{3.2}$$

Доказательство проведено для работы [7].

4. ОБОСНОВАНИЕ СХОДИМОСТИ НПОЭКМС (2.1)

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* а)−г) *о задаче и функции* $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{u})$ *из разд.*1 *и функциях-параметрах из* п. 2.1; *неравенства* (2.2)−(2.7); *леммы* 1 *и* 2; *параметры метода* (2.1), *функции* $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \sigma(t), \theta(t)$ *таковы, что*

$$\begin{gathered}0 < \alpha(t) < \min\{(\beta+\sigma)(3\beta-2\sigma)/4; \beta(\beta+\theta)/2\},\\ 0 < \gamma(t) < (\beta+2\sigma)/[K(\beta+\sigma)], \quad 0 < \sigma < 3\beta/2,\\ 0 < \lambda < \min\left\{\frac{2\beta(\beta+\theta)-2\alpha}{R(\beta+\theta)(\beta+\theta)}; \frac{3-2\beta-2\theta}{2R}\right\}, \quad \beta+\sigma < 3/2,\\ K(\alpha(t)(\beta(t)+\sigma(t))\gamma(t))' > (4\alpha\beta + 2\alpha\sigma(t))', \quad t \ge 0.\end{gathered} \tag{4.1}$$

Тогда НПОЭКМС (2.1), (4.1) $\forall(\mathbf{x}^0,\mathbf{u}^0) \in E^n \times E^m$ *по норме сходится к седловой точке* $(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*) \in$ $\in Q_* \times U^*$ *функции* $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{u})$,

$$\begin{gathered}\int_0^{+\infty}\left[\|\mathbf{x}(s)-\mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{x}'(s)\|^2 + \|\mathbf{x}''(s)\|^2\right]ds < +\infty,\\ \|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*\| + \|\mathbf{x}'(t)\| + \|\mathbf{x}''(t)\| \to 0, \quad t \to \infty,\end{gathered} \tag{4.2}$$

$$\begin{gathered}\int_0^{+\infty}\left[\|\mathbf{u}(s)-\mathbf{u}^*\|^2 + \|\mathbf{u}'(s)\|^2 + \|\mathbf{u}''(s)\|^2\right]ds < +\infty,\\ \|\mathbf{u}(t)-\mathbf{u}^*\| + \|\mathbf{u}'(t)\| + \|\mathbf{u}''(t)\| \to 0, \quad t \to \infty,\end{gathered} \tag{4.3}$$

т.е. $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^* \in Q_*$, $\mathbf{u}^k \to \mathbf{u}^* \in U^*$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство. Представим первые два уравнения НПОЭКМС (2.1), пользуясь (2.7), в виде вариационных неравенств

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{w}(t)-\mathbf{y}(t)+\gamma(t)\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{y}(t))\nabla\varphi_x\left(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t)\right),a-\mathbf{w}(t)\right)\geq 0, \quad a\in Q,\\ &\left(\mathbf{s}(t)-\mathbf{v}(t)-\lambda(t)\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{v}(t))\nabla\varphi_u\left(\mathbf{y}(t),\mathbf{v}(t)\right),b-\mathbf{s}(t)\right)\geq 0, \quad b\in U,\end{aligned}\tag{4.4}$$

где $\mathbf{w}(t)=\alpha(t)\mathbf{x}''(t)+\beta(t)\mathbf{x}'(t)+\mathbf{x}(t)\in Q$, $\mathbf{s}(t)=\alpha(t)\mathbf{u}''+\beta(t)\mathbf{u}'+\mathbf{u}\in U$.

Неравенства (4.4) преобразуем, пользуясь свойствами скалярного произведения, неравенством Коши–Буняковского, нерасширяющим свойством оператора проектирования (см. [8, с. 190]), а также (2.1), (4.1), леммами 1 и 2.

В первом неравенстве (4.4) положим $a=\mathbf{x}^*$, пользуясь леммой 1, неравенство (3.1) умножим на $\gamma>0$, примем $\mathbf{x}=\mathbf{w}(t)$, полученные неравенства сложим и получим

$$\left(\mathbf{w}(t)-\mathbf{y}(t),\mathbf{w}(t)-\mathbf{x}^*\right)\leq\gamma(t)\left(\nabla g_1(\mathbf{y}(t))-\nabla g_1(\mathbf{x}^*),\mathbf{x}^*-\mathbf{w}(t)\right), \quad t\geq 0. \tag{4.5}$$

Преобразуем (4.5). Для левой части, пользуясь (2.1), последовательно получаем

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{w}(t)-\mathbf{y}(t),\mathbf{w}(t)-\mathbf{x}^*\right)=\left(\alpha\mathbf{x}''+\beta\mathbf{x}'+\sigma\mathbf{x}',\alpha\mathbf{x}''+\beta\mathbf{x}'+\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\right)=\\ &=\left(\alpha\mathbf{x}''+\beta\mathbf{x}',\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\right)+\left\|\alpha\mathbf{x}''+\beta\mathbf{x}'\right\|^2+\sigma\left(\mathbf{x}',\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\right)+\alpha\sigma\left(\mathbf{x}',\mathbf{x}''\right)+\beta\sigma\left\|\mathbf{x}'\right\|^2=\\ &=\alpha\left(\mathbf{x}'',\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\right)+(\beta+\sigma)\left(\mathbf{x}',\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\right)+\alpha^2\left\|\mathbf{x}''\right\|^2+(\beta^2+\beta\sigma)\left\|\mathbf{x}'\right\|^2+\alpha(2\beta+\sigma)\left(\mathbf{x}',\mathbf{x}''\right).\end{aligned}\tag{4.6}$$

Правую часть (4.5) оценим с помощью следующего неравенства (см. [8, с. 175])

$$\gamma(t)(\nabla g_1(\mathbf{y})-\nabla g_1(\mathbf{x}^*),\mathbf{x}^*-\mathbf{w})\leq K\gamma\left\|\mathbf{y}-\mathbf{w}\right\|^2/4,$$

где $K=\dfrac{L}{m}$ из леммы 1,

$$\begin{aligned}&K\gamma(t)\left\|\mathbf{w}(t)-\mathbf{y}(t)\right\|^2/4=\frac{K\gamma}{4}\left\|\alpha\mathbf{x}''(t)+(\beta+\sigma)\mathbf{x}'(t)\right\|^2=\\ &=\frac{K\gamma}{4}\left(\alpha^2\left\|\mathbf{x}''\right\|^2+(\beta+\sigma)^2\left\|\mathbf{x}'\right\|^2+2\alpha(\beta+\sigma)\left(\mathbf{x}'',\mathbf{x}'\right)\right).\end{aligned}$$

Подставив эту оценку и (4.6) в (4.5), получим

$$\alpha(t)\left(\mathbf{x}'',\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\right)+a_1(t)\left\|\mathbf{x}''\right\|^2+a_2(t)\left\|\mathbf{x}'\right\|^2+a_3(t)\left(\mathbf{x}',\mathbf{x}''\right)+a_4(t)\left(\mathbf{x}',\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\right)\leq 0, \quad t\geq 0, \quad \mathbf{x}^*\in Q_*, \tag{4.7}$$

где $a_1(t)=\alpha^2\left(1-\dfrac{K\gamma}{4}\right)$; $a_2(t)=\beta^2+\beta\sigma-\dfrac{K\gamma}{4}(\beta+\sigma)^2$; $a_3=\alpha\left[2\beta+\sigma-\dfrac{K\gamma}{2}(\beta+\sigma)\right]$; $a_4(t)=\beta(t)+\sigma(t)$; $a_j(t)>0$ $\forall j\in[1:4]$, $0<\gamma(t)<\dfrac{4\beta}{K(\beta+\sigma)}$.

Неравенство (4.7) преобразуем с помощью тождеств

$$\begin{aligned}&2(\mathbf{x}''(t),\mathbf{x}'(t))=\frac{d}{dt}\left\|\mathbf{x}'(t)\right\|^2; \quad 2(\mathbf{x}'(t),\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*)=\frac{d}{dt}\left\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*\right\|^2;\\ &(\mathbf{x}'',\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)=\frac{d^2}{dt^2}\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\right\|^2/2-\left\|\mathbf{x}'\right\|^2, \quad t\geq 0,\end{aligned}\tag{4.8}$$

тогда (обозначив $a_{21}(t)=a_2-\alpha>0$, $a_{31}(t)=a_3(t)/2$, $a_{41}(t)=a_4(t)/2$) получим

$$a_1(t)\left\|\mathbf{x}''\right\|^2+a_{21}(t)\left\|\mathbf{x}'\right\|^2+a_{31}(t)\frac{d}{dt}\left\|\mathbf{x}'\right\|^2+\alpha(t)\frac{d^2}{dt^2}\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\right\|^2/2+a_{41}(t)\frac{d}{dt}\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\right\|^2\leq 0, \quad t\geq 0, \tag{4.9}$$

где $0<\alpha<\beta(\beta+\sigma)$, $0<\beta<1$, $0<\gamma<4(\beta^2+\beta\sigma-\alpha)/[K(\beta+\sigma)^2]=\gamma^{11}$.

Проинтегрировав (4.9) на отрезке $[\xi, t]$, $t > \xi \geq 0$, придем к неравенству

$$\int_{\xi}^{t} [a_1(s)\|\mathbf{x}''\|^2 + a_{22}(s)\|\mathbf{x}'\|^2 + a_{42}(s)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2] ds +$$
$$+ a_{23}(t)\|\mathbf{x}'(t)\|^2 + a_{43}(t)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2/2 + \alpha(t)\frac{d}{dt}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2/2 \leq C_1(\xi, \mathbf{x}^*), \tag{4.10}$$
$$t > \xi \geq 0, \quad \mathbf{x}^* \in Q_*,$$

где $a_{22}(s) = a_{21}(s) - a_{31}'(s) > 0$ при $a_{31}'(s) < 0$, что выполняется для

$$K(\alpha(t)(\beta(t) + \sigma(t))\gamma(t))' > (4\alpha\beta + 2\alpha\sigma(t))', \quad a_{23}(t) = a_{31}(t),$$
$$C_1(\xi, \mathbf{x}^*) = a_{31}(\xi)\|\mathbf{x}'(\xi)\|^2 + \alpha(\xi)(\mathbf{x}'(\xi), \mathbf{x}(\xi) - \mathbf{x}^*) + \left(a_{41}(\xi) - \frac{1}{2}\alpha'(\xi)\right)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2,$$
$$a_{42}(s) = \frac{1}{2}\alpha''(s) - a_{41}'(s) = \frac{1}{2}(\alpha'' - \beta' - \sigma'), \quad a_{43}/2 = a_{41}(t) - \alpha'/2 = \frac{\beta}{2} + \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\alpha',$$

коэффициенты положительны при условиях (4.1) и интеграл положителен. Из (4.10) без положительных слагаемых следует

$$\frac{\alpha(t)}{a_{43}(t)}\frac{d}{dt}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq 2C_1(\xi, \mathbf{x}^*)/a_{43}(t), \quad t > \xi \geq 0, \quad \mathbf{x}^* \in Q_*.$$

Умножим это неравенство на

$$a_{43}(t)\frac{e(t)}{\alpha(t)}, \quad e(t) = \exp\left(\int_0^t a_{43}(s)\alpha^{-1}(s) ds\right) > 0,$$
$$e(t)\frac{d}{dt}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 + a_{43}(t)e(t)\alpha^{-1}(t)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq 2C_1(\xi, \mathbf{x}^*)e(t)/\alpha, \quad t > \xi \geq 0.$$

Отсюда с учетом производной $e'(t) = a_{43}(t)e(t)/\alpha(t)$, имеем

$$\frac{d}{dt}[e(t)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2] \leq 2C_1(\xi, \mathbf{x}^*)e(t)/\alpha, \quad t > \xi \geq 0.$$

Проинтегрировав его на $[\xi, t]$ и умножив полученное неравенство на $e^{-1}(t)$, получим

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2 \leq \frac{2C_1(\xi, \mathbf{x}^*)}{\alpha e(t)}\int_{\xi}^{t} e(s) ds + \frac{e(\xi)\|\mathbf{x}(\xi) - \mathbf{x}^*\|^2}{e(t)} \leq 2C_1(\xi, \mathbf{x}^*)p(t), \quad t > \xi \geq 0,$$
$$p(t) = \frac{1}{\alpha_0 e(t)}\int_{\xi}^{t} e(s) ds + \frac{e(\xi)\|\mathbf{x}(\xi) - \mathbf{x}^*\|^2}{2e(t)}C_1^{-1}(\xi, \mathbf{x}^*), \quad \alpha(t) \geq \alpha_0 > 0, \quad \lim_{t\to\infty} p(t) = \alpha_0^{-1}. \tag{4.11}$$

Из (4.11) следует

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2 \leq 2C_1(\xi, \mathbf{x}^*)/\alpha_0, \quad t > \xi \geq 0, \quad \mathbf{x}^* \in Q_*. \tag{4.12}$$

Оценим второе и третье слагаемые для второго соотношения из (4.2) с помощью неравенств (4.10) и (4.7). Учитывая (4.1) и (4.8), существование чисел $r > 0$ (пусть $r = \beta_0\gamma_0\sigma_0\theta_0$) и $\eta \geq 0$ таких, что для $s > \eta \geq \xi \geq 0$ коэффициенты подынтегральных слагаемых в (4.10) $a_1(s) \geq r > 0$, $a_{22}(s) \geq r > 0$, $a_{42}(s) \geq r > 0$, из (4.10) получим

$$r\int_{\xi}^{t}\left\{\|\mathbf{x}''(s)\|^2 + \|\mathbf{x}'(s)\|^2 + \|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*\|^2\right\} ds + a_{43}(t)\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2/2 +$$
$$+ \alpha(t)(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*) + a_{23}(t)\|\mathbf{x}'(t)\|^2 \leq C_1(\xi, \mathbf{x}^*), \quad t > \xi \geq \eta \geq 0. \tag{4.13}$$

В (4.13) третье слагаемое оценим с помощью известного неравенства

$$2|ab| \leq \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1}b^2 \quad \forall a, b, \varepsilon > 0 \tag{4.14}$$

при $\varepsilon = \beta(t)$, $a = \mathbf{x}'(t)$, $b = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*$, т.е.

$$\alpha(t)(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*) \geq -\alpha\beta\|\mathbf{x}'(t)\|^2/2 - \alpha\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2/(2\beta).$$

Тогда из (4.13) следует

$$r\int\limits_{\xi}^{t}\left\{\|\mathbf{x}''(s)\|^2 + \|\mathbf{x}'(s)\|^2 + \|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*\|^2\right\}ds + (a_{23} - \alpha\beta/2)\|\mathbf{x}'(t)\|^2 +$$

$$+ [a_{41}(t) - \alpha'(t)/2 - \alpha(t)/(2\beta)]\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2 \leq C_1(\xi, \mathbf{x}^*), \tag{4.15}$$

$$t > \eta \geq \xi \geq 0,$$

где коэффициенты при втором и третьем слагаемых положительны при условиях (4.1), и $a_{23} - \dfrac{\alpha\beta}{2} = \dfrac{\alpha\beta}{2} + \dfrac{\alpha\sigma}{2} - \dfrac{K\alpha\gamma}{4}(\beta + \sigma) - \beta] > \dfrac{\alpha\beta}{4}$, $0 < \alpha < (\beta + \sigma)(3\beta - 2\sigma)/4 < \beta(\beta + \sigma)$ в неравенстве $0 < \gamma < \dfrac{\beta + 2\sigma}{K(\beta + \sigma)} < \gamma^{11}$, $0 < \sigma < \dfrac{3}{2}\beta$; $a_{41} - \dfrac{\alpha}{2\beta} - \alpha'/2 > 0$ в силу (4.1). Из (4.15) получим

$$\int\limits_{\xi}^{t}\left[\|\mathbf{x}''(s)\|^2 + \|\mathbf{x}'(s)\|^2 + \|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*\|^2\right]ds \leq C_1(\xi, \mathbf{x}^*)/r, \tag{4.15а}$$

$$\|\mathbf{x}'(t)\|^2 \leq 4C_1(\xi, \mathbf{x}^*)(\alpha\beta)^{-1}, \quad t > \eta \geq \xi \geq 0. \tag{4.15б}$$

Из (4.15а) и (4.15б) с учетом условий (4.1) при $t \to \infty$ следует

$$\int\limits_{0}^{\infty}\left(\|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{x}'(s)\|^2 + \|\mathbf{x}''(s)\|^2\right)ds < +\infty \quad \forall \mathbf{x}^* \in Q_*, \tag{4.16}$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\|\mathbf{x}'(t)\|^2 \leq 4C_1(\xi, \mathbf{x}^*)(\alpha_0\beta_0)^{-1}, \quad t > \eta \geq \xi \geq 0. \tag{4.17}$$

Далее оценим $\|\mathbf{x}''(t)\|$, исходя из (4.7) и пользуясь (4.14). Неравенства

$$a_3(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t)) \geq -(2a_3/\alpha)\|\mathbf{x}'(t)\|^2 - (a_3\alpha/8)\|\mathbf{x}''(t)\|^2,$$

$$\alpha(\mathbf{x}''(t), \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*) \geq -(\alpha^2/8)\|\mathbf{x}''(t)\|^2 - 2\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2,$$

$$(\beta + \sigma)(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*) \geq -(\beta + \sigma)\|\mathbf{x}'(t)\|^2/2 - (\beta + \sigma)\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2/2,$$

следуют из (4.14) соответственно при $\varepsilon = \dfrac{4}{\alpha}$, $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{4}$, $\varepsilon = 1$. С их учетом из (4.7) имеем

$$a_{11}^1(t)\|\mathbf{x}''\|^2 \leq a_{24}(t)\|\mathbf{x}'\|^2 + a_{44}(t)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2, \quad t \geq 0, \quad \mathbf{x}^* \in Q_*. \tag{4.18а}$$

В (4.18а) оценим коэффициенты при квадратах норм при условиях (4.1):

$$a_{11}^1 = a_1(t) - a_3\alpha/8 - \alpha^2/8 = \alpha^2\left[7 - \frac{K\gamma}{2}(4 - \beta - \sigma) - 2\beta - \sigma\right]/8 \geq \alpha^2/8 = a_{11}(t)$$

при $\quad 0 < \gamma < 2(6 - 2\beta - \sigma)/[K(4 - \beta - \sigma)], \quad 2\beta + \sigma < 6, \quad \beta + \sigma < 4;$

$$a_{24} = 2a_3/\alpha + (\beta + \sigma)/4 - a_2 = \frac{9\beta}{2} + \frac{5\sigma}{2} - \frac{K\gamma}{2}(\beta + \sigma)\left(1 + \frac{\beta + \sigma}{4}\right) - \beta^2 - \beta\sigma \leq$$

$$\leq 2a_3/\alpha + (\beta + \sigma)/4 = a_{25};$$

$$a_{44}(t) \leq (\beta + \sigma)/2 + 2 = (\beta + \sigma + 4)/2 = a_{45}(t).$$

Учитывая эти оценки, из (4.18а) получаем

$$a_{11}(t)\|\mathbf{x}''\|^2 \leq a_{25}(t)\|\mathbf{x}'\|^2 + a_{45}(t)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2, \quad t \geq 0, \quad \mathbf{x}^* \in Q_*. \tag{4.18б}$$

Из (4.18б) с учетом оценок (4.11), (4.15б) имеем

$$\|\mathbf{x}''\|^2 \leq [a_{11}(t)]^{-1}\left(2C_1(\xi, \mathbf{x}^*)[2a_{25}(t)(\alpha\beta)^{-1} + a_{45}(t)p(t)]\right). \tag{4.18}$$

С учетом условий (4.1), а также соотношений (4.12), (4.17), из (4.18) следует

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\|\mathbf{x}''(t)\|^2 \le C_2(\xi,\mathbf{x}^*), \quad t > \eta \ge \xi \ge 0, \quad \mathbf{x}^* \in Q_*, \tag{4.19}$$

где

$$C_2(\xi,\mathbf{x}^*) = 2[2a_{25}^0(\beta_0)^{-1} + a_{45}^0][\alpha_0 a_{11}^0]^{-1}C_1(\xi,\mathbf{x}^*), \quad a_{11}^0 = \alpha_0^2/8,$$

$$a_{25}^0 = \lim_{t\to\infty} a_{25}(t), \quad a_{45}^0 = (\beta_0 + \sigma_0 + 4)/2.$$

Асимптотическую устойчивость траектории системы (2.1) и единственность предельной точки траектории можно показать по аналогии с работами [3]–[6].

Из (4.11), (4.12) следует, что траектория $\mathbf{x}(t)$ ограничена, а в силу (4.16) имеем

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\left[\|\mathbf{x}''(t)\|^2 + \|\mathbf{x}'(t)\|^2 + \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|^2\right] = 0 \quad \forall \mathbf{x}^* \in Q_* \tag{4.20а}$$

и существует подпоследовательность $\{t_i\}$, такая, что

$$\|\mathbf{x}''(t_i)\| \to 0, \quad \|\mathbf{x}'(t_i)\| \to 0, \quad \|\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}^*\| \to 0, \quad i \to \infty, \quad \mathbf{x}^* \in Q_*. \tag{4.20б}$$

Если в $C_1(\xi,\mathbf{x}^*)$ из (4.10) положим $t = t_i$, учтем (4.9) и для $t_i \ge t_1$ обозначим

$$C_1(t_i,\mathbf{x}^*) = a_{31}(t_i)\|\mathbf{x}'(t_i)\|^2 + \alpha(t_i)(\mathbf{x}'(t_i), \mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}^*) +$$

$$+ [a_{41}(t_i) - 0.5\alpha'(t_i)]\|\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}^*\|^2,$$

то в пределе с учетом (4.12), (4.17), (4.20а), (4.20б) получим

$$C_1(t_i,\mathbf{x}^*) \to 0, \quad i \to \infty, \quad \mathbf{x}^* \in Q_*. \tag{4.21}$$

Тогда с учетом (4.21) из (4.15а), (4.16) следует первое доказываемое соотношение из (4.2), а из (4.12), (4.17), (4.19), (4.20б), (4.21) следует второе соотношение из (4.2).

Из второго неравенства (4.4) при $b = \mathbf{u}^*$, с учетом (3.2) из леммы 2, имеем

$$\begin{gathered}\left(\mathbf{s}(t) - \mathbf{v}(t), \mathbf{s} - \mathbf{u}^*\right) \le -\lambda(t)\left(\nabla h_1(\mathbf{v}(t)), \mathbf{u}^* - \mathbf{s}(t)\right), \quad \mathbf{u}^* \in U^* \subset U,\\ \mathbf{s}(t) = \alpha(t)\mathbf{u}''(t) + \beta(t)\mathbf{u}'(t) + \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(t) - \theta(t)\mathbf{u}'(t), \quad t \ge 0,\end{gathered} \tag{4.22}$$

где скалярное произведение в правой части представим в виде суммы двух слагаемых:

$$-\left(\nabla h_1(\mathbf{v}(t)), \mathbf{u}^* - \mathbf{s}(t)\right) = -\left(\nabla h_1(\mathbf{v}(t)), \mathbf{u}^* - \mathbf{v}(t)\right) - \left(\nabla h_1(\mathbf{v}(t)), \mathbf{v}(t - \mathbf{s}(t)\right). \tag{4.23}$$

Слагаемые в правой части (4.23) преобразуем с помощью неравенства для вогнутой функции (см. [9, § 2.4, с. 44]),

$$(\nabla h_1(\mathbf{v}), \mathbf{u}^* - \mathbf{v}(t)) \ge h_1(\mathbf{u}^*) - h_1(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v}(t) \in H_U, \quad \mathbf{u}^* \in U^*,$$

и другого неравенства

$$(\nabla h_1(\mathbf{v}), \mathbf{v} - \mathbf{s}) \ge h_1(\mathbf{v}) - h_1(\mathbf{s}) - \frac{R}{2}\|\mathbf{v} - \mathbf{s}\|^2 \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{s} \in H_U$$

(см. [8, гл. 2, § 3, с. 93; R из леммы 2]). Подставим их в (4.23) и преобразованное (4.23) будет иметь вид

$$-(\nabla h_1(\mathbf{v}), \mathbf{u}^* - \mathbf{s}) \le h_1(\mathbf{s}) - h_1(\mathbf{u}^*) + \frac{R}{2}\|\mathbf{v} - \mathbf{s}\|^2 \le \frac{R}{2}\|\mathbf{v} - \mathbf{s}\|^2, \tag{4.23а}$$

где учтено, что $h_1(\mathbf{s}) - h_1(\mathbf{u}^*) \le 0$ ввиду вогнутости функции $h_1(\mathbf{u})$. Пользуясь (4.23а) в (4.22), получаем

$$\left(\mathbf{s}(t) - \mathbf{v}(t), \mathbf{s} - \mathbf{u}^*\right) \le \frac{R\lambda}{2}\|\mathbf{v}(t) - \mathbf{s}(t)\|^2. \tag{4.24}$$

В (4.24) подставим разложения для левой части и квадрата нормы в правой части

$$\left(\mathbf{s}(t) - \mathbf{v}(t), \mathbf{s} - \mathbf{u}^*\right) = \left(\alpha(t)\mathbf{u}''(t) + (\beta(t) + \theta(t))\mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^* + \beta\mathbf{u}'(t) + \alpha\mathbf{u}''(t)\right) =$$

$$= (\alpha(t)\mathbf{u}'', \mathbf{u} - \mathbf{u}^*) + (\beta + \theta)(\mathbf{u}', \mathbf{u} - \mathbf{u}^*) + \alpha^2 \|\mathbf{u}''\|^2 + \beta(\beta + \theta)\|\mathbf{u}'\|^2 + \alpha(2\beta + \theta)(\mathbf{u}', \mathbf{u}''),$$

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{s}\|^2 = \|\mathbf{s} - \mathbf{v}\|^2 = \|\alpha(t)\mathbf{u}''(t) + (\beta + \theta)\mathbf{u}'(t)\|^2 =$$

$$= \alpha^2 \|\mathbf{u}''(t)\|^2 + (\beta + \theta)^2 \|\mathbf{u}'(t)\|^2 + 2\alpha(\beta + \theta)(\mathbf{u}'', \mathbf{u}').$$

После их подстановки из (4.24) следует

$$\begin{gathered} b_1(t)\|\mathbf{u}''\|^2 + b_{21}^a(t)\|\mathbf{u}'\|^2 + b_{31}(t)(\mathbf{u}', \mathbf{u}'') + \\ + \alpha(\mathbf{u}'', \mathbf{u} - \mathbf{u}^*) + (\beta + \theta)(\mathbf{u}', \mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \le 0, \quad t \ge 0, \end{gathered} \tag{4.25}$$

где

$$0 < \lambda(t) < \frac{2\beta}{R(\beta + \theta)}; \quad b_1(t) = \alpha^2\left(1 - \frac{R\lambda}{2}\right) > 0, \quad b_{21}^a(t) = (\beta + \theta)\left[\beta - \frac{R\lambda}{2}(\beta + \theta)\right] > 0,$$

$$b_{31}(t) = \alpha(2\beta + \theta + 2\beta + 2\theta) = \alpha(t)(4\beta + 3\theta) > 0.$$

Справедливы аналогичные (4.8) тождества

$$\begin{gathered} 2(\mathbf{u}''(t), \mathbf{u}'(t)) = \frac{d}{dt}\|\mathbf{u}'(t)\|^2; \quad 2(\mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^*) = \frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^*\|^2; \\ (\mathbf{u}'', \mathbf{u} - \mathbf{u}^*) = \frac{d^2}{dt^2}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\|^2/2 - \|\mathbf{u}'\|^2, \quad t \ge 0. \end{gathered} \tag{4.8a}$$

Преобразуем (4.25) с помощью тождеств (4.8а), тогда получим

$$b_1(t)\|\mathbf{u}''\|^2 + b_{22}\|\mathbf{u}'\|^2 + b_3(t)\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}'\|^2 + \alpha(t)\frac{d^2}{dt^2}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\|^2/2 + b_{41}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\|^2 \le 0, \quad t \ge 0, \tag{4.26}$$

где

$$b_{22}(t) = b_{21}^a(t) - \alpha(t), \quad 0 < \lambda < 2[\beta(\beta + \theta) - \alpha]/[R(\beta + \theta)^2] = \lambda^{11}, \quad \alpha < \beta(\beta + \theta),$$

$$b_3 = \frac{1}{2}b_{31} = 2\alpha\beta + 3\alpha\theta/2, \quad b_{41} = \frac{1}{2}(\beta + \theta).$$

Проинтегрировав (4.26), на отрезке $[\xi, t]$, $t > \xi \ge 0$, получим

$$\begin{gathered} \int_\xi^t [b_1(s)\|\mathbf{u}''\|^2 + b_{21}(s)\|\mathbf{u}'\|^2 + b_{42}(s)\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\|^2]ds + \\ + b_3(t)\|\mathbf{u}'(t)\|^2 + b_{43}(t)\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\|^2 + \alpha(t)\frac{d}{dt}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\|^2 \le C_3(\xi, \mathbf{u}^*), \\ t > \xi \ge 0, \quad \mathbf{u}^* \in U^*, \end{gathered} \tag{4.27}$$

где

$$b_{21}(s) = b_{22}(s) - b_3'(s) > 0, \quad b_{22} > 0,\ b_3' < 0, \quad b_{42}(s) = \alpha''(s) - \frac{1}{2}(\beta'(s) + \theta'(s)) > 0,$$

с учетом (4.8а) имеем

$$C_3(\xi, \mathbf{u}^*) = b_3(\xi)\|\mathbf{u}'(\xi)\|^2 + 2\alpha(\xi)(\mathbf{u}'(\xi), \mathbf{u}(\xi) - \mathbf{u}^*) + b_{43}(\xi)\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\|^2,$$

$$b_{43}(t) = (\beta + \theta)/2 - \alpha' > 0;$$

коэффициенты и интеграл положительны. Из (4.27) без положительных слагаемых следует

$$\frac{\alpha(t)}{b_{43}(t)}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\|^2 \le C_3(\xi, \mathbf{u}^*)/b_{43}(t), \quad t > \xi \ge 0, \quad \mathbf{u}^* \in U^*. \tag{4.28}$$

Умножим (4.28) на

$$b_{43}(t)\frac{g(t)}{\alpha(t)}, \quad g(t) = \exp\left(\int_0^t b_{43}(s)\alpha^{-1}(s)ds\right) > 0,$$

$$g(t)\frac{d}{dt}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\|^2 + b_{43}(t)g(t)\alpha^{-1}(t)\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\|^2 \le C_3(\xi, \mathbf{u}^*)g(t)\alpha^{-1}(t), \quad t > \xi \ge 0.$$

Отсюда с учетом производной $g'(t) = b_{43}(t)g(t)/\alpha(t)$ имеем

$$\frac{d}{dt}[g(t)\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\|^2] \le C_3(\xi, \mathbf{u}^*)g(t)/\alpha, \quad t > \xi \ge 0. \tag{4.29}$$

Проинтегрировав (4.29) на $[\xi, t]$ и умножив полученное неравенство на $g^{-1}(t)$, получим

$$\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^*\|^2 \le \frac{C_3(\xi, \mathbf{u}^*)}{\alpha g(t)}\int_\xi^t g(s)ds + \frac{g(\xi)\|\mathbf{u}(\xi) - \mathbf{u}^*\|^2}{g(t)} \le C_3(\xi, \mathbf{u}^*)q(t), \quad t > \xi \ge 0,$$
$$q(t) = \frac{1}{\alpha_0 g(t)}\int_\xi^t g(s)ds + \frac{g(\xi)\|\mathbf{u}(\xi) - \mathbf{u}^*\|^2}{C_3(\xi, \mathbf{u}^*)g(t)}, \quad \alpha(t) \ge \alpha_0 > 0, \quad \lim_{t\to\infty} q(t) = \alpha_0^{-1}. \tag{4.30a}$$

Отсюда имеем

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^*\|^2 \le C_3(\xi, \mathbf{u}^*)/\alpha_0, \quad t > \xi \ge 0, \quad \mathbf{u}^* \in U^*. \tag{4.30}$$

Оценим второе и третье слагаемые во втором соотношении из (4.3) с помощью неравенств (4.8а) и (4.14). Учитывая (4.1) и то, что существуют числа $r > 0$ и $\eta \ge 0$ такие, что для $s > \eta \ge \xi \ge 0$ коэффициенты подынтегральных слагаемых в (4.27) $b_1(s) \ge r > 0$, $b_{21}(s) \ge r > 0$, $b_{42}(s) \ge r > 0$, и применяя (4.8а), из (4.27) получаем

$$r\int_\xi^t \left\{\|\mathbf{u}''(s)\|^2 + \|\mathbf{u}'(s)\|^2 + \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}^*\|^2\right\}ds + b_{43}(t)\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^*\|^2 +$$
$$+2\alpha(t)(\mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^*) + b_3(t)\|\mathbf{u}'(t)\|^2 \le C_3(\xi, \mathbf{u}^*), \tag{4.31}$$
$$t > \eta \ge \xi \ge 0.$$

В (4.31) третье слагаемое оценим с помощью неравенства (4.14) при $\varepsilon = \beta$, $a = \mathbf{u}'(t)$, $b = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^*$, т.е.

$$2\alpha(t)(\mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^*) \ge -\alpha\beta\|\mathbf{u}'(t)\|^2 - \alpha\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^*\|^2/\beta.$$

Тогда верно

$$r\int_\xi^t \left\{\|\mathbf{u}''(s)\|^2 + \|\mathbf{u}'(s)\|^2 + \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}^*\|^2\right\}ds + b_{32}(t)\|\mathbf{u}'(t)\|^2 + b_{44}(t)\|\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}^*\|^2 \le C_3(\xi, \mathbf{u}^*),$$
$$t > \eta \ge \xi \ge 0, \tag{4.32}$$

где коэффициенты при втором и третьем слагаемых неотрицательны при условиях (4.1),

$$b_{32}(t) = b_3 - \alpha\beta = 2\alpha\beta + \frac{3\alpha\theta}{2} - \alpha\beta = \alpha\beta + \frac{3\alpha\theta}{2},$$

$$b_{44}(t) = b_{43}(t) - \frac{\alpha}{\beta} > 0, \quad 0 < \alpha \le \frac{1}{2}\beta(\beta + \theta).$$

Неравенство (4.32) эквивалентно системе

$$\int_\xi^t \left[\|\mathbf{u}''(s)\|^2 + \|\mathbf{u}'(s)\|^2 + \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}^*\|^2\right]ds \le C_3(\xi, \mathbf{u}^*)/r, \tag{4.33a}$$

$$\|\mathbf{u}'(t)\|^2 \le C_3(\xi, \mathbf{u}^*)/b_{32}(t), \quad t > \eta \ge \xi \ge 0. \tag{4.34a}$$

Из (4.33а), (4.34а), с учетом $\lim b_{32}(t) = \alpha_0\beta_0 + \frac{3}{2}\alpha_0\theta_0 = b_{32}^0$ при $t \to \infty$, и условий (4.1) для параметров метода, следует

$$\int_0^\infty \left(\|\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}^*\|^2 + \|\mathbf{u}'(s)\|^2 + \|\mathbf{u}''(s)\|^2\right) ds < +\infty \quad \forall \mathbf{u}^* \in U^*, \tag{4.33}$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \|\mathbf{u}'(t)\|^2 \le C_3(\xi, \mathbf{u}^*)/b_{32}^0, \quad t > \eta \ge \xi \ge 0. \tag{4.34}$$

Оценку для $\|\mathbf{u}''(t)\|$ получим из (4.25) с помощью (4.8а) и (4.14). С учетом оценок

$$b_{31}(\mathbf{u}'(t), \mathbf{u}''(t)) \ge -2(4\beta + 3\theta)\|\mathbf{u}'(t)\|^2 - \alpha^2(4\beta + 3\theta)\|\mathbf{u}''(t)\|^2/8,$$

$$(\beta + \theta)(\mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^*) \ge -(\beta + \theta)\|\mathbf{u}'(t)\|^2/2 - (\beta + \theta)\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^*\|^2/2,$$

$$\alpha(\mathbf{u}''(t), \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^*) \ge -\alpha^2\|\mathbf{u}''(t)\|^2/8 - 2\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^*\|^2,$$

получаемых из (4.14) соответственно при $\varepsilon = 4/\alpha$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = \alpha/4$, из (4.25) следует

$$b_{11}^1(t)\|\mathbf{u}''\|^2 \le b_{24}(t)\|\mathbf{u}'\|^2 + b_{44}(t)\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\|^2, \quad t \ge 0, \quad \mathbf{u}^* \in Q_*, \tag{4.35}$$

где следующие оценки коэффициентов верны при условиях (4.1):

$$b_{11}^1(t) = b_1(t) - \alpha^2(4\beta + 3\theta)/8 - \alpha^2/8 = \alpha^2[7 - 4R\lambda - 4\beta - 3\theta]/8 > \alpha^2(1 + \theta)/8 = b_{11}(t)$$

$$\text{при} \quad 0 < \lambda < \min\left\{\frac{2\beta(\beta + \theta) - 2\alpha}{R(\beta + \theta)(\beta + \theta)}; \frac{3 - 2\beta - 3\theta}{2R}\right\},$$

$$b_{24}(t) = 2(4\beta + 3\theta) + (\beta + \theta)/2 - b_{21}^a(t) < (17\beta + 13\theta)/2 = b_{25}(t),$$

$$b_{44}(t) \le \frac{\beta + \theta}{2} + 2 = \frac{\beta + \theta + 4}{2} = b_{45}(t).$$

С учетом этих оценок и (4.30а), (4.34а), из (4.35) получим

$$\begin{gathered} b_{11}(t)\|\mathbf{u}''\|^2 \le b_{25}(t)\|\mathbf{u}'\|^2 + b_{45}(t)\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\|^2, \quad t \ge 0, \quad \mathbf{u}^* \in Q_*, \\ \|\mathbf{u}''\|^2 \le [b_{11}(t)]^{-1}\left(C_3(\xi, \mathbf{u}^*)[b_{25}(t)[b_{32}(t)]^{-1} + b_{45}(t)q(t)]\right). \end{gathered} \tag{4.36а}$$

С учетом (4.30), (4.34) из (4.36а) следует

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \|\mathbf{u}''(t)\|^2 \le C_4(\xi, \mathbf{u}^*), \quad \mathbf{u}^* \in U^*, \tag{4.36б}$$

где

$$C_4(\xi, \mathbf{u}^*) = C_3(\xi, \mathbf{u}^*)(b_{11}^0)^{-1}\left(b_{25}^0(b_{32}^0)^{-1} + b_{45}^0\alpha_0^{-1}\right),$$

$$b_{11}^0 = \alpha_0^2(1 + \theta_0)/8, \quad b_{25}^0 = (17\beta_0 + 13\theta_0)/2, \quad b_{45}^0 = (\beta_0 + \theta_0 + 4)/2.$$

Далее, в силу (4.30а), (4.30) траектория $\mathbf{u}(t)$ ограничена, а в силу (4.33) имеем

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\left(\|\mathbf{u}''(t)\|^2 + \|\mathbf{u}'(t)\|^2 + \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^*\|^2\right) = 0 \quad \forall \mathbf{u}^* \in U^*$$

и существует подпоследовательность $\{t_i\}$, что

$$\|\mathbf{u}''(t_i)\| \to 0, \quad \|\mathbf{u}'(t_i)\| \to 0, \quad \|\mathbf{u}(t_i) - \mathbf{u}^*\| \to 0, \quad i \to \infty, \quad \mathbf{u}^* \in U^*. \tag{4.37}$$

Если в (4.10) положим $t = t_i$, учтем (4.9) и для $t_i \ge t_1$ обозначим

$$C_5(t_i, \mathbf{u}^*) = b_3(t_i)\|\mathbf{u}'(t_i)\|^2 + 2\alpha(t_i)(\mathbf{u}'(t_i), \mathbf{u}(t_i) - \mathbf{u}^*) + b_{43}(t_i)\|\mathbf{u}(t_i) - \mathbf{u}^*\|^2,$$

то в пределе, с учетом (4.30), (4.34), (4.36), (4.37) получим,

$$C_5(t_i, \mathbf{u}^*) \to 0, \quad i \to \infty, \quad \mathbf{u}^* \in U^*.$$

Тогда с учетом (4.37) из (4.33) следует третье доказываемое соотношение из (4.3), а из (4.30), (4.34), (4.36), (4.37) следует четвертое соотношение из (4.3).

Теорема 1 доказана.

5. ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ НПОЭКМС (2.1)

Получим оценки скорости сходимости метода (2.1), (4.1) для выпукло-вогнутой функции.

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1, *включая* (4.1)−(4.3), *леммы* 1 *и* 2. *Тогда траектория* $\{\mathbf{x}(t);\mathbf{u}(t)\}$ НПОЭКМС (2.1), (4.1)−(4.3) *сходится к седловой точке* $(\mathbf{x}^*;\mathbf{u}^*)\in Q_*\times U^*$ *задачи* (1.1) $\forall t\geq 0$ *с экспоненциальной скоростью с оценками*:

$$\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*\|\leq\{2C_{21}p_2(t)\}^{1/2}, \tag{5.1}$$

$$\|\mathbf{x}'(t)\|\leq 2\left(C_{21}(\alpha(t)\beta(t))^{-1}\right)^{1/2}, \tag{5.2}$$

$$\|\mathbf{x}''\|\leq[a_{11}(t)]^{-1/2}\left\{2C_{21}[2a_{25}(t)(\alpha\beta)^{-1}+a_{45}(t)p_2(t)]\right\}^{1/2}, \tag{5.3}$$

$$\|\mathbf{u}(t)-\mathbf{u}^*\|\leq[C_{31}q_2(t)]^{1/2}, \tag{5.4}$$

$$\begin{gathered}\|\mathbf{u}'(t)\|\leq(C_{31}/b_{32}(t))^{1/2},\\ \|\mathbf{u}''(t)\|\leq[b_{11}(t)]^{-1/2}\left\{C_{31}[b_{25}(t)(b_{32}(t))^{-1}+b_{45}(t)q_2(t)]\right\}^{1/2},\end{gathered} \tag{5.5}$$

где

$$\begin{gathered}C_{21}=a_{31}(0)\left\|\mathbf{x}^1\right\|^2+\alpha(0)(\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*)+(a_{41}(0)-\frac{1}{2}\alpha'(0))\left\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*\right\|^2,\\ C_{31}=b_3(0)\left\|\mathbf{u}^1\right\|^2+2\alpha(0)(\mathbf{u}^1,\mathbf{u}^0-\mathbf{u}^*)+b_{43}(0)\left\|\mathbf{u}^0-\mathbf{u}^*\right\|^2,\end{gathered} \tag{5.6}$$

$$p_2(t)=\frac{1}{\alpha_0 e(t)}\int_0^t e(s)ds+\frac{e(0)\left\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*\right\|^2}{2C_{21}e(t)},\quad q_2(t)=\frac{1}{\alpha_0 g(t)}\int_0^t g(s)ds+\frac{g(\xi)\left\|\mathbf{u}(\xi)-\mathbf{u}^*\right\|^2}{C_{31}g(t)},$$

$$e(t)=\exp\left(\int_0^t a_{43}(s)\alpha^{-1}(s)ds\right),\quad g(t)=\exp\left(\int_0^t b_{43}(s)\alpha^{-1}(s)ds\right),\quad a_{11},a_{25},a_{31},$$

$a_{41},a_{43},a_{45},b_{11},b_{25},b_{31},b_{41},b_{42},b_{45}$ *из теоремы* 1, *а их значения при* $t=0$.

Доказательство. Заметим, что при выполнении всех условий теоремы 2, выкладки и результаты теоремы 1 о сходимости метода (2.1) справедливы (обозначения коэффициентов, совпадающих с полученными в теореме 1, сохраняем; новые коэффициенты C_{21}, C_{31} приведены в формулировке теоремы 2). Проведя аналоги выкладок из теоремы 1 от (4.4), но теперь при $\xi=0$, получим аналог (4.11)

$$\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*\|^2\leq\frac{2C_{21}}{\alpha e(t)}\int_0^t e(s)ds+\frac{e(0)\left\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*\right\|^2}{e(t)}\leq 2C_{21}p_2(t),\quad t\geq 0. \tag{5.7}$$

Из (5.7) следует оценка (5.1).

Проведем выкладки, аналогичные проведенным в теореме 1 от (4.13) до (4.15б), только при $\xi=0$, тогда аналог (4.15б) имеет вид

$$\|\mathbf{x}'(t)\|^2\leq 4C_{21}(\alpha(t)\beta(t))^{-1},\quad t\geq 0. \tag{5.8}$$

Из (5.8) следует оценка (5.2).

Для получения (5.3) вычислим аналоги (4.16)−(4.18) для $\xi=0$, тогда (сохраняя из теоремы 1 и обозначения, за исключением $p_2(t)$ и $q_2(t)$), с учетом (5.7), (5.8) получим

$$\|\mathbf{x}''\|^2\leq[a_{11}(t)]^{-1}\left(2C_{21}[2a_{25}(t)(\alpha\beta)^{-1}+a_{45}(t)p_2(t)]\right),\quad t\geq 0, \tag{5.9}$$

где $p_2(t)$ из (5.7) (см. условия теоремы 2). Из (5.9) следует оценка (5.3).

Теперь проведем аналоги выкладок из теоремы 1 по $\mathbf{u}(t)$, но при $\xi = 0$. Вычислив аналоги для (4.26)−(4.29), затем получим аналог неравенства (4.30а)

$$\left\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^*\right\|^2 \leq \frac{C_{31}}{\alpha g(t)}\int_0^t e(s)ds + \frac{g(0)\left\|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^*\right\|^2}{g(t)} \leq C_{31}q_2(t), \quad t \geq 0. \tag{5.10}$$

Из неравенства (5.10) следует оценка (5.4).

Далее получим оценку (5.5). Проведем аналоги выкладок из теоремы 1 после (4.30) до получения неравенства (4.34а), только при $\xi = 0$, с учетом неравенства (5.10), оценок коэффициентов, получим

$$\left\|\mathbf{u}'(t)\right\|^2 \leq C_{31}/b_{32}(t), \quad t > 0. \tag{5.11}$$

Из (5.11) следует оценка (5.5).

Для вычисления оценки (5.6) продолжим аналоги выкладок из теоремы 1 после (4.34) до получения (4.36а), только при $\xi = 0$; с учетом неравенств (5.10), (5.11) получим

$$\left\|\mathbf{u}''(t)\right\|^2 \leq [b_{11}(t)]^{-1}\left\{C_{31}[b_{25}(t)(b_{32}(t))^{-1} + b_{45}(t)q_2(t)]\right\}, \quad t > 0, \tag{5.12}$$

где $q_2(t)$ из (5.10). Из неравенства (5.12) следует оценка (5.6).

Теорема 2 доказана.

6. ВЫВОДЫ

Исследованный в данной работе НПОЭКМС (2.1) продолжает на непрерывные проекционные ЭГМ второго порядка *для решения седловых задач* идею использования операторов переменной метрики, впервые воплощенную в НПММ первого порядка в работе [4]. НПОЭКМС (2.1) обладает достоинствами, присущими и НПММ, и методам переменной метрики; он имеет лучшую точность и скорость сходимости в окрестности седловой точки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эрроу К.Дж., Гурвиц Л., Удзава Х.* Исследования по линейному и нелинейному программированию. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
2. *Корпелевич Г.М.* Экстраполяционные градиентные методы и их связь с модифицированными функциями Лагранжа // Экономика и матем. методы. 1983. Т. 19. Вып. 4. С. 694−703.
3. *Антипин А.С.* Градиентный и экстраградиентный подходы в билинейном и равновесном программировании. М.: Изд-во ВЦ РАН, 2002.
4. *Антипин А.С., Васильев Ф.П.* О непрерывном методе минимизации в пространствах с переменной метрикой // Известия вузов. Математика. 1995. № 12(403). С. 3−9.
5. *Малинов В.Г.* О проекционном квазиньютоновском обобщенном двухшаговом методе минимизации и оптимизации траектории летательного аппарата // Ж. Средневолжского матем. общества. 2010. Т. 12. № 4. С. 37−48.
6. *Малинов В.Г.* Версия непрерывного проекционного метода минимизации второго порядка с переменной метрикой // Ж. Средневолжского матем. общества. 2014. Т. 16. № 1. С. 121−134.
7. *Малинов В.Г.* О версии обобщенного экстраградиентного квазиньютоновского метода решения седловых и других задач // IX Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2018): Москва. 22–27 октября 2018 г.: Труды. В двух томах. Том II. М.: МАКС ПРЕСС, 2018. С. 124−126.
8. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
9. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. М.: Наука, 1975.
10. *Антипин А.С., Хамраева З.С.* Управляемые седловые дифференциальные градиентные методы 2-го порядка. М.: Вычислительный Центр РАН, 1996.
11. *Антипин А.С.* Управляемые дифференциальные градиентные методы второго порядка для решения равновесных задач // Дифференц. ур-ния. 1999. Т. 35. № 5. С. 590−599.