

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

© 2022 г. Н. Я. Моисеев^{1,*}, В. М. Шмаков^{1,**}

¹ 456770 Снежинск, Челябинская обл., а/я 245, ул. Васильева, 13, ФГУП “РФЯЦ-ВНИИТФ
им. акад. Е.И. Забабахина”, Россия

*e-mail: nik.moiseev.43@mail.ru

**e-mail: v.m.shmakov@vniitf.ru

Поступила в редакцию 11.03.2021 г.
Переработанный вариант 12.10.2021 г.
Принята к публикации 14.01.2022 г.

Рассмотрена модельная система нестационарных кинетических уравнений переноса теплового излучения и уравнения энергии в многогрупповом изотропном приближении в средах с постоянными коэффициентами поглощения и кусочно-постоянной функцией Планка в группах. Для модельной системы уравнений получены аналитические решения для плоской геометрии и для шара. Аналитические решения получены путем перехода от решения сложной системы уравнений к решению более простой, которая имеет известное аналитическое решение. Обратный переход дает решение сложных уравнений. Приведены решения тестовых задач для плоского слоя и для шара. Библ. 6. Фиг. 10. Табл. 2.

Ключевые слова: кинетическое уравнение переноса теплового излучения и уравнения энергии, аналитические решения.

DOI: 10.31857/S004446692205009X

1. ВВЕДЕНИЕ

Кинетическое нестационарное уравнение переноса теплового излучения является интегро-дифференциальным уравнением. В работах [1]–[3] рассматриваются подходы к решению этого уравнения в различных предположениях относительно коэффициентов, что позволяет получать упрощенные уравнения переноса. Так, если коэффициенты в уравнении переноса положить равными нулю, то уравнение записывается в простейшей форме и моделирует перенос излучения в вакууме. Для уравнения переноса излучения в вакууме А.В. Вронским были получены аналитические решения, которые используются для отладки численных методов. Однако, если решаются уравнения переноса теплового излучения и уравнения энергии в средах с поглощением и переизлучением, то этих решений для отладки численных методов недостаточно.

Здесь рассмотрен подход к аналитическому решению модельных нестационарных кинетических уравнений переноса теплового излучения и уравнения энергии в многогрупповом изотропном приближении в средах с поглощением и переизлучением для плоской и сферически-симметричной геометрии. В основе подхода лежат аналитические решения уравнения переноса излучения в вакууме. Аналитические решения модельных уравнений выписываются в квадратурах, часть из которых выражается через элементарные функции, а другая содержит интегралы экспоненциального типа. Интегралы экспоненциального типа вычисляются по многоточечным квадратурам Гаусса [4] повышенной точности. Аналитические решения модельных задач подтверждены численными расчетами по методике [5].

2. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

2.1. Постановка задачи

Предположим, что коэффициенты рассеяния и функция источника равны нулю, плотность вещества $\rho = 1$. Систему кинетических нестационарных уравнений переноса теплового излучения и уравнения энергии в многогрупповом изотропном приближении запишем в виде [2]

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I_g}{\partial t} + \Omega \nabla I_g + \alpha_g I_g &= 0.5 \alpha_g B_g, \\ \frac{dE}{dt} &= \sum_{g=1}^G \alpha_g (U_g - B_g), \\ U_g &= \int_{-1}^1 I_g d\mu, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\Omega \nabla = \begin{cases} \mu \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} & \text{для сферически-симметричной геометрии,} \\ \mu \frac{\partial}{\partial x} & \text{для плоской геометрии.} \end{cases}$$

Здесь x , r и t – независимые переменные по пространству и времени соответственно, μ – косинус угла между направлением движения частиц и осью x или r , $-1 \leq \mu \leq 1$, g – индекс энергетической группы, I_g , E – неизвестные функции, $E(t, x)$ – удельная внутренняя энергия вещества, $T(t, x)$ – температура вещества, c – скорость света, $I_g(t, x, \mu)$ – спектральная интенсивность энергии излучения в группе g , $U_g(t, x)$ – спектральная плотность энергии излучения, умноженная на скорость света, $\alpha_g(x, T)$ – коэффициент поглощения,

$$B_g(T) = \frac{8\pi}{c^2 \bar{h}^3} \int_{\epsilon_g}^{\epsilon_{g+1}} \frac{\epsilon^3}{\exp(\epsilon/T) - 1} d\epsilon$$

есть интенсивность равновесного излучения (функция Планка), умноженная на скорость света, \bar{h} – постоянная Планка. Разностная сетка по энергии фотонов включает G независимых групп с энергиями $\epsilon_1, \dots, \epsilon_g, \dots, \epsilon_G$. Разностная сетка по переменной μ с центрами $\mu_m = 0.5(\mu_{m+1/2} + \mu_{m-1/2})$ и шагами $\Delta\mu = \mu_{m+1/2} - \mu_{m-1/2}$, $m = 1, \dots, M$, включает M направлений движения частиц (фотонов).

Система уравнений (2.1) замыкается уравнением состояния вещества в форме $E = E(T)$. Начальные условия: $T(0, x) = T_0(x)$, $I_g(0, x, \mu) = I_{g,0}(x, \mu)$. Требуется найти решение задачи Коши для $t > 0$ в областях $D = \{x_L \leq x \leq x_R, -1 \leq \mu \leq 1\}$, $D = \{0 \leq r \leq r_0, -1 \leq \mu \leq 1\}$ в случае плоской или сферически-симметричной геометрии соответственно.

2.2. Точные решения модельного уравнения переноса частиц в средах с поглощением

Для упрощения исследования системы уравнений (2.1) коэффициенты поглощения положим равными некоторым постоянным $\alpha_g(x, T) = \text{const}$. Функцию Планка аппроксимируем кусочно-постоянной функцией $B_g(T) = \text{const}$ в каждой группе. Уравнение состояния вещества возьмем в форме $E = 0.81T$. Систему кинетических уравнений переноса излучения и уравнения энергии с постоянными коэффициентами поглощения и кусочно-постоянной функцией Планка будем называть *модельной* системой уравнений. Для модельной системы уравнений рассмотрим решение задач Коши в плоской и сферически-симметричной геометриях. Для плоской геометрии начальные данные задаются в слое $|x| \leq x_0$, для сферической – в шаре с радиусом r_0 . В первом случае задачу будем называть задачей *о плоском слое*, во втором – задачей *о шаре*. Пусть в начальный мо-

мент времени на всей оси x задана температура вещества $T(0, x) = T_0(x)$ и задано однородно распределение частиц (фотонов)

$$I_g(0, x, \mu) = \begin{cases} I_{g,0}(x, \mu), & |x| \leq x_0, \\ 0.5B_g(T_0), & |x| > x_0. \end{cases} \quad I_{g,0} \geq 0.5B_g(T_0),$$

Требуется определить интенсивность излучения, плотность энергии излучения и температуру вещества для $t > 0$.

Аналитические решения модельной системы уравнений (2.1) для решения поставленной задачи получим следующим образом. Выполнив в системе уравнений (2.1) преобразование

$$\begin{aligned} I_g &= J_g \exp(-ct\alpha_g) + 0.5B_g, \\ \widehat{U}_g &= \int_{-1}^1 J_g d\mu \end{aligned} \quad (2.2)$$

получим эквивалентную систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial J_g}{\partial t} + \Omega \nabla J_g &= 0, \\ \frac{dE}{dt} &= \sum_{g=1}^G \alpha_g \widehat{U}_g \exp(-ct\alpha_g) \end{aligned} \quad (2.3)$$

с начальными данными для уравнения переноса в (2.3)

$$J_g(0, x, \mu) = \begin{cases} I_{g,0} - 0.5B_g, & |x| \leq x_0, \\ 0, & |x| > x_0. \end{cases}$$

Уравнение переноса в (2.3) можно интерпретировать как уравнение переноса излучения в вакууме, точные решения которого для интенсивности и плотности энергии излучения записываются в виде

$$J_g(t, x, \mu) = J_{g,0} \xi(t, x), \quad \widehat{U}_g(t, x) = U_{g,0} \xi(t, x) \quad (2.4)$$

соответственно. Подставив (2.4) в выражения (2.2), получим для интенсивности и плотности энергии излучения решения модельного уравнения переноса в (2.1), которые запишем в виде

$$\begin{aligned} I_g(t, x, \mu) &= \gamma \xi(t, x) I_{g,0} + 0.5(1 - \gamma \xi(t, x)) B_g, \\ U_g(t, x) &= \gamma \xi(t, x) U_{g,0} + (1 - \gamma \xi(t, x)) B_g, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\gamma = \exp(-ct\alpha_g)$$

соответственно. Отметим, что решения уравнения переноса излучения в вакууме находятся в плоскости (t, x) в областях, которые отделены друг от друга характеристиками

$$dx/dt = \pm c,$$

выходящими из точек x_0 и $-x_0$. Функция $\xi(t, x)$ вычисляется в задаче о плоском слое в шести областях следующим образом. Если $ct \leq x_0$, то

$$\xi(t, x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -x_0 - ct, \quad x_0 + ct < x < \infty, \quad \text{области I и II,} \\ \frac{x_0 + ct + x}{2ct}, & -x_0 - ct \leq x < -x_0 + ct, \quad \text{область IV,} \\ 1, & -x_0 + ct \leq x \leq x_0 - ct, \quad \text{область III,} \\ \frac{x_0 + ct - x}{2ct}, & x_0 - ct < x \leq x_0 + ct, \quad \text{область V.} \end{cases}$$

Если $ct > x_0$, то

$$\xi(t, x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -x_0 - ct, \quad x_0 + ct < x < \infty, \quad \text{области } I \text{ и } II, \\ \frac{x_0 + ct + x}{2ct}, & -x_0 - ct \leq x < x_0 - ct, \quad \text{область } IV, \\ \frac{x_0}{ct}, & x_0 - ct \leq x \leq -x_0 + ct, \quad \text{область } VI, \\ \frac{x_0 + ct - x}{2ct}, & -x_0 + ct < x \leq x_0 + ct, \quad \text{область } V. \end{cases}$$

Функция $\xi(t, r)$ вычисляется в задаче о шаре радиуса r_0 в четырех областях следующим образом.

Если $ct \leq r_0$, то

$$\xi(t, x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r < r_0 - ct, \quad \text{область } I, \\ \frac{r_0^2 - (r - ct)^2}{4rct}, & r_0 - ct \leq r < r_0 + ct, \quad \text{область } III, \\ 0, & r_0 + ct \leq r < \infty, \quad \text{область } II. \end{cases}$$

Если $ct > r_0$, то

$$\xi(t, x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < -r_0 + ct, \quad \text{область } IV, \\ \frac{r_0^2 - (r - ct)^2}{4rct}, & -r_0 + ct \leq r < r_0 + ct, \quad \text{область } III, \\ 0, & r_0 + ct \leq r < \infty, \quad \text{область } II. \end{cases}$$

2.3. Аналитические решения модельного уравнения энергии в средах с поглощением

Аналитические решения модельного уравнения энергии получим следующим образом. Подставив выражение (2.5) для плотности энергии излучения в уравнение энергии в (2.1), получим обыкновенное дифференциальное уравнение в виде

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{g=1}^G \alpha_g (U_{g,0} - B_g) \xi(t, x) \exp(-ct\alpha_g). \quad (2.6)$$

Проинтегрировав уравнение (2.6) на интервале $[0, t]$, получим для вычисления удельной внутренней энергии вещества выражение

$$E(t, x) = E(0, x) + \sum_{g=1}^G \int_0^t \alpha_g (U_{g,0} - B_g) \xi(\tau, x) \exp(-c\tau\alpha_g) d\tau. \quad (2.7)$$

Если $\xi(t, x) = 0$, то удельная внутренняя энергия вещества остается постоянной $E(t, x) = E(0, x)$ в задаче о плоском слое в областях I и II , в задаче о шаре – в областях II и IV . Если $\xi(t, x) = 1$, то интеграл в (2.7) берется в квадратурах точно. Взяв интеграл, получим для вычисления удельной внутренней энергии вещества в задачах о плоском слое в области III и о шаре в области I выражение

$$E(t, x) = E(0, x) + \frac{1}{c} \sum_{g=1}^G (1 - \gamma) (U_{g,0} - B_g), \quad \gamma = \exp(-ct\alpha_g). \quad (2.8)$$

Если $\xi \neq 0$, то удельная внутренняя энергия вещества вычисляется в задаче о плоском слое в областях I , V и VI из выражений

$$E(t, x) = E(0, x) + 0.5 \sum_{g=1}^G \alpha_g (U_{g,0} - B_g) \int_0^t (x_0 + c\tau \pm x) \frac{\exp(-c\tau\alpha_g)}{c\tau} d\tau, \quad (2.9)$$

$$E(t, x) = E(0, x) + \sum_{g=1}^G \alpha_g (U_{g,0} - B_g) \int_0^t x_0 \frac{\exp(-c\tau\alpha_g)}{c\tau} d\tau \quad (2.10)$$

соответственно. Здесь плюс берется в области IV, минус – в области V. Удельная внутренняя энергия вещества вычисляется в задаче о шаре в области III из выражения

$$E(t, x) = E(0, x) + \sum_{g=1}^G \alpha_g (U_{g,0} - B_g) \int_0^t \frac{r_0^2 - (r - c\tau)^2}{4r} \frac{\exp(-c\tau\alpha_g)}{c\tau} d\tau. \quad (2.11)$$

Интегралы в выражениях (2.9)–(2.11) являются интегралами экспоненциального типа, не интегрируются в элементарных функциях, и имеют устранимую особенность в нуле. Пусть удельная внутренняя энергия вещества в задаче о плоском слое вычисляется в точке $A(t, x)$, которая находится в области VI, где $t > t_0$. Если $|x| \leq x_0$ или $|x| > x_0$, то интеграл в уравнении (2.9) можно представить в виде суммы трех интегралов в областях III, V, VI или II, V, VI на интервалах по времени $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, t]$ соответственно. Здесь $t_1 = (x_0 - x)/c$, $t_2 = (x_0 + x)/c$ – это времена прихода возмущений по характеристикам из точек x_0 и $-x_0$ в точку x соответственно. При таком подходе к вычислению интегралов особенность в нуле устраняется за счет того, что функция $\xi(t, x) = 1$ в области III и $\xi(t, x) = 0$ в областях I, II. Особенности в нуле при вычислении интегралов в уравнениях (2.10) и (2.11) устраняются аналогичным образом. Экспоненциальные интегралы вычисляются по какой-либо квадратурной формуле с заданной точностью. Если интегралы вычислять по квадратурным формулам правых прямоугольников, которые обозначим как (C1), методом средних (C2) или по двухточечной формуле Гаусса (C3), то погрешности вычисления будут порядка $O(\tau)$, $O(\tau^2)$, $O(\tau^3)$ соответственно.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Аналитические решения модельных уравнений (2.1) проверялись путем решения простейших задач по переносу излучения в задачах о плоском слое и шаре. По энергии фотонов используется 15-групповое приближение из работы [6] с умноженными на 10 границами интервалов: [0, 3, 6, 8, 12, 15, 18, 24, 27, 30, 40, 50, 70, 90, 110, 150]. Средние значения энергии в группах относятся к центрам интервалов и равны полусумме значений энергий на границах интервалов.

В расчетах использовалась модельная функция Планка: [0.029, 0.202, 0.391, 0.609, 0.813, 0.927, 1.0, 0.977, 0.926, 0.762, 0.489, 0.2057, 0.051, 0.010, 0.001]. Модельная функция Планка построена путем усреднения обычной функции Планка в диапазоне температур $[0, T_{\max}]$ для $T_{\max} = 10$ кэВ и нормированием по максимальному значению. Для счета задач нормированная функция Планка умножается на положительный коэффициент. В дальнейшем такие функции будем различать по этим коэффициентам. Например, запись $B_g = 10$ определяет функцию Планка, которая получена из нормированной функции, умноженной на 10.

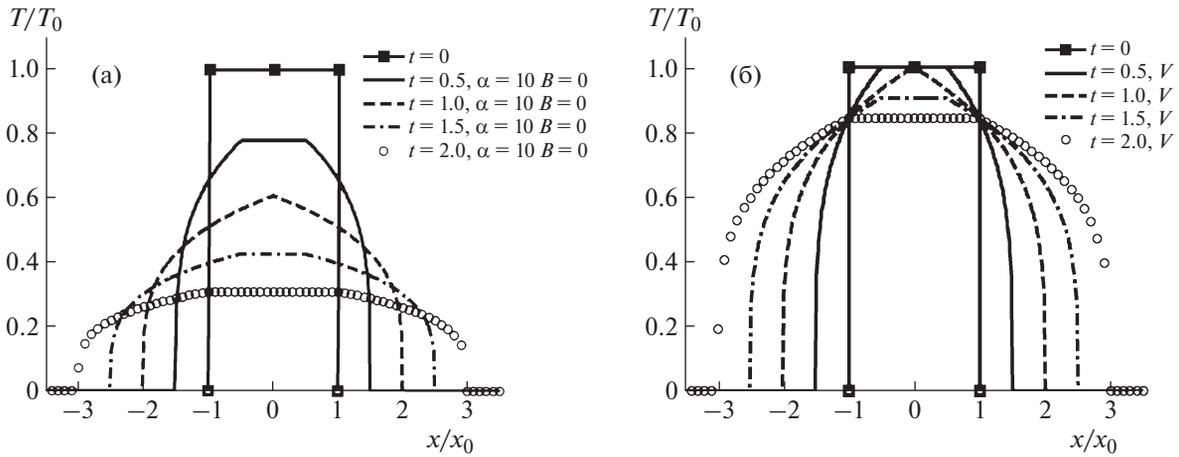
Решения находились на равномерной разностной сетке с шагом интегрирования по пространству равным $h = 0.002$ в моменты времени $t/t_0 = 0.5, 1, 1.5, 2$. Удельная внутренняя энергия вещества вычислялась с контролем точности по квадратурным формулам C1, C2, C3. Контроль точности осуществлялся по результатам двух расчетов с шагами интегрирования по времени τ и 0.5τ из анализа условия

$$|I(\tau) - I(0.5\tau)| < \epsilon.$$

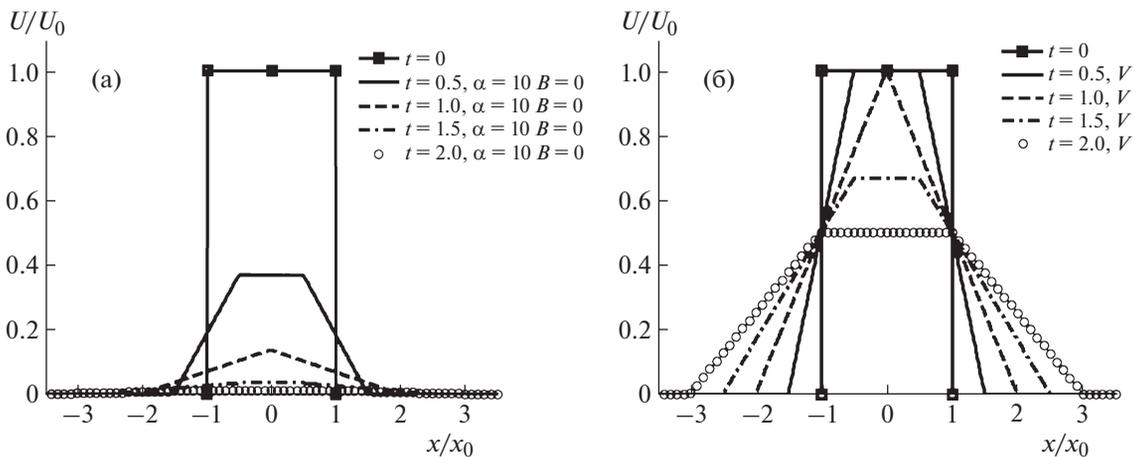
Здесь ϵ – константа сходимости. Если условие выполняется, то интеграл полагается равным $I(0.5\tau)$. Если условие не выполняется, то шаг интегрирования по времени уменьшается в два раза и вычисление интеграла повторяется [4]. Начальный шаг интегрирования $t_0 = x_0/c = = 6.6(6)\epsilon - 5$.

3.1. Перенос излучения в оптически прозрачных средах с поглощением. Задача о плоском слое

Задача 1. Коэффициенты поглощения равны $\alpha_g = 0$ и $\alpha_g = 10$ при переносе излучения в вакууме и в среде с поглощением соответственно. Модельные функции Планка в группах равны



Фиг. 1. Зависимости от x/x_0 температуры излучения: (а) – в среде с поглощением, (б) – в вакууме.



Фиг. 2. Зависимости от x/x_0 плотности энергии излучения: (а) – в среде с поглощением, (б) – в вакууме.

$B_g = 0$. Начальные данные: если $|x| \leq x_0 = 0.2$ см, то $I_0 = 500$ и $U_0 = 1000$, иначе $I_0 = 0$, $U_0 = 0$, температура вещества $T_0 = 0.001$ кэВ. Найти распределения температуры вещества и плотности энергии излучения на интервале $[-0.8, 0.8]$ в моменты времени $t/t_0 = 0.5, 1, 1.5, 2$.

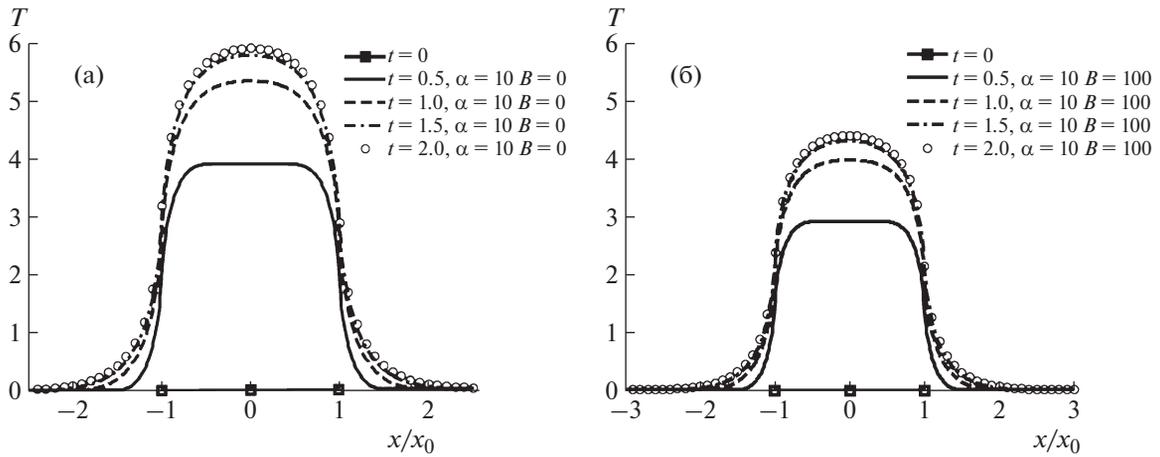
На фиг. 1–10 введены обозначения: V – обозначение вакуума, t в легендах на фигурах – отношение t/t_0 .

На фиг. 1 представлены зависимости от x/x_0 температуры излучения в моменты времени $t/t_0 = 0.5, 1, 1.5, 2$ в среде с поглощением и в вакууме.

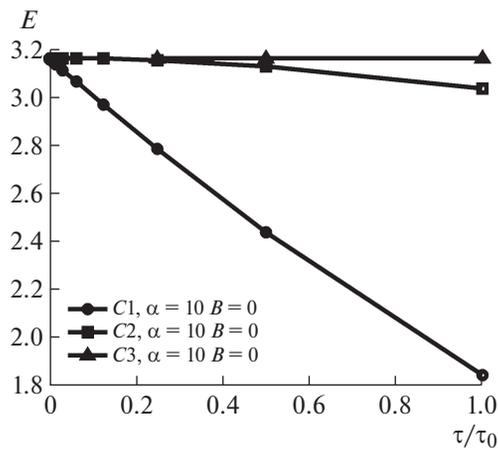
На фиг. 2 представлены зависимости от x/x_0 плотности энергии излучения в среде с поглощением и в вакууме в моменты времени $t/t_0 = 0.5, 1, 1.5, 2$.

Из анализа графиков на фиг. 1 и 2 следует, что положения фронтов тепловых волн излучения в вакууме и в среде с поглощением совпадают между собой. Температуры и плотности энергии излучения существенно различаются.

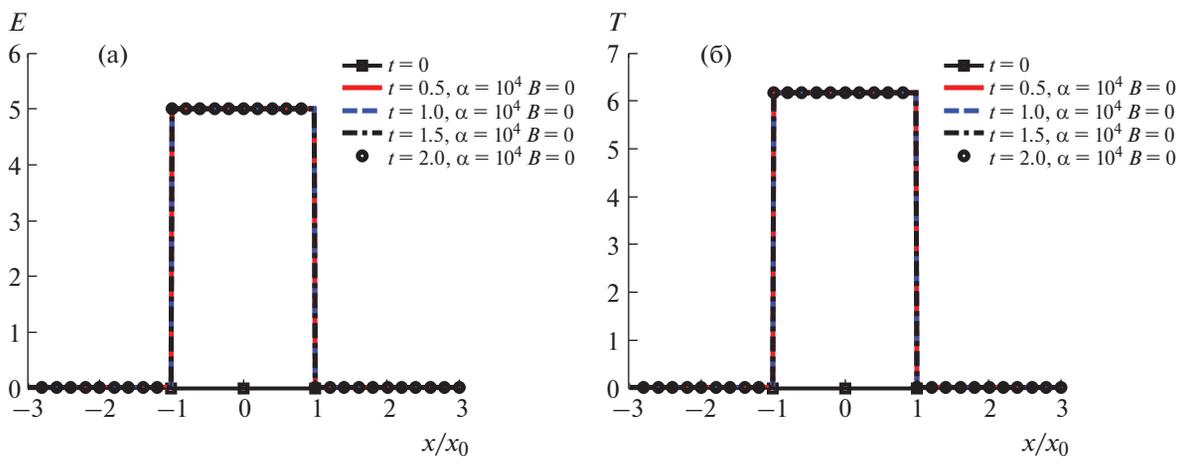
На фиг. 3 представлены зависимости от x/x_0 температуры вещества в среде с коэффициентом поглощения в группах $\alpha_g = 10$ и функциями Планка $B_g = 0$, $B_g = 100$ в моменты времени $t/t_0 = 0.5, 1, 1.5, 2$.



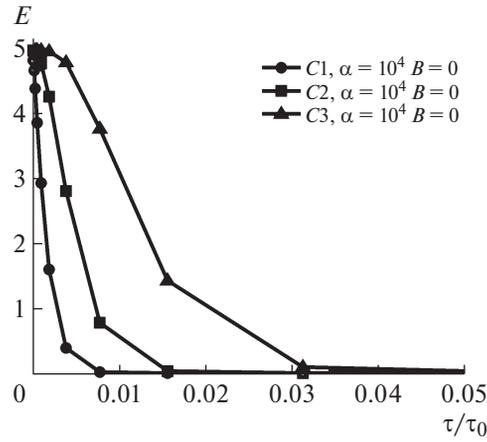
Фиг. 3. Зависимости от x/x_0 температуры вещества в среде с коэффициентом поглощения $\alpha_g = 10$: (а) – $B_g = 0$, (б) – $B_g = 100$.



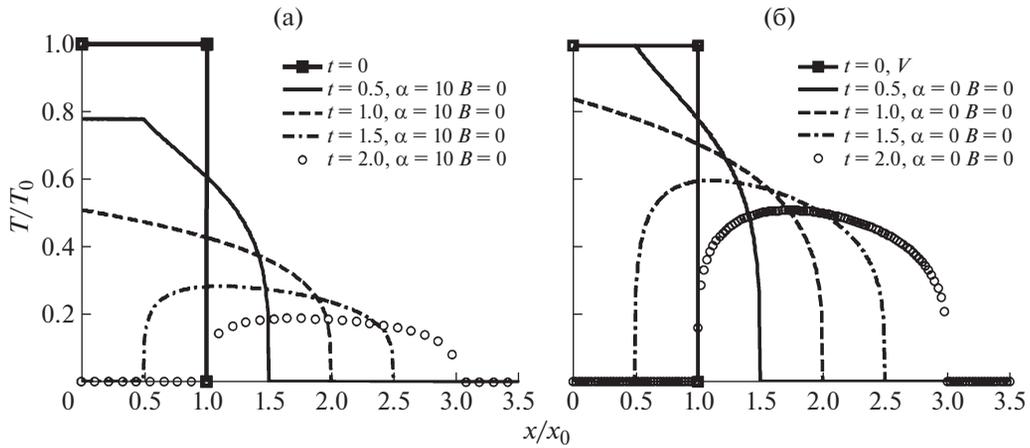
Фиг. 4. Зависимости от τ/τ_0 удельной внутренней энергии вещества: кружки – C1, квадраты – C2, треугольники – C3.



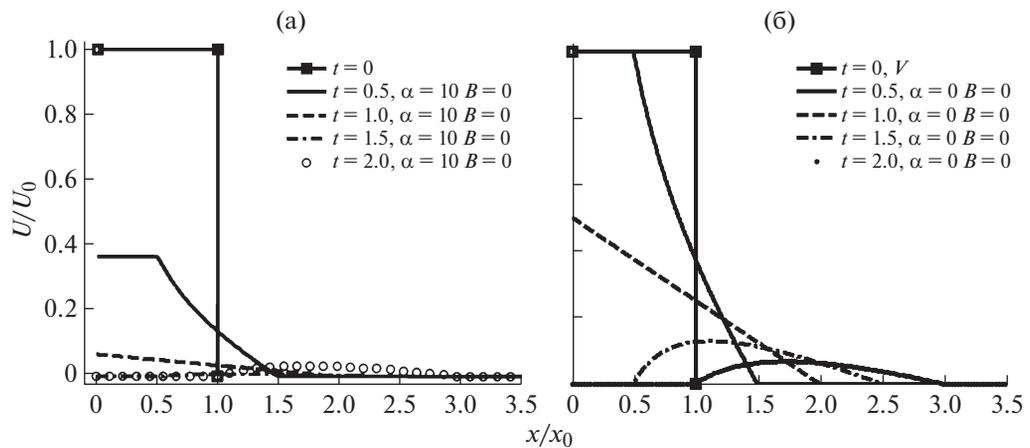
Фиг. 5. Зависимости от x/x_0 : (а) – удельной внутренней энергии вещества, (б) – температуры вещества.



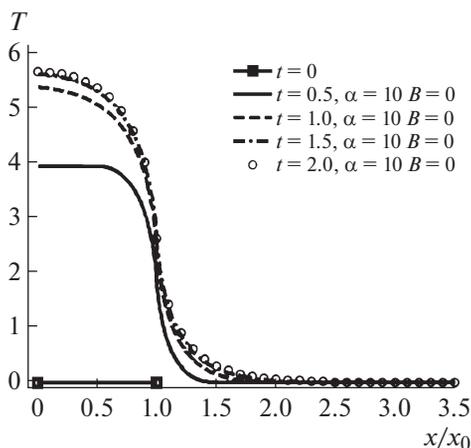
Фиг. 6. Зависимости от τ/τ_0 удельной внутренней энергии вещества.



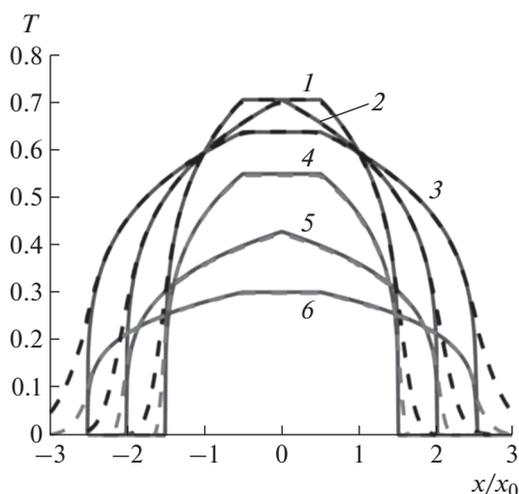
Фиг. 7. Профили температур излучения: (а) – в среде с поглощением, (б) – в вакууме.



Фиг. 8. Профили плотности энергии излучения: (а) – в среде с поглощения, (б) – в вакууме.



Фиг. 9. Профили температур вещества в среде с коэффициентом поглощения $\alpha_g = 10$ и функцией Планка $B_g = 0$.



Фиг. 10. Зависимости от x/x_0 температуры излучения: 1–3 – в вакууме, 4–6 – в среде с поглощением. Сплошные линии – точные решения, штриховые – численные решения.

Точные максимальные значения температуры, рассчитанные в задачах с функциями Планка $B_g = 0, B_g = 100$ в момент времени $t/t_0 = 0.5$, равны $T(B_g = 0) = 3.90297875820097$ и $T(B_g = 100) = 2.89551187902263$ соответственно.

На фиг. 4 представлены зависимости от τ/τ_0 удельной внутренней энергии вещества в расчетах на сходимость в момент времени $t/t_0 = 0.5$ при вычислении интегралов по квадратурным формулам С1, С2, С3.

Таблица 1

Метод	E $\epsilon = 0.1$	τ_1	Число шагов	E $\epsilon = 0.0001$	τ_2	Число шагов
С1	3.11147	1.4167 e-6	32	3.16050	2.034e-9	16384
С2	3.12792	1.66(2.6) e-5	2	3.16057	5.208e-7	64
С3	3.15989	3.33(2.3) e-5	1	3.16059	8.333e-6	4

Таблица 2

Метод	E	τ_1	Число шагов	E	τ_2	Число шагов
	$\varepsilon = 0.1$			$\varepsilon = 0.0001$		
C1	4.92409	1.0 e-9	32768	4.92409	5.0e-10	65536
C2	4.95067	1.63e-8	2048	4.99980	5.0e-10	32768
C3	4.9850	6.5e-8	512	4.99999	8.0e-9	4096

В табл. 1 приведены удельные внутренние энергии вещества, шаги интегрирования и число шагов по времени при вычислении интегралов в точке $x = 0.011$ с константами сходимости $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.0001$ и функцией Планка $B_g = 0$ в момент времени $t/t_0 = 0.5$.

3.2. Перенос излучения в оптически плотных средах с поглощением. Задача о плоском слое

Задача 2. Коэффициенты поглощения в группах равны $\alpha_g = 10000$, функция Планка — $B_g = 0$, удельная внутренняя энергия вещества — $E_0 = 0.00081$, температура — $T_0 = 0.001$ кэВ. Плотность энергии излучения: если $|x| \leq x_0 = 0.2$ см, то $I_0 = 500$ и $U_0 = 1000$, иначе $I_0 = 0$, $U_0 = 0$, удельная внутренняя энергия излучения — $E_{0,U} = 5$. Требуется определить температуру вещества и излучения в моменты времени $t/t_0 = 0.5, 1, 1.5, 2$.

Технология счета задачи была такой же, как и в задаче 1. Однако для достижения точного максимального значения температуры вещества потребовался меньший шаг интегрирования по времени, чем в задаче 1.

На фиг. 5 представлены зависимости от x/x_0 удельной внутренней энергии и температуры вещества в моменты времени $t/t_0 = 0.5, 1, 1.5, 2$.

Результаты расчетов показали, что удельная внутренняя энергия излучения полностью перешла (преобразовалась) в удельную внутреннюю энергию вещества. Удельная внутренняя энергия вещества, рассчитанная по точным формулам (2.6) без учета E_0 , равна $E_0 = 5$, температура вещества — $T = 6.17383950617284$.

На фиг. 6 представлены зависимости от τ/τ_0 удельной внутренней энергии вещества в расчетах на сходимость в момент времени $t/t_0 = 0.5$ при вычислении интегралов по квадратурным формулам C1, C2, C3.

В табл. 2 приведены удельные внутренние энергии вещества, шаги интегрирования и число шагов по времени при вычислении интегралов в точке $x = 0.011$ с константами сходимости $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.0001$ и функцией Планка $B_g = 0$ в момент времени $t/t_0 = 0.5$.

Вычисление интегралов по квадратурным формулам C1, C2, C3 можно интерпретировать как численное решение уравнения энергии по разностным схемам Эйлера первого порядка, предиктор-корректор второго порядка и по схеме повышенного третьего порядка точности соответственно. Из анализа графиков на фиг. 4, 6 и из табл. 1, 2 следует, что для достижения заданной точности с константами сходимости $\varepsilon = 0.1$ и $\varepsilon = 0.0001$ по схеме C3 число шагов в 2, 16 и 4, 8 раз меньше, чем по схеме C2, и в 32, 4096 и в 64, 16 раз меньше, чем по схеме C1 в задачах 1 и 2 по переносу излучения в прозрачных и плотных средах соответственно. По схеме C2 число шагов в 16, 256 и в 16, 2 раза меньше, чем по схеме C1. Поэтому разностные схемы Эйлера первого порядка точности для решения уравнения энергии не эффективны и малопригодны для серийного счета задач. Схемы C2, C3 существенно эффективнее, чем схемы первого порядка точности: шаг интегрирования по времени на один, два порядка больше, чем в схеме первого порядка. Обе схемы позволяют получить результаты с заданной точностью за приемлемое время счета.

3.3. Перенос излучения в оптически прозрачных средах с поглощением. Задача о шаре

Задача 3. Начальные данные такие же, как в задаче 1 и заданы в шаре $r \leq r_0 = 0.2$ см. Найти распределения температуры вещества и плотности энергии излучения в шаре радиуса $r = 0.6$ см в моменты времени $t/t_0 = 0.5, 1, 1.5, 2$. Шаг интегрирования по пространству $h = 0.001$. Начальный шаг интегрирования $t_0 = 6.6(6)e - 5$.

На фиг. 7 представлены профили температур излучения в среде с коэффициентом поглощения $\alpha_g = 10$ и функцией Планка $B_g = 0$ и в вакууме в моменты времени $t/t_0 = 0.5, 1, 1.5, 2$.

На фиг. 8 представлены профили плотности энергии излучения в среде с коэффициентом поглощения $\alpha_g = 10$ и функцией Планка $B_g = 0$ и в вакууме в моменты времени $t/t_0 = 0.5, 1, 1.5, 2$.

На фиг. 9 представлены профили температур вещества при переносе излучения в среде с коэффициентом поглощения $\alpha_g = 10$ и функцией Планка $B_g = 0$ в моменты времени $t/t_0 = 0.5, 1, 1.5, 2$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ МОДИФИЦИРОВАННЫМ МЕТОДОМ РАСЩЕПЛЕНИЯ

В разделе для сравнения с точными решениями приведены численные решения модельной задачи 1, которые получены модифицированным методом расщепления, [5]. Численные решения уравнения переноса излучения получены на фиксированной разностной сетке с шагом по пространству $h = 0.002$ и с коэффициентом запаса устойчивости $k = 0.8$.

На фиг. 10 представлены профили температуры излучения в вакууме и в среде с поглощением в моменты времени $t/t_0 = 0.5, 1, 1.5$.

Из анализа графиков на фиг. 10 следует, что численные решения уравнения переноса излучения и уравнения энергии, которые получены модифицированным методом расщепления, согласуются с точными решениями. Видно, что размазывание профиля в окрестности оси при переносе излучения в вакууме больше, чем в среде с поглощением.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены аналитические решения модельных нестационарных кинетических уравнений переноса излучения и энергии в изотропном многогрупповом приближении в средах с постоянными коэффициентами поглощения и кусочно-постоянной функцией Планка в группах в задачах о плоском слое и о шаре.

Аналитические решения модельных задач подтверждены численными решениями, которые получены модифицированным методом расщепления.

Показано, что разностные схемы Эйлера первого порядка точности для решения уравнения энергии не эффективны и малопригодны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бай Ши-и*. Динамика излучающего газа. М.: Мир, 1968.
2. *Четверушкин Б.Н.* Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М.: Наука, 1985.
3. *Сушкевич Т.А.* Математические модели переноса излучения. М.: Бинوم, 2006.
4. *Каханер Д., Моулер К., Неш С.* Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 2001.
5. *Моисеев Н.Я.* Модифицированный метод расщепления по физическим процессам для решения уравнений радиационной газовой динамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 2. С. 303–315.
6. *Гольдин В.Я.* Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. Т. 4. № 6. С. 1070–1087.