

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 519.63

РЕШЕНИЕ ВНЕШНЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЕКОМПОЗИЦИЕЙ ОБЛАСТИ С ПЕРЕСЕЧЕНИЕМ¹⁾

© 2022 г. А. В. Петухов¹, А. О. Савченко^{1,*}

¹630090 Новосибирск, пр-т Акад. Лаврентьева, 6, Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН, Россия

*e-mail: savch@ommfao1.sccc.ru

Поступила в редакцию 05.03.2020 г.
Переработанный вариант 20.07.2021 г.
Принята к публикации 14.01.2022 г.

Предложен и исследован метод решения внешней трехмерной краевой задачи для уравнения Гельмгольца, основанный на декомпозиции внешней области с пересечением. Предлагаемый подход основан на применении альтернирующего метода Шварца с последовательным решением внутренней и внешней краевой задачи в подобластях с пересечением, на смежных границах которых ставятся итерируемые интерфейсные условия. Найдены достаточные условия сходимости метода в случае отрицательного коэффициента в уравнении Гельмгольца. Проведено исследование сходимости частного случая проблемы, позволяющее сделать вывод о применимости предложенного подхода для решения задачи с произвольным волновым числом. Предложенный метод апробирован численным решением задач, с применением метода конечных объемов для решения внутренних краевых задач и формулы Грина для решения внешних краевых задач. Скорость сходимости итераций и достигаемая точность вычислений иллюстрируются на серии вычислительных экспериментов. Проведен анализ выбора параметров декомпозиции, обеспечивающих сходимость метода. Библ. 14. Фиг. 1. Табл. 2.

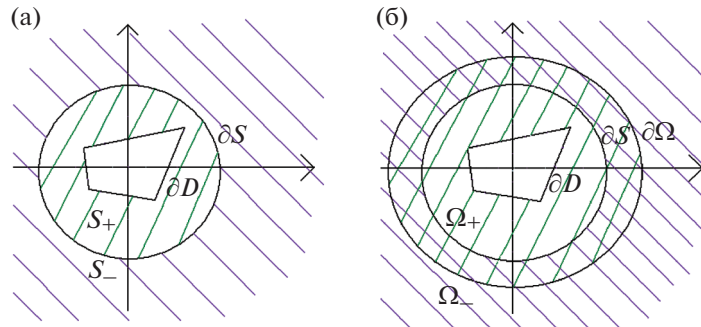
Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, внешняя краевая задача, декомпозиция области, формула Грина.

DOI: 10.31857/S0044466922050118

ВВЕДЕНИЕ

Многие приложения в физике связаны с решением трехмерного уравнения Гельмгольца в неограниченной области. Применение стандартных технологий решения этой проблемы таких, как методы конечных элементов или конечных объемов, сопряжены со сложностями, связанными с неограниченностью расчетной области и необходимостью удовлетворять условию излучения на бесконечности. Существует большое количество численных методов решения внешних краевых задач в неограниченной области [1]. Одним из наиболее известных является представление искомого решения в виде комбинации потенциалов простого и двойного слоя, в которых плотности потенциалов находятся решением интегральных уравнений Фредгольма на границе области [2]–[4]. Другой подход для решения внешних краевых задач состоит в комбинированном применении метода конечных элементов и интегрального метода путем декомпозиции области на составляющие, допускающие применение в них этих методов. В 80-х годах прошлого века К. Feng и Д. Yu предложили разбить всю область решения внешней краевой задачи на две подобласти: без пересечения или с пересечением (см. [5]). При декомпозиции без пересечения (см. фиг. 1а) вся область вне поверхности тела ∂D разбивается на ограниченную область S_+ между сферой ∂S поверхностью ∂D , и на область S_- , ограниченную только снизу сферой ∂S . При декомпозиции с пересечением (фиг. 1б) ограниченная область Ω_+ находится между поверхностью $\partial \Omega$ и поверхностью ∂D , а неограниченная область Ω_- , так же как и в декомпозиции без пересечения, ограничена только снизу сферой ∂S .

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН (проект 0251-2021-0001).



Фиг. 1. Декомпозиция области без пересечения (а) и с пересечением (б). Области S_+ и Ω_+ соответствуют фону ///; области S_- и Ω_- соответствуют фону \\\.

Для решения исходной задачи был предложен альтернирующий метод Шварца, в котором внутренняя задача решалась методом конечных элементов, а условия согласования ставились на внешней поверхности. В [5] и других работах [6]–[8] для численного решения задачи было отдано предпочтение декомпозиции области без пересечения (фиг. 1а). В предложенном методе нет необходимости искать решение внешней задачи в области вне сферической поверхности. Достаточно найти только значения нормальной производной на этой поверхности, если на ней заданы значения функции. Производные находятся вычислением значений оператора Пуанкаре–Стеклова, которые могут быть определены в виде ряда [6].

Необходимо отметить, что при решении внешней краевой задачи для искусственной поверхности ∂S необходимо вычислять интегралы с сингулярными ядрами, что вызывает необходимость использовать для корректного численного вычисления таких интегралов квадратуры специального вида. В настоящей работе для решения задачи предлагается использовать декомпозицию области с пересечением (фиг. 1б). В этом случае при решении внешней краевой задачи все вычисляемые интегралы не имеют сингулярностей, что значительно упрощает использование квадратур для их численного вычисления.

Предлагаемый в настоящей работе подход к решению внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца состоит в нахождении приближенных значений искомой функции и ее нормальной производной на поверхности вспомогательной сферы ∂S , заключающей в себя исходную внутреннюю границу ∂D , поскольку тогда можно найти значения функции в другой точке области, используя формулу Грина. При этом внешняя граница $\partial \Omega$ ограниченной подобласти Ω_+ не обязательно является сферой и выбирается из условия экономии вычислительных ресурсов и получения наиболее точного решения на сфере ∂S . Для решения задачи применяется альтернирующий метод Шварца, в котором последовательно пересчитываются граничные условия на сфере ∂S и внешней вспомогательной поверхности $\partial \Omega$. На каждой итерации метода решаются внутренняя и внешняя краевые задачи. Решение внутренней краевой задачи производится в области, ограниченной внешней вспомогательной поверхностью $\partial \Omega$ и исходной границей ∂D (область Ω_+ на фиг. 1б), и находятся приближенные значения искомой функции и ее нормальной производной на поверхности сферы ∂S . Для решения внешней задачи в области Ω_- , ограниченной снизу сферой ∂S , в отличие от рассмотренных выше методов, предлагается использовать формулу Грина. Такой подход имеет следующие преимущества. Во-первых, формула Грина является более универсальной, и позволяет находить решения уравнения Гельмгольца не только при положительном коэффициенте в уравнении, но и при произвольном, в том числе комплексном коэффициенте. Во-вторых, эта формула не представлена в виде ряда, как в рассмотренных выше методах, и поэтому нет необходимости аппроксимировать этот ряд частичной суммой, внося тем самым дополнительную погрешность в численный метод. Для применения формулы Грина необходимо знать значения функции и ее нормальной производной на сфере ∂S , а применение метода конечных объемов при решении задачи в области Ω_+ позволяет получить и те, и другие значения на сфере ∂S . Отметим, что в предлагаемом итерационном алгоритме искомыми значениями при решении внутренней краевой задачи будут значения функции и ее нормальной

производной только на сфере ∂S , а при решении внешней краевой задачи — только значения функции на поверхности $\partial \Omega$. В статье получены достаточные условия сходимости предложенного итерационного метода и оценка для производной решения уравнения Гельмгольца при отрицательном коэффициенте в этом уравнении.

Проведено исследование сходимости обобщения предложенного метода, состоящего во введении релаксационного процесса при определении итерируемых приближенных значений функции и ее нормальной производной на поверхности вспомогательной сферы. Исследована сходимость метода для частного случая рассмотренной проблемы, что позволило сделать выводы об ограничении применимости предложенного подхода для решения общей проблемы с произвольным волновым числом. Предложенный метод иллюстрируется результатами численных экспериментов для решения внешней краевой задачи с отрицательным коэффициентом. Проведен анализ и получены рекомендации для выбора надлежащих параметров метода, обеспечивающих его сходимость.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассмотрим открытую область D в пространстве \mathbb{R}^3 , ограниченную поверхностью ∂D . Внешняя краевая задача для уравнения Гельмгольца состоит в нахождении функции $u \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus D) \cap C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta u(\mathbf{r}) + k^2 u(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \quad (1)$$

краевому условию

$$u(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial D, \quad (2)$$

и условию излучения на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0. \quad (3)$$

Задача (1)–(3) предполагается решенной, если удастся найти значения искомой функции u_S и ее нормальной производной u_n на сфере ∂S , являющейся границей шара $\bar{S} = S \cup \partial S$, $\bar{D} \subset S$. Действительно, в этом случае можно найти значения функции в произвольной точке пространства $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ по формуле Грина:

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial S} \left[u_n \frac{e^{ikR}}{R} - u_S \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \right] dS, \quad (4)$$

где r_0 — радиус сферы ∂S , $\mathbf{r}_0 \in \partial S$, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \sqrt{r^2 - 2r_0 r \cos \gamma + r_0^2}$, γ — угол между векторами \mathbf{r} и \mathbf{r}_0 , $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$, $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали к поверхности в точке \mathbf{r}_0 .

Формула (4) является основой для предлагаемого итерационного метода решения задачи (1)–(3), который заключается в последовательном решении вспомогательных краевых задач в ограниченной и неограниченной области.

Введем дополнительную ограниченную область Ω_0 с границей $\partial \Omega_0$ такую, что $\bar{S} \subset \Omega_0$. Будем решать методом конечных объемов внутреннюю краевую задачу в области $\Omega_0 \setminus \bar{D}$ при заданных граничных условиях на ∂D и пересчитываемых на каждой итерации краевых условиях на $\partial \Omega_0$. На первой итерации метода задаем, например, нулевые граничные условия на поверхности $\partial \Omega_0$ и решаем внутреннюю краевую задачу в области $\Omega_0 \setminus \bar{D}$. При этом нас будут интересовать полученные значения для функции и ее нормальной производной только на поверхности ∂S . По этим значениям определим новые граничные условия на внешней границе расчетной области $\partial \Omega_0$ по формуле (4), и проведем аналогично вторую и последующие итерации. Отметим, что на разных шагах этого процесса расчетные области для внутренних краевых задач можно выбирать дина-

мическим образом, т.е. на j -й итерации вместо Ω_0 определить область Ω_{j+1} с границей $\partial\Omega_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots, J$. Количество итераций J определяется по условию сходимости метода с заданной точностью $\varepsilon \ll 1$. Выбор области Ω_j , заключающей в себя шар \bar{S} , на второй и всех последующих итерациях производится из соображений экономии вычислительных ресурсов и возможности получения наиболее точного решения на поверхности шара. При этом условие включения $S \subset \Omega_j$ остается в силе. На всех последующих итерациях решается внутренняя краевая задача в области $\Omega_j \setminus \bar{D}$ и по формуле (4) восстанавливаются новые граничные условия Дирихле на поверхности $\partial\Omega_j$.

2. СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА

Исследуем сходимость предложенного метода для решения уравнения

$$\Delta u(\mathbf{r}) - k^2 u(\mathbf{r}) = 0 \quad (5)$$

с граничными условиями (2), (3), где k – вещественное число.

2.1. Итерационные формулы для искомого приближенного решения и его погрешности

Запишем формулу (4) в виде

$$u(\mathbf{r}) = \int_{\partial S} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{r}_0) - u(\mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial n} (G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)) \right] ds, \quad \mathbf{r}_0 \in \partial S,$$

где $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi R} e^{-kR}$. Тогда итерационный процесс определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta u^{j+1}(\mathbf{r}) - k^2 u^{j+1}(\mathbf{r}) &= 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega_j \setminus \bar{D}, \\ u^{j+1}(\mathbf{r}) &= \Phi^j(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial\Omega_j, \\ u^{j+1}(\mathbf{r}) &= f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial D, \quad j = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi^0(\mathbf{r}) &= 0, \quad \Phi^j(\mathbf{r}) = \int_{\partial S} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \frac{\partial u^j}{\partial n}(\mathbf{r}_0) - u^j(\mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial n} (G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)) \right] ds, \\ \mathbf{r} &\in \partial\Omega_j, \quad \mathbf{r}_0 \in \partial S, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Определим погрешность метода как

$$\begin{aligned} \omega^j(\mathbf{r}) &= u^j(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \bar{\Omega}_{j-1} \setminus \bar{D}, \\ \omega_n^j(\mathbf{r}_0) &= \frac{\partial u^j}{\partial n}(\mathbf{r}_0) - \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r}_0 \in \partial S. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда получим

$$\omega^{j+1}(\mathbf{r}) = \int_{\partial S} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \omega_n^j(\mathbf{r}_0) - \omega^j(\mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial n} (G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)) \right] ds \equiv \varphi^j(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial\Omega_j, \quad (9)$$

и погрешность будет удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} \Delta \omega^{j+1}(\mathbf{r}) - k^2 \omega^{j+1}(\mathbf{r}) &= 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega_j \setminus \bar{D}, \\ \omega^{j+1}(\mathbf{r}) &= \varphi^j(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial\Omega_j, \\ \omega^{j+1}(\mathbf{r}) &= 0, \quad \mathbf{r} \in \partial D. \end{aligned} \quad (10)$$

2.2. Оценка производной по нормали

Для определения условия сходимости метода необходимо найти оценку для производной по нормали от решения уравнения Гельмгольца на поверхности ∂S . Обозначим через ρ_0 расстояние между сферой и границей расчетной области, $\rho_0 = \min_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_0} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$, $\mathbf{r} \in \partial \Omega_j \cup \partial D$, $\mathbf{r}_0 \in \partial S$; а через u_l

производную от функции u по направлению l , $u_l = \frac{\partial u}{\partial l}$. Если функция u удовлетворяет уравнению

Гельмгольца, то и функция u_l будет удовлетворять такому же уравнению, и для любых δ , $\delta \leq \rho_0$ справедлива теорема о среднем для решения уравнения Гельмгольца (см. [9])

$$\int_{\partial S_\delta} u_l ds_\delta = u_l(\mathbf{r}_0) \frac{4\pi\delta}{k} \sin(k\delta), \quad (11)$$

где ∂S_δ – сфера радиуса δ с центром в точке \mathbf{r}_0 . Проинтегрируем уравнение (11) от 0 до ρ по переменной δ , $0 \leq \delta \leq \rho \leq \rho_0$. Тогда получим

$$I_\rho = \int_{S_\rho} u_l dv_\rho = 4\pi u_l(\mathbf{r}_0) \alpha(k, \rho), \quad (12)$$

где S_ρ – шар радиуса ρ , и

$$\alpha(k, \rho) = \frac{\sin(k\rho)}{k^3} - \frac{\rho \cos(k\rho)}{k^2}. \quad (13)$$

Интегрируя равенство (12) по частям, получим

$$I_\rho = \int_{\partial S_\rho} u \frac{\partial l}{\partial n_S} dS_\rho,$$

где n_S – нормаль в текущей точке на сфере ∂S_ρ .

Произведем оценку интеграла I_ρ , что позволит не только получить искомую оценку производной в точке \mathbf{r}_0 , но и уточнить оценку для производной гармонической функции, полученной в [9]. Выберем ось Z в декартовой системе координат, совпадающей с направлением l . Тогда получим

$$I_\rho = \rho^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(\theta, \varphi) \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi.$$

Для оценки $|I_\rho|$ разобьем промежуток интегрирования по переменной θ на интервалы $[0, \pi/2]$ и $[\pi/2, \pi]$, на которых $\cos \theta$ – знакопостоянная функция. Тогда имеем

$$|I_\rho| \leq 2\pi\rho^2 \max_{\mathbf{r} \in \partial S_\rho} |u(\mathbf{r})| \left\{ \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta - \int_{\pi/2}^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta \right\} = 2\pi\rho^2 \max_{\mathbf{r} \in \partial S_\rho} |u(\mathbf{r})|.$$

Отсюда, с учетом (12), следует оценка

$$|u_l(\mathbf{r}_0)| \leq \frac{\rho^2}{2\alpha(k, \rho)} \max_{\mathbf{r} \in \partial S_\rho} |u(\mathbf{r})|, \quad (14)$$

где $\alpha(k, \rho)$ определено формулой (13).

Заметим, что правая часть неравенства (14) является функцией, зависящей от произвольного радиуса шара ρ , $\rho \leq \rho_0$, и поэтому естественно выбрать этот радиус таким образом, чтобы правая часть в (14) принимала наименьшее значение. При относительно больших значениях k это можно сделать достаточно просто. Введем обозначение: $x = k\rho$. Тогда, с учетом (13), получим

$$\frac{\rho^2}{\alpha(k, \rho)} = \frac{k x^2}{\sin x - x \cos x}. \quad (15)$$

Функция в правой части формулы (15) имеет минимум при $x_* \approx 2.08$ и принимает в точке x_* значение $\rho_*^2/\alpha(k, \rho_*) \approx 2.3k$, где $\rho_* = x_*/k$. Тогда неравенство (14) примет вид

$$|u_l(\mathbf{r}_0)| \leq 1.15k \max_{r \in \partial S_{\rho_*}} |u(\mathbf{r})|. \quad (16)$$

Если $\rho_* > \rho_0$, то в силу убывания функции в правой части формулы (15) на промежутке $(0, x_*]$ выбираем $\rho = \rho_0$, и неравенство (14) примет вид

$$|u_l(\mathbf{r}_0)| \leq \frac{\rho_0^2}{2\alpha(k, \rho_0)} \max_{r \in \partial S_{\rho_0}} |u(\mathbf{r})| = \frac{kx_0^2}{2(\sin x_0 - x_0 \cos x_0)} \max_{r \in \partial S_{\rho_0}} |u(\mathbf{r})|, \quad (17)$$

где $x_0 = k\rho_0$.

Нетрудно показать, что $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\rho_0^2}{\alpha(k, \rho_0)} = \frac{3}{\rho_0}$. Отсюда следует, что при $k = 0$ оценка производной для уравнения Лапласа в (17) в 2 раза лучше оценки $|u_x(\mathbf{r}_0)| \leq \frac{3M}{\rho_0}$, приведенной в [9], где M – максимальное по модулю значение функции $u(\mathbf{r})$ в заданной области.

2.3. Сходимость итерационного метода

Найдем явный вид производной по нормали от фундаментального решения, а также интегралы от фундаментального решения и от его нормальной производной по поверхности сферы.

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{\partial G}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial n} = e^{-kR} \frac{1+kR}{R^2} \cos(\widehat{R, n}) = e^{-kR} \frac{(1+kR)(r_0^2 + R^2 - r^2)}{R^3 2r_0},$$

$$I_0(\mathbf{r}) = \int_{\partial S} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) ds = \frac{r_0}{2kr} e^{-kr} [e^{kr_0} - e^{-kr_0}], \quad (18)$$

$$I_1(\mathbf{r}) = \int_{\partial S} \frac{\partial}{\partial n} (G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)) ds = \frac{1}{2kr} e^{-kr} [(1-kr_0)e^{kr_0} - (1+kr_0)e^{-kr_0}], \quad (19)$$

где $r = |\mathbf{r}|$. Нетрудно заметить, что $I_0(\mathbf{r}) > 0$, $I_1(\mathbf{r}) < 0$, и обе функции убывают по модулю с возрастанием аргумента r .

Оценим норму погрешности метода на $j+1$ -й итерации через норму погрешности на j -й итерации. Ввиду того, что для уравнения Гельмгольца вида (5) применим принцип максимума, из (9) следует неравенство

$$\max_{r \in \Omega_j \setminus D} |\omega^{j+1}(\mathbf{r})| \leq \max_{r \in \partial S} |\omega_n^j(\mathbf{r})| \max_{r \in \Omega_j} I_0(\mathbf{r}) + \max_{r \in \partial S} |\omega^j(\mathbf{r})| \max_{r \in \Omega_j} |I_1(\mathbf{r})|,$$

где интегралы $I_0(\mathbf{r})$ и $I_1(\mathbf{r})$ определены формулами (18), (19). Отсюда, принимая во внимание формулы (16) и (17), получаем окончательную оценку

$$\max_{r \in \Omega_j \setminus D} |\omega^{j+1}(\mathbf{r})| \leq M(k, d, r_0, x_0) \max_{r \in \Omega_{j-1} \setminus D} |\omega^j(\mathbf{r})|,$$

где

$$M(k, d, r_0, x_0) = \frac{e^{-kd}}{2d} \left[e^{kr_0} \left(r_0 + r_0 \beta - \frac{1}{k} \right) + e^{-kr_0} \left(r_0 - r_0 \beta + \frac{1}{k} \right) \right], \quad (20)$$

$$d = \min_{r \in \Omega_j} |\mathbf{r}|, \quad x_0 = k\rho_0,$$

$$\beta = \beta(k, x_0) = \begin{cases} \frac{kx_0^2}{2(\sin x_0 - x_0 \cos x_0)}, & x_0 < 2.08, \\ 1.15k, & x_0 \geq 2.08. \end{cases}$$

Таким образом, достаточным условием сходимости итерационного процесса для решения уравнения (5) будет

$$M(k, d, r_0, x_0) < 1. \quad (21)$$

2.4. Сходимость модифицированного метода

Для ускорения сходимости метода декомпозиции в [11], [12] была предложена релаксация при определении итерируемого приближения на поверхности раздела. В этих работах исследовалась декомпозиция области без пересечения для решения внутренних краевых задач. В [6] метод релаксации в сочетании с декомпозицией без пересечения был применен для решения внешней краевой задачи для уравнения Гельмгольца. Исследуем применение релаксации для ускорения сходимости решения уравнения (5) с условиями (2) и (3).

Пусть значения функции λ^{j+1} и ее нормальной производной $\frac{\partial \lambda^{j+1}}{\partial n}$ на сфере ∂S на $j+1$ -й итерации метода определяются не только решением внутренней задачи в области $\Omega_j \setminus \bar{D}$, но и их значениями на j -й итерации:

$$\lambda^{j+1}(\mathbf{r}_0) = (1 - \eta_j) u^{j+1}(\mathbf{r}) \Big|_{\partial S} + \eta_j \lambda^j(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r}_0 \in \partial S, \quad (22)$$

где η_j – релаксационный параметр на j -й итерации. Аналогичную формулу определим и для нормальной производной функции λ^{j+1} на сфере ∂S . Значения λ^0 и $\frac{\partial \lambda^0}{\partial n}$ соответствуют решению на сфере ∂S внутренней краевой задачи в области $\Omega_0 \setminus \bar{D}$ с нулевыми граничными условиями на $\partial \Omega_0$.

Заметим, что итерационный процесс (6) является частным случаем метода декомпозиции с релаксацией при $\eta_j = 0$.

Формула Грина (7) примет в этом случае следующий вид:

$$\Phi^j(\mathbf{r}) = \int_{\partial S} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \frac{\partial \lambda^j}{\partial n}(\mathbf{r}_0) - \lambda^j(\mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial n} (G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)) \right] ds.$$

Определим погрешность метода

$$\omega_\lambda^j(\mathbf{r}_0) = \lambda^j(\mathbf{r}_0) - u(\mathbf{r}_0), \quad (23)$$

$$\omega_{\lambda, n}^j(\mathbf{r}_0) = \frac{\partial \lambda^j}{\partial n}(\mathbf{r}_0) - \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r}_0 \in \partial S.$$

Тогда из (22) и (23) следует, что

$$\omega_\lambda^{j+1}(\mathbf{r}_0) = (1 - \eta_j) \omega_\lambda^{j+1}(\mathbf{r}_0) + \eta_j \omega_\lambda^j(\mathbf{r}_0). \quad (24)$$

Аналогичное равенство справедливо и для погрешности $\omega_{\lambda, n}^j(\mathbf{r}_0)$. Поскольку $\omega_\lambda^{j+1}(\mathbf{r}_0)$ и $\omega_{\lambda, n}^j(\mathbf{r}_0)$ – ограниченные функции при $\mathbf{r}_0 \in \partial S$, то существует такое число M_0 , зависящее от входных параметров задачи, что выполняется неравенство

$$\max_{\mathbf{r}_0 \in \partial S} |\omega_\lambda^{j+1}(\mathbf{r}_0)| \leq M_0 \max_{\mathbf{r}_0 \in \partial S} |\omega_\lambda^j(\mathbf{r}_0)|. \quad (25)$$

Тогда из (24) и (25) следует, что

$$\max_{\mathbf{r}_0 \in \partial S} |\omega_\lambda^{j+1}(\mathbf{r}_0)| \leq M_1 \max_{\mathbf{r}_0 \in \partial S} |\omega_\lambda^j(\mathbf{r}_0)|,$$

где $M_1 = |\eta_j| + |1 - \eta_j| M_0$. Нетрудно получить, что для выполнения условия $M_1 < 1$ необходимо, чтобы $\eta_j < 1$ и $M_0 < 1$. Для таких областей изменения значений параметров η_j и M_0 минимум числа M_1 будет достигаться при $\eta_j = 0$, что соответствует изначально рассмотренному в п. 2.1 ме-

тоту решения уравнения вида (5) без релаксации. Таким образом, можно сделать вывод, что модификация (22) для решения уравнения (5) нецелесообразна.

3. АНАЛИЗ СХОДИМОСТИ ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ВОЛНОВЫМ ЧИСЛОМ

В предыдущем разделе исследована сходимость метода для решения частного случая задачи (1)–(3) с отрицательным коэффициентом в уравнении Гельмгольца. В этом разделе будет исследована сходимость частного решения с произвольным волновым числом, что позволит сделать вывод о нецелесообразности использования предложенного метода декомпозиции с пересечением для решения задач с произвольными волновыми числами.

Проведем анализ сходимости альтернирующего метода Шварца для решения задачи (1)–(3) для частного случая, когда поверхность ∂D является сферой радиуса r_D , функция f в формуле (2) – константа, а решением задачи (1)–(3) является функция $u(r) = \frac{e^{ikr}}{r}$.

Пусть на сфере ∂S задано некоторое начальное значение искомой функции, являющейся константой: $u^0(r_0) = V_R^0 + iV_I^0 = \text{const}$. Выберем в качестве области Ω_0 шар, ограниченный сферой радиуса r_Ω , $r_D < r_0 < r_\Omega$. Исследование сходимости сведется к следующим шагам.

Шаг 1. По заданному начальному значению искомой функции на сфере ∂S решим внешнюю задачу и найдем значение функции на сфере $\partial \Omega_0$.

Шаг 2. Решим внутреннюю задачу в области $\Omega_0 \setminus \bar{D}$ с учетом полученного значения на $\partial \Omega_0$ и заданного на ∂D , и найдем новое значение для искомой функции на сфере ∂S .

Шаг 3. Сравним новые и начальные значения на сфере ∂S с точными значениями и определим условия для убывания погрешности решения.

Детализируем предложенные шаги в данной постановке задачи.

Шаг 1. Решением внешней задачи для уравнения Гельмгольца вне сферы ∂S является функция $(C_R + iC_I) \frac{e^{ikr}}{r}$, где

$$C_R = r_0(V_R^0 \cos(kr_0) + V_I^0 \sin(kr_0)), \quad C_I = r_0(-V_R^0 \sin(kr_0) + V_I^0 \cos(kr_0)),$$

поэтому

$$u^1(r_\Omega) = \frac{r_0}{r_\Omega} \{V_R^0 \cos \phi - V_I^0 \sin \phi + i[V_R^0 \sin \phi + V_I^0 \cos \phi]\}, \quad (26)$$

где $\phi = k(r_\Omega - r_0)$.

Шаг 2. Решением внутренней задачи для уравнения Гельмгольца в области $\Omega_0 \setminus \bar{D}$ с граничными условиями $u^1(r_\Omega) = U_R + iU_I$ и $u^1(r_D) = u_R + iu_I$ является функция

$$u^1(r) = [a \cos(kr) + b \sin(kr) + i\{c \cos(kr) + d \sin(kr)\}] \frac{1}{r \sin(k(r_\Omega - r_D))}, \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} a &= r_D u_R \sin(kr_\Omega) - r_\Omega U_R \sin(kr_D), & b &= r_\Omega U_R \cos(kr_D) - r_D u_R \cos(kr_\Omega), \\ c &= r_D u_I \sin(kr_\Omega) - r_\Omega U_I \sin(kr_D), & d &= r_\Omega U_I \cos(kr_D) - r_D u_I \cos(kr_\Omega). \end{aligned}$$

Если значения U_R и U_I определены формулой (26), а значения функции на сфере ∂D равны

$$u_R = \frac{\cos(kr_D)}{r_D}, \quad u_I = \frac{\sin(kr_D)}{r_D},$$

то функция $u^1(r)$ из формулы (27) примет на сфере ∂S значение

$$u^1(r_0) = \frac{V_R^1 + iV_I^1}{\sin(k(r_\Omega - r_D))},$$

где

$$\begin{aligned} V_R^1 &= a_R V_R^0 + b_R V_I^0 + c_R, & V_I^1 &= a_I V_R^0 + b_I V_I^0 + c_I, \\ a_R &= \sin(k(r_0 - r_D)) \cos \phi, & b_R &= -\sin(k(r_0 - r_D)) \sin \phi, \\ a_I &= \sin(k(r_0 - r_D)) \sin \phi, & b_I &= \sin(k(r_0 - r_D)) \cos \phi, \\ c_R &= \sin \phi \cos(k r_D) / r_0, & c_I &= \sin \phi \sin(k r_D) / r_0. \end{aligned} \quad (28)$$

Шаг 3. Перейдем к уравнениям для погрешностей решения. Введем обозначения:

$$\varepsilon_R^i = V_R^i - \cos(k r_0) / r_0, \quad \varepsilon_I^i = V_I^i - \sin(k r_0) / r_0, \quad i = 0, 1. \quad (29)$$

Тогда $\varepsilon_R^1 = a_R \varepsilon_R^0 + b_R \varepsilon_I^0$, $\varepsilon_I^1 = a_I \varepsilon_R^0 + b_I \varepsilon_I^0$, или

$$\begin{aligned} \varepsilon_R^1 &= \chi(\varepsilon_R^0 \cos \phi - \varepsilon_I^0 \sin \phi), \\ \varepsilon_I^1 &= \chi(\varepsilon_R^0 \sin \phi + \varepsilon_I^0 \cos \phi), \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\chi = \frac{\sin(k(r_0 - r_D))}{\sin(k(r_\Omega - r_D))}. \quad (31)$$

Формула (30) задает преобразование вращения, помноженное на постоянный множитель χ , который и определяет сходимость метода для рассмотренного частного случая.

Условие сходимости $|\chi| < 1$ для рассмотренной простейшей задачи имеет непростую структуру ввиду наличия бесконечного количества интервалов расходимости. Для более общего случая условия сходимости, скорее всего, примут еще более сложный вид. По этой причине авторы не рекомендуют решать уравнение Гельмгольца с произвольным волновым числом, отличное от вида (5), предложенным методом.

Рассмотрим условие сходимости модельной задачи с модификацией предложенного метода вида (22). Пусть $\eta_j = \eta = \text{const}$. Формулы (28) для данной модификации метода будут:

$$\begin{aligned} V_R^1 &= \eta V_R^0 + (1 - \eta)(a_R V_R^0 + b_R V_I^0 + c_R), \\ V_I^1 &= \eta V_I^0 + (1 - \eta)(a_I V_R^0 + b_I V_I^0 + c_I). \end{aligned}$$

Перейдя к погрешностям решения ε_R^i и ε_I^i в формулах (29), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_R^1 &= \eta \varepsilon_R^0 + (1 - \eta) \chi [\varepsilon_R^0 \cos \phi - \varepsilon_I^0 \sin \phi], \\ \varepsilon_I^1 &= \eta \varepsilon_I^0 + (1 - \eta) \chi [\varepsilon_R^0 \sin \phi + \varepsilon_I^0 \cos \phi]. \end{aligned}$$

Выберем параметр η так, чтобы модуль погрешности $|\varepsilon^1| = \sqrt{(\varepsilon_R^1)^2 + (\varepsilon_I^1)^2}$ был минимальным. Нетрудно показать, что оптимальное значение параметра η_{opt} не зависит от $|\varepsilon^0|$ и равно

$$\eta_{\text{opt}} = \frac{\chi^2 - \chi \cos \phi}{1 + \chi^2 - 2\chi \cos \phi}. \quad (32)$$

Преобразовав формулу (32) с учетом явного вида параметров χ и ϕ , получим

$$\eta_{\text{opt}} = -\frac{\sin(k(r_0 - r_D)) \cos(k(r_\Omega - r_D))}{\sin(k(r_\Omega - r_0))}.$$

Рассмотрим убывание погрешности метода. Условие $\rho = |\varepsilon^1|/|\varepsilon^0| < 1$ равносильно

$$\eta^2 + (1 - \eta)^2 \chi^2 + 2\eta(1 - \eta) \chi \cos \phi < 1. \quad (33)$$

Выбрав в качестве параметра η в формуле (33) значение η_{opt} из (32), получим

$$\rho_{\text{opt}} = \frac{\chi |\sin \phi|}{\sqrt{1 - 2\chi \cos \phi + \chi^2}}.$$

Воспользовавшись явным видом параметра χ в формуле (31), получим окончательно

$$\rho_{\text{opt}} = |\sin(k(r_0 - r_D))|.$$

Таким образом, преимущество более общего подхода (22) для решения задачи состоит в том, что в нем существует оптимальное значение параметра релаксации $\eta = \eta(k, r_D, r_0, r_\Omega)$ в (22), обеспечивающее сходимость метода при любых значениях входных параметров k, r_D, r_0, r_Ω , за исключением случаев, когда $k(r_0 - r_D) = \pi n/2$, где n – любое целое нечетное число.

Полученные значения интервалов и скорости сходимости метода позволяют предположить, что в случае произвольной исходной поверхности решение внешней задачи предложенными методами имеет аналогичный характер или удовлетворяет еще более сложным условиям. А именно: сходимость метода (6), (7) для решения задачи (1)–(3) имеет место только на интервалах, где выполняются определенные соотношения между входными параметрами, характеризующими поверхности ∂D и $\partial \Omega$, волновым числом k , и радиусом вспомогательной сферы r_0 . Для модификации метода с релаксацией (22) сходимость будет иметь место при некоторых значениях параметров η_j этого метода. Выбор соотношений для исходных параметров в первом варианте метода и оптимального значения параметра для второго варианта, необходимых для их сходимости в общем случае, является пока открытой проблемой. Таким образом, рекомендация о нецелесообразности использования также и модифицированного метода с релаксацией для решения задачи (1)–(3) с произвольным волновым числом остается в силе.

4. АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ

Приведем принципиальную структуру программы для нахождения приближенного решения задачи (5), (2), (3).

Шаг 1. Задание начальных данных:

- задание трехмерной неравномерной структурированной тетраэдральной сетки, приближенно описывающей трехмерную замкнутую область $\Omega_j \setminus D$;
- задание равномерного разбиения сферы ∂S ;
- задание критерия останова для итерационного решения внутренней краевой задачи ∂_i ;
- задание критерия останова для внешнего итерационного процесса ∂_0 ;

Шаг 2. По заданной сетке проводится аппроксимация внутренней краевой задачи (6) хорошо известным методом барицентрических конечных объемов [12], [13], которая приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно приближенных значений искомой функции u_h в открытой области $\Omega_j \setminus \bar{D} \setminus \partial \Omega_j$, значений $u_{\partial \Omega_j}$ в узлах сетки на поверхности $\partial \Omega_j$, и заданных значений $u_{\partial D} = (f(\mathbf{r}))_h$ в узлах сетки на поверхности ∂D :

$$A u_h = B_{\partial \Omega_j} u_{\partial \Omega_j} + B_{\partial D} u_{\partial D}, \quad (34)$$

где A – матрица баланса для внутренних узлов сетки, а $B_{\partial D}$ и $B_{\partial \Omega_j}$ – матрицы учета краевых условий типа Дирихле от значений в узлах, лежащих на границах ∂D и $\partial \Omega_j$. Данное представление СЛАУ обусловлено тем, что позволяет отказаться от аппроксимации внутренней краевой задачи на каждом шаге внешнего итерационного процесса, ограничившись лишь пересчетом вклада значений функций в узлах, лежащих на границе $\partial \Omega_j$ в правой части СЛАУ (34).

Шаг 3. Внешний итерационный процесс:

- методом сопряженных градиентов в подпространствах Крылова [14] решается СЛАУ для внутренней краевой задачи

$$A u_h^j = F_h^j, \quad j = 0, 1, \dots,$$

где $F_h^j = B_{\partial\Omega_j} u_{\partial\Omega_j}^{j-1} + B_{\partial D} u_{\partial D}^{-1} \equiv 0$. По полученному приближенному решению u_h^j проводится интерполяция приближенных значений функции $u_{S,h}^j$ и ее нормальной производной $u_{n,h}^j$ на сфере ∂S в точках, необходимых для решения внешней краевой задачи;

– по полученным значениям функции $u_{S,h}^j$ и ее нормальной производной $u_{n,h}^j$ численно находятся приближенные значения $u_{\partial\Omega_{j+1}}^j$ на границе $\partial\Omega_{j+1}$, для чего интеграл (4), записанный в сферических координатах в виде двойного интеграла, аппроксимируется квадратурной формулой Симпсона по каждой из переменных. По этим значениям на границе $\partial\Omega_{j+1}$ рассчитывается правая часть F_h^{j+1} для СЛАУ внутренней краевой задачи;

– выполняется проверка на критерий останова внешнего итерационного процесса: если выполняется:

$$\|F_h^{j+1} - F_h^j\|_{\infty} \leq \delta_0, \quad (35)$$

то внешний итерационный процесс завершается, иначе повторяем шаг 3.

5. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Будем искать численное решение внешней краевой задачи (5) с граничными условиями (2), (3), где k – вещественное число, имеющее следующее точное решение

$$u(x, y, z) = e^{-kr_1}/r_1 + e^{-kr_2}/r_2, \quad (36)$$

или

$$u(x, y, z) = ze^{-kr}(k+1/r)/r^2, \quad (37)$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r_1 = \sqrt{(x-x_0)^2 + y^2 + z^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x+x_0)^2 + y^2 + z^2}, \quad x_0 = 0.1.$$

Зададим на гранях куба с ребрами, равными 0.4, граничные условия в соответствии с точным решением (36) или (37). Будем полагать, что куб, а также и все последующие в рассмотрении области, ограниченные выбранными поверхностями, имеют центр симметрии в начале координат. Выберем границу внешней расчетной области $\partial\Omega_0$, которую оставим неизменной на каждой итерации, в виде поверхности куба с ребрами, равными 2, на поверхности которого зададим нулевые граничные условия. В области $\Omega_0 \setminus \bar{D}$, ограниченной поверхностями этих кубов, решается внутренняя задача Дирихле и находятся значения функции и ее нормальной производной на сфере ∂S , лежащей в области $\Omega_0 \setminus \bar{D}$. По этим значениям определяются новые граничные условия на поверхности $\partial\Omega_0$ по формуле (4). Далее снова решается задача Дирихле в расчетной области $\Omega_0 \setminus \bar{D}$, и определяются новые приближенные значения функции и ее нормальной производной на сфере. Поверхность сферы, на которой ищется приближенное решение, является неизменной на всех итерациях в каждом численном эксперименте, однако может варьироваться в разных экспериментах.

Построение конечно-объемных аппроксимаций внутренней задачи Дирихле проводилось на последовательности трех равномерных сгущающихся сеток. Приведем число узлов и конечных элементов для каждой из сеток:

редкая сетка $L = 29666$, $L_{tet} = 160704$;
 средняя сетка $L = 225650$, $L_{tet} = 1285632$;
 густая сетка $L = 1759794$, $L_{tet} = 10285056$.

Обозначим через ε_v , ε_d и δ_v , δ_d среднеквадратичные и максимальные погрешности отклонения от точного решения и от точной нормальной производной на сфере ∂S , вычисленные по формулам

$$\varepsilon_v = \sqrt{\sum_{i,j} (u(\theta_j, \varphi_i) - \tilde{u}(\theta_j, \varphi_i))^2} / \sqrt{\sum_{i,j} u^2(\theta_j, \varphi_i)},$$

Таблица 1. Зависимость погрешностей решения и нормальной производной от вида сетки

Сетка/Погрешность	ε_v	δ_v	ε_d	δ_d
Редкая	0.0149	0.0230	0.1290	0.2300
Средняя	0.0039	0.0065	0.0549	0.1004
Густая	0.0009	0.0013	0.0310	0.0557

$$\delta_v = \max_{i,j} |u(\theta_j, \varphi_i) - \tilde{u}(\theta_j, \varphi_i)| / \max_{i,j} |u(\theta_j, \varphi_i)|,$$

$$\varepsilon_d = \sqrt{\sum_{i,j} \left(\frac{\partial u}{\partial n}(\theta_j, \varphi_i) - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}(\theta_j, \varphi_i) \right)^2} / \sum_{i,j} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2(\theta_j, \varphi_i),$$

$$\delta_d = \max_{i,j} \left| \frac{\partial u}{\partial n}(\theta_j, \varphi_i) - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}(\theta_j, \varphi_i) \right| / \max_{i,j} \left| \frac{\partial u}{\partial n}(\theta_j, \varphi_i) \right|,$$

где

$$u(\theta_j, \varphi_i), \quad \frac{\partial u}{\partial n}(\theta_j, \varphi_i) \quad \text{и} \quad \tilde{u}(\theta_j, \varphi_i), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}(\theta_j, \varphi_i)$$

являются точными и приближенными значениями искомой функции и ее нормальной производной в узлах θ_j, φ_i сетки в сферических координатах на сфере.

В табл. 1 представлены погрешности вычисления функции и ее нормальной производной на сфере радиуса $r_0 = 0.5$ при $k^2 = 1$, $N_\theta = N_\varphi = 17$. Число внешних итераций N_{it} для достижения критерия останова (35) итерационного процесса при $\partial_0 = 10^{-7}$ было $N_{it} = 3$. Точное решение определялось формулой (37). Вычисления проводились на редкой, средней и подробной сетках, в которых длина ребра элементарного тетраэдра в методе конечных объемов уменьшалась приблизительно в 2 раза при переходе к более подробной сетке. Заметим, что увеличение количества точек на сфере не приводило к существенному уменьшению вычисляемых погрешностей, однако требовало дополнительных временных затрат. Это обстоятельство иллюстрирует то, что погрешность решения задачи обусловлена, прежде всего, погрешностью решения ее внутренней части.

Результаты, приведенные в таблице, демонстрируют квадратичную сходимость полученного приближенного решения и линейную сходимость для его производной при сгущении сетки и отсутствие зависимости числа внешних итераций от шага сетки.

В следующем численном эксперименте определялись погрешности метода при разных значениях радиуса вспомогательной сферы r_0 и разных коэффициентах k^2 в уравнении Гельмгольца. Вычисления проводились на подробной сетке, точное решение было задано формулой (36). Максимальные погрешности приближенного значения функции δ_v , ее нормальной производной на сфере δ_d и количество внешних итераций N_{it} , полученные при достижении условия (35), где $\partial_0 = 10^{-7}$ для разных значений радиуса вспомогательной сферы, приведены в табл. 2.

Для анализа полученных значений воспользуемся формулой (20) для коэффициента уменьшения погрешности $M(k, d, r_0, x_0)$ при переходе к следующей итерации метода. При заданных значениях параметров исходной задачи этот коэффициент будет меньше единицы при $0.487 \leq r_0 \leq 0.696$ для $k^2 = 1$, и при $0.362 < r_0 < 0.846$ для $k^2 = 10$. Полученные значения для погрешностей позволяют сделать вывод, что сходимость метода имеет место при больших значениях радиуса вспомогательной сферы, вплоть до $r_0 < 0.95$. Это обстоятельство не противоречит условию сходимости метода (21), поскольку оно является достаточным.

Для обеспечения надежности численных вычислений необходимо выбрать параметры метода, характеризующие расположение внешней поверхности и вспомогательной сферы таким образом, чтобы условие сходимости метода (21) было выполнено. Если при некотором выборе внешней границы расчетной области $d\Omega_j$ условие $M < 1$ не выполняется для любых радиусов

Таблица 2. Зависимость погрешностей решения задачи и числа внешних итераций от радиуса сферы и коэффициента в уравнении Гельмгольца

r_0	$k^2 = 1$			$k^2 = 10$		
	N_{it}	δ_v	δ_d	N_{it}	δ_v	δ_d
0.4	4	0.0016	0.0506	4	0.0017	0.0520
0.5	5	0.0007	0.0502	4	0.0010	0.0506
0.6	5	0.0012	0.0431	4	0.0013	0.0489
0.7	5	0.0015	0.0325	4	0.0014	0.0366
0.8	5	0.0118	0.0511	4	0.0092	0.0473
0.9	7	0.0609	0.1019	7	0.0526	0.0831
0.95	14	0.1754	0.9836	12	0.1562	0.6748

вспомогательных сфер, расположенных между поверхностями ∂D и $\partial\Omega_j$, то необходимо переместить внешнюю поверхность $\partial\Omega_j$ дальше от исходной поверхности ∂D . Действительно, множитель $e^{-kd}/2d$ в формуле (20) быстро убывает с увеличением параметра d , где d – расстояние от начала координат до поверхности $\partial\Omega_j$. Однако рост этого параметра влечет увеличение расчетной области для решения внутренней краевой задачи, что является нежелательным ввиду использования большего объема вычислительных ресурсов для решения задачи. Другим параметром декомпозиции является радиус вспомогательной сферы r_0 . Этот параметр связан со вторым множителем в формуле (20). При расположении сферы вблизи поверхности ∂D или $\partial\Omega_j$ параметры r_0 и x_0 уменьшаются, что приводит к увеличению коэффициента β , значит, и всего коэффициента M . По этой причине целесообразно размещать вспомогательную сферу ∂S где-нибудь посередине между поверхностями ∂D и $\partial\Omega_j$ для уменьшения коэффициента β , который монотонно убывает при $0 < x < 2.08$.

Итак, подытожим сказанное о выборе параметров метода. Для уменьшения времени счета и экономии вычислительных ресурсов выбираем внешнюю поверхность $\partial\Omega_j$, расположенную относительно близко к исходной поверхности ∂D . После этого по формуле (20) производим вычисления коэффициента M при разных значениях радиуса вспомогательной сферы r_0 . Если условие (21) при выбранном расположении вспомогательной поверхности $\partial\Omega_j$ не выполнено для всех сфер, расположенных между поверхностями ∂D и $\partial\Omega_j$, то отодвигаем поверхность $\partial\Omega_j$ дальше от поверхности ∂D и снова производим вычисления коэффициента M для нового набора значений радиусов сфер r_0 между этими областями. Такую процедуру необходимо проводить до выполнения условия (21), после чего можно приступать к численным расчетам по решению задачи (5) с условиями (2) и (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Givoli D.* Numerical methods for problems in infinite domains Amsterdam, Netherlands: Elsevier, 1992.
2. *Engleder S., Steinbach O.* Stabilized boundary element methods for exterior Helmholtz problems // Numer. Math. 2008. V. 110. Issue 2. P. 145–160.
3. *Kleefeld A., Lin Tsu-Chu.* Boundary element collocation method for solving the exterior Neumann problem for Helmholtz's equation in three dimensions // Electronic Transactions on Numerical Analysis. 2012. V. 39. P. 113–143.
4. *Aziz A., Dorr M., Kellogg R.* A new approximation method for the Helmholtz equation in an exterior domain // SIAM J. Numer. Anal. 1982. V. 19. № 5.
5. *Yu D.* Natural Boundary Integral Method and Its Applications. Netherlands: Springer, 2002.
6. *Chen Q., Liu B., Du Q.* A D-N Alternating Algorithm for Solving 3D Exterior Helmholtz Problems // Math. Problems in Engng, 2014. <https://doi.org/10.1155/2014/418426>
7. *Du Q., Yu D.* Schwarz alternating method based on natural boundary reduction for time-dependent problems on unbounded domains // Commun. Numer. Meth. Engng. 2004. V. 20. P. 363–378.

8. *Jia Z., Wu J., Yu D.* A coupled natural boundary element and finite element method for solving a 3-dimensional exterior Helmholtz problem // *Mathematica Numerica Sinica*, 2001. V. 23. № 3. P. 357–368.
9. *Курант Р., Гилберт Д.* Методы математической физики. Т. 2. М.: Мир, 1964.
10. *Marini L.D., Quarteroni A.* A relaxation procedure for domain decomposition methods using finite elements // *Numer. Math.* 1989. 55. P. 575–598.
11. *Quarteroni A., Valli A.* Domain decomposition methods for partial differential equations. Oxford: Clarendon Press, 1999.
12. *Petukhov A.V.* The Barycentric Finite Volume Method for 3D Helmholtz Complex Equation // *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 2007. V. 43. № 2. P. 182–191.
13. *Ильин В.П.* Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000.
14. *Ильин В.П.* Методы и технологии конечных элементов Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2007.