ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 6, с. 994–1006

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.9

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПО ВРЕМЕНИ УСЛОВИЕМ

А. Ашыралыев[1,2,3,*], **Ч. Ашыралыев**[4,5,**]

[1] *34353 Кафедра математики, Бахчешехир университет, Стамбул, Турция*

[2] *117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия*

[3] *050010 Алматы, ул. Пушкина, 125, Институт математики и математического моделирования, Казахстан*

[4] *29100 Кафедра инженерной математики, Университет Гюмюшхане, Гюмюшхане, Турция*

[5] *100174 Студенческий городок, Ташкент, Национальный Университет Узбекистана, Узбекистан*

**e-mail: aallaberen@gmail.com*

***e-mail: charyar@gmail.com*

Поступила в редакцию 24.12.2021 г.
Переработанный вариант 24.12.2021 г.
Принята к публикации 11.02.2022 г.

В данной работе исследуются краевые задачи с интегральным типом нелокальности по времени для параболического уравнения. Установлены корректно поставленность этих дифференциальных и разностных проблем в гёльдеровых пространствах. Представлены числовые иллюстрации в тестовом примере. Библ. 33. Табл. 1.

Ключевые слова: параболическое уравнение, локальные и нелокальные задачи, разностные схемы, устойчивость, гильбертово пространство.

DOI: 10.31857/S0044466922060023

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи физики и прикладных наук сводятся к локальным и нелокальным краевым задачам для уравнения параболического типа. Приближенные решения локальных и нелокальных краевых задач для параболических уравнений были широко исследованы многими авторами (см., например, [1]–[32] и ссылки, указанные в них).

В статье [19] рассмотрена однозначная разрешимость нелокальной по времени краевой задачи:

$$\begin{gathered}\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad 0 < t < T,\\ u(0) = \int_0^T a(s)Bu(s)ds + \varphi\end{gathered} \tag{1.1}$$

для параболического уравнения в гильбертовом пространстве H с позитивными самосопряженными операторами A и B. Здесь $f:(0,T) \to H$ и $a:[0,T] \to R^1$ – заданные функции, $\varphi \in H$ – известный элемент, B является ограниченным и $D(B) = H$.

В данной статье исследуется корректность нелокальной по времени краевой задачи (1.1) для параболического уравнения. Приведены одношаговые абсолютно устойчивые разностные схемы первого и второго порядка точности для численного решения дифференциальной задачи (1.1) и установлены теоремы об устойчивости этих разностных схем. Представлены числовые иллюстрации в тестовом примере.

2. ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ ПО ВРЕМЕНИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Лемма 1. *Для всех значений $t \geq 0$ имеют место оценки*:

$$\left\| e^{-At} \right\|_{H \to H} \leq 1, \quad t \left\| A e^{-At} \right\|_{H \to H} \leq 1. \tag{2.1}$$

Лемма 2. *Предположим, что условие*

$$\int_0^T |a(s)|\, ds \, \|B\|_{H \to H} < 1 \tag{2.2}$$

выполнено. Тогда оператор $I - \int_0^T a(s) B e^{-As} ds$ имеет обратный Q и последующая оценка

$$\|Q\|_{H \to H} \leq \frac{1}{1 - \int_0^T |a(s)|\, ds \, \|B\|_{H \to H}} = M_{a,b} \tag{2.3}$$

выполнена.

Доказательства этих оценок основаны на спектральном представлении самосопряженного положительно-определенного оператора в гильбертовом пространстве.

Здесь и далее M указывает на положительные константы, которые время от времени могут изменяться. Если константа зависит только от a, то мы будем писать M_a.

Лемма 3. *Для решения задачи* (1.1) *имеем следующую формулу*:

$$u(t) = e^{-At} u(0) + \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s) ds, \tag{2.4}$$

$$u(0) = Q \left[\int_0^T a(s) \left[\int_0^s B e^{-A(s-\sigma)} f(\sigma) d\sigma \right] ds + \varphi \right]. \tag{2.5}$$

Доказательство. При гладких данных существует единственное решение проблемы (см. [5]):

$$u_t(t) + Au(t) = f(t), \quad 0 < t < T, \quad \text{элемент } u(0) \text{ задан} \tag{2.6}$$

и для решения имеет место формула (2.4). Применяя эту формулу и нелокальное условие

$$u(0) = \int_0^T a(s) B u(s) ds + \varphi,$$

убеждаемся в том, что

$$u(0) = \int_0^T a(s) B \left[e^{-As} u(0) + \int_0^s e^{-A(s-\sigma)} f(\sigma) d\sigma \right] ds + \varphi.$$

По лемме 2 оператор $I - \int_0^T a(s) B e^{-As} ds$ имеет обратную $Q = \left(I - \int_0^T a(s) B e^{-As} ds \right)^{-1}$. Отсюда следует и формула (2.5). Лемма 3 доказана.

Обозначим через $C_0^{\alpha}([0,T], H)$, $0 < \alpha < 1$, банахово пространство, полученное пополнением множества гладких H-значных функций $\varphi(t)$, определенных на $[0,T]$ в норме

$$\|\varphi\|_{C_0^{\alpha}([0,T],H)} = \|\varphi\|_{C([0,T],H)} + \sup_{0 \leq t < t+\tau \leq T} \frac{(t+\tau)^{\alpha} \|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)\|_H}{\tau^{\alpha}}.$$

Здесь $C([0,T], H)$ обозначает банахово пространство всех абстрактных непрерывных функций $\varphi(t)$, определенных на $[0,T]$ со значениями в H и нормой

$$\|\varphi\|_{C([0,T],H)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|\varphi(t)\|_H .$$

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия лемм* 1 *и* 2. *Пусть* $\varphi \in D(A)$ *и* $f(t)$ *— непрерывно дифференцируемая функция на* $[0,T]$. *Тогда существует единственное решение* $u(t)$ *задачи* (1.1) *и для решения выполняются неравенства устойчивости*

$$\max_{0\le t\le T}\|u(t)\|_H \le M_{a,b}\left[\|\varphi\|_H + \max_{0\le t\le T}\|f(t)\|_H\right] \tag{2.7}$$

и

$$\max_{0\le t\le T}\|u'(t)\|_H + \max_{0\le t\le T}\|Au(t)\|_H \le M_{a,b}\left[\|A\varphi\|_H + \max_{0\le t\le T}\|f'(t)\|_H + \|f(0)\|_H\right]. \tag{2.8}$$

Доказательство. Применяя формулу (2.4) и оценку (2.1), для всех $t \in (0,T]$ получаем

$$\|u(t)\|_H \le \|u(0)\|_H + T\max_{0\le t\le T}\|f(t)\|_H. \tag{2.9}$$

Используя формулу (2.5), неравенство треугольника и оценки (2.1), (2.2), (2.3), получаем

$$\|u(0)\|_H \le C_a\left[\|B\|_{H\to H}\, T\int_0^T |a(s)|\,ds \max_{0\le t\le T}\|f(t)\|_H + \|\varphi\|_H\right] \le M_{a,b}\left[\max_{0\le t\le T}\|f(t)\|_H + \|\varphi\|_H\right]. \tag{2.10}$$

Следовательно, оценка (2.7) следует из (2.9) и (2.10). Теперь получим оценку (2.8). По формуле (2.4) и интегрированием по частям получаем

$$Au(t) = Ae^{-At}u(0) + f(t) - e^{-At}f(0) - \int_0^t e^{-A(t-s)}f'(s)ds. \tag{2.11}$$

Применяя эту формулу и оценку (2.1), получаем оценку

$$\|Au(t)\|_H \le \|Au(0)\|_H + \max_{0\le t\le T}\|f(t)\|_H + \|f(0)\|_H + T\max_{0\le t\le T}\|f'(t)\|_H \tag{2.12}$$

для всех $t \in (0,T]$.

По формуле (2.5) и интегрированием по частям получаем

$$Au(0) = QA\varphi + Q\left\{\int_0^T a(s)B\left((I - e^{-As})f(s) + \int_0^s e^{-A(s-\sigma)}\left(f(\sigma) - f(s)\right)d\sigma\right)ds\right\}. \tag{2.13}$$

По этой формуле и оценкам (2.1), (2.2), (2.3), получаем

$$\|Au(0)\|_H \le C_a\|A\varphi\|_H + C_a\|B\|_{H\to H}\left[\max_{0\le t\le T}\|f'(t)\|_H + \|f(0)\|_H + \max_{0\le t\le T}\|f'(t)\|_H\right]. \tag{2.14}$$

Комбинируя оценки (2.12) и (2.14), получаем

$$\max_{0\le t\le T}\|Au(t)\|_H \le M_{a,b}\left[\|A\varphi\|_H + \max_{0\le t\le T}\|f'(t)\|_H + \|f(0)\|_H\right]. \tag{2.15}$$

Тогда оценка для $\|u'(t)\|_H$ следует из уравнения (1.1) и оценки (2.15). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия лемм* 1 *и* 2. *Пусть* $f(t) \in C_0^\alpha([0,T],H)$ *и* $\varphi \in D(A)$. *Тогда краевая задача* (1.1) *корректна в пространстве Гёльдера* $C_0^\alpha([0,T],H)$. *Для решения краевой задачи* $u(t)$ *в* $C_0^\alpha([0,T],H)$ *коэрцитивное неравенство*

$$\|u'\|_{C_0^\alpha([0,T],H)} + \|Au\|_{C_0^\alpha([0,T],H)} \le \frac{M_{a,b}}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C_0^\alpha([0,T],H)} + M_{a,b}\|A\varphi\|_H \tag{2.16}$$

выполнено.

Доказательство. Применяя формулу (2.14) и оценки (2.1), (2.2), (2.3), получаем

$$\|Au(0)\|_H \le M_a\left[\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\|B\|_{H\to H}\|f\|_{C_0^\alpha([0,T],H)} + \|A\varphi\|_H\right].$$

Отсюда и из корректности начальной задачи (2.6) в $C_0^\alpha([0,T],H)$ статьи [1] следует оценка (2.16). Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Отметим, что корректность краевой задачи (1.1) теоремы 2 в произвольном банаховом пространстве E выполняется при предположении $I-\int_0^T a(s)Be^{-As}ds$ имеет ограниченный обратный в E.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЭРЦИТИВНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Пусть $C_\tau(H)=C\left([0,T]_\tau,H\right)$, $C_\tau^\alpha(H)=C_0^\alpha\left([0,T]_\tau,H]\right)$, $\alpha\in(0,1)$, – банаховы пространства всех сеточных функций $w_\tau=\{w_k\}_{k=0}^N$ со значением в H и определенных на $[0,T]_\tau=\{t_k=k\tau,\,0\leqslant k\leqslant N,\,N\tau=T\}$ соответствующими нормами

$$\|w_\tau\|_{C_\tau(H)}=\max_{0\le k\le N}\|w_k\|_H,\qquad \|w_\tau\|_{C_\tau^\alpha(H)}=\sup_{1\le k<k+n\le N}(N-n)^{-\alpha}(k)^\alpha\|w_{k+n}-w_k\|_H+\|w_\tau\|_{C_\tau(H)}.$$

Для приближения краевых задач ((1)) представим соответствующие разностные схемы

$$\begin{gathered}\frac{1}{\tau}(u_k-u_{k-1})+Au_k=\varphi_k,\quad \varphi_k=f(t_k),\quad 1\le k\le N,\\ u_0=\frac{a_0Bu_0+a_NBu_N}{2}\tau+\sum_{i=1}^{N-1}a_iBu_i\tau+\varphi\end{gathered}\tag{3.1}$$

первого порядка точности и

$$\begin{gathered}\frac{1}{\tau}(u_k-u_{k-1})+A\frac{u_k+u_{k-1}}{2}=\varphi_k,\quad \varphi_k=f\left(t_k-\frac{\tau}{2}\right),\quad 1\le k\le N,\\ u_0=\frac{a_0Bu_0+a_NBu_N}{2}\tau+\sum_{i=1}^{N-1}a_iBu_i\tau+\varphi\end{gathered}\tag{3.2}$$

второго порядка точности. Здесь $a_i=a(t_i)$, $t_i=i\tau$, $0\leqslant i\leqslant N$, $N\tau=T$. Из положительности оператора A следует, что существуют ограниченные операторы шага $R=R(\tau A)$, $P=P(\tau A)$ этих разностных схем на всем пространстве H, определяемые формулами

$$R=\begin{cases}(I+\tau A)^{-1} & \text{для разностной схемы (3.1)},\\ \left(I-\dfrac{\tau A}{2}\right)\left(I+\dfrac{\tau A}{2}\right)^{-1} & \text{для разностной схемы (3.2)},\end{cases}$$

$$P=\begin{cases}(I+\tau A)^{-1} & \text{для разностной схемы (3.1)},\\ \left(I+\dfrac{\tau A}{2}\right)^{-1} & \text{для разностной схемы (3.2)}.\end{cases}$$

Лемма 4. *Для всех* $k=1,\dots,N$ оценки

$$\left\|R^k\right\|_{H\to H}\le 1,\qquad \left\|(I-R)R^{k-1}P\right\|_{H\to H}\le\frac{1}{k}\tag{3.3}$$

выполнены.

Лемма 5. *Предположим, что*

$$\left[\frac{|a_0|+|a_N|}{2}\tau+\sum_{i=1}^{N-1}|a_i|\tau\right]\|B\|_{H\to H}<1.\tag{3.4}$$

Тогда оператор

$$I-\frac{a_0B+a_NBR^N}{2}\tau-\sum_{i=1}^{N-1}a_iR^iB\tau$$

имеет обратную Q_τ *и последующая оценка*

$$\|Q_\tau\|_{H\to H} \le \frac{1}{1-\left[\frac{|a_0|+|a_N|}{2}\tau+\sum_{i=1}^{N-1}|a_i|\tau\right]\|B\|_{H\to H}} = M_{a,b} \tag{3.5}$$

выполнена.

Доказательства этих оценок основываются на спектральном представлении самосопряженных положительно-определенных операторов в гильбертовом пространстве.

Лемма 6. *Для решения разностных схем* (3.1) *и* (3.2) *имеем следующую формулу*:

$$u_k = R^k u_0 + \sum_{i=1}^{k} R^{k-i}P\varphi_i\tau, \tag{3.6}$$

$$u_0 = Q_\tau\left[\frac{\tau a_N}{2}B\sum_{i=1}^{N}R^{N-i}P\varphi_i\tau + \sum_{i=1}^{N-1}\tau a_i B\sum_{j=1}^{i}R^{i-j}P\varphi_j\tau + \varphi\right]. \tag{3.7}$$

Доказательство. Для решения разностных схем

$$\frac{1}{\tau}(u_k - u_{k-1}) + Au_k = \varphi_k, \quad 1\le k\le N, \quad u_0 - \text{заданный элемент}, \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{\tau}(u_k - u_{k-1}) + A\frac{u_k + u_{k-1}}{2} = \varphi_k, \quad 1\le k\le N, \quad u_0 - \text{заданный элемент} \tag{3.9}$$

имеем формулу (3.6). Применяя эту формулу и нелокальное условие

$$u_0 = \frac{a_0Bu_0 + a_NBu_N}{2}\tau + \sum_{i=1}^{N-1}a_iBu_i\tau + \varphi,$$

имеем

$$u_0 = \frac{\tau a_0}{2}Bu_0 + \frac{\tau a_N}{2}B\left[R^Nu_0 + \sum_{i=1}^{N}R^{N-i}P\varphi_i\tau\right] + \sum_{i=1}^{N-1}\tau a_iB\left[R^iu_0 + \sum_{j=1}^{i}R^{i-j}P\varphi_j\tau\right] + \varphi.$$

По лемме 5 оператор $I - \frac{a_0B + a_NBR^N}{2}\tau - \sum_{i=1}^{N-1}a_iR^iB\tau$ имеет обратную Q_τ. Отсюда следует формула (3.7). Лемма 6 доказана.

Теорема 3. *Пусть* τ *— достаточно малое число. Тогда разностные схемы* (3.1) *и* (3.2) *устойчивы в* $C_\tau(H)$ *и* $C_\tau^\alpha(H)$ *и для решений разностных схем* (3.1) *и* (3.2) *в* $C_\tau(H)$ *и* $C_\tau^\alpha(H)$ *справедливы следующие неравенства устойчивости*:

$$\left\|u^\tau\right\|_{C_\tau(H)} \le M_{a,b}\left[\|\varphi\|_H + \left\|\varphi^\tau\right\|_{C_\tau(H)}\right], \tag{3.10}$$

$$\left\|u^\tau\right\|_{C_\tau^\alpha(H)} \le M_{a,b}\left[\|\varphi\|_H + \left\|\varphi^\tau\right\|_{C_\tau^\alpha(H)}\right]. \tag{3.11}$$

Доказательство. Неравенства устойчивости

$$\left\|u^\tau\right\|_{C_\tau(H)} \le \left[\|u_0\|_H + T\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_\tau(H)}\right], \tag{3.12}$$

$$\left\|u^\tau\right\|_{C_\tau^\alpha(H)} \le M\left[\|\varphi\|_H + \left\|\varphi^\tau\right\|_{C_\tau^\alpha(H)}\right] \tag{3.13a}$$

для решения разностных схем (3.8) и (3.9) в $C_\tau(H)$ и $C_\tau^\alpha(H)$ были доказаны ранее (см. [2]). Используя формулу (3.7) и оценку (3.3), получаем оценки

$$\|u_0\|_H \le M_{a,b}\left[\|\varphi\|_H + \left\|\varphi^\tau\right\|_{C_\tau(H)}\right], \tag{3.14}$$

$$\|u_0\|_H \le M_{a,b}\left[\|\varphi\|_H + \left\|\varphi^\tau\right\|_{C_\tau^\alpha(H)}\right] \tag{3.15}$$

для решения разностных схем (3.1) и (3.2) в $C_\tau(H)$ и $C_\tau^\alpha(H)$. Следовательно, оценки (3.10) и (3.11) вытекают из оценок (3.12)–(3.15). Теорема 3 доказана.

Поскольку нелокальная краевая задача (1.1) в пространстве $C([0,T],H)$ непрерывных со значением в H функций, определенных на $[0,T]$, не является корректно поставленным для общего положительного оператора A и пространства H, то корректность разностных схем (3.1) и (3.2) в норме $C_\tau(H)$ не имеет места равномерно относительно $\tau > 0$. Это означает, что коэрцитивная норма

$$\left\|u^\tau\right\|_{K_\tau(H)} = \left\|\{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_1^N\right\|_{C_\tau(H)} + \left\|\{A\tilde{u}_k\}_1^N\right\|_{C_\tau(H)}$$

стремится к ∞ при $\tau \to +0$. Здесь и в будущем мы полагаем

$$\tilde{u}_k = \begin{cases} u_k & \text{для разностной схемы (3.1),} \\ \dfrac{u_k + u_{k-1}}{2} & \text{для разностной схемы (3.2).} \end{cases}$$

Исследование разностных схем (3.1) и (3.2) в норме $C_\tau(H)$ позволяет установить порядок роста этой нормы к ∞.

Теорема 4. *Пусть τ — достаточно малое число. Тогда для решения разностных схем* (3.1) *и* (3.2) *имеем неравенство почти коэрцитивной устойчивости*

$$\left\|u^\tau\right\|_{K_\tau(H)} \le M_{a,b}[\min\left\{\ln\frac{1}{\tau}, 1 + \left|\ln\|A\|_{H\to H}\right|\right\}\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_\tau(H)} + \|A\varphi\|_H .$$

Доказательство. Доказательство теоремы основано на оценке почти коэрцитивной устойчивости

$$\left\|u^\tau\right\|_{K_\tau(H)} \le M[\min\left\{\ln\frac{1}{\tau}, 1 + \left|\ln\|A\|_{H\to H}\right|\right\}\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_\tau(H)} + \|Au_0\|_H$$

для решения разностных схем (3.8) и (3.9) в $C_\tau(H)$ работы [2] и оценки

$$\|Au_0\|_H \le M_{a,b}\left[\|A\varphi\|_H + \min\left\{\ln\frac{1}{\tau}, 1 + \left|\ln\|A\|_{H\to H}\right|\right\}\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_\tau(H)}\right]$$

для решения разностных схем (3.1) и (3.2) в $C_\tau(H)$. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Пусть τ — достаточно малое число и $\varphi \in D(A)$. Тогда для решения разностных схем* (3.1) *и* (3.2) *выполняется следующее неравенство коэрцитивной устойчивости в $C_\tau^\alpha(E)$*

$$\left\|\{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_1^N\right\|_{C_\tau^\alpha(H)} + \left\|\{A\tilde{u}_k\}_1^N\right\|_{C_\tau^\alpha(H)} \le \frac{M_{a,b}}{\alpha(1-\alpha)}\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_\tau^\alpha(E)} + M_{a,b}\|A\varphi\|_H .$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы основано на теореме о корректности в $C_\tau^\alpha(E)$ разностных схем (3.8) и (3.9) статей [2] и [11] и оценки коэрцитивной устойчивости

$$\|Au_0\|_E \le \frac{M}{\alpha(1-\alpha)}\left\|\varphi^\tau\right\|_{C_\tau^\alpha(E)} + M\|A\mu\|_E$$

для решения разностных схем (3.1) и (3.2). Теорема 5 доказана.

Замечание 2. Переходя к пределу для $\tau \to 0$ в (5), мы можем получить корректность нелокальной краевой задачи (1.1) в $C_0^\alpha([0,T],H)$ теоремы 4.

Замечание 3. Отметим, что оценка устойчивости, оценка почти коэрцитивной устойчивости и оценка коэрцитивной устойчивости разностных схем (3.1) и (3.2) теорем 3–5 в произвольном банаховом пространстве E верны при предположении, что

$$I - \frac{a_0B + a_NBR^N}{2}\tau - \sum_{i=1}^{N-1} a_iR^iB\tau$$

имеет ограниченный обратный в E.

4. ПРИЛОЖЕНИЯ

В этом разделе мы рассмотрим приложения результатов теорем 3 и 4 для нелокальных краевых задач для параболических уравнений и теорем 6–8 для решений разностных схем для приближенных решений этих параболических уравнений.

Во-первых, рассматривается нелокальная краевая задача для одномерного параболического уравнения

$$\begin{gathered} v_t-(a(x)v_x)_x+\delta v=f(t,x), \quad 0<t<T, \quad 0<x<l, \\ v(0,x)=\int_0^T \alpha(s)Bv(s,x)ds+\varphi(x), \quad 0\le x\le l, \\ v(t,0)=v(t,l), \quad v_x(t,0)=v_x(t,l), \quad 0\le t\le T. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Здесь $0<a\le a(x)$, $a(l)=a(0)$ и δ – положительная константа. В условиях совместимости задача (4.1) имеет единственное решение $v(t,x)$ для гладких функций $a(x)$, $x\in(0,l)$, $\varphi(x)$, $x\in[0,l]$, $f(t,x)$, (t,x), $(0,T)\times(0,l)$. Это позволяет сводить смешанную задачу (4.10) к нелокальной краевой задаче (1.1) в гильбертовом пространстве $H=L_2[0,l]$.

Известно, что дифференциальное выражение

$$Az=-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{dz(x)}{dx}\right)+\delta z(x) \tag{4.2}$$

определяет самосопряженный положительно-определенный оператор A с области определения

$$D(A)=\{z: z,z''\in L_2(0,l),\, z(0)=z(l),\, z'(0)=z'(l)\}. \tag{4.3}$$

Применяя результаты теорем 3 и 4, мы можем получить утверждения об устойчивости и коэрцитивной устойчивости.

Теорема 6. *Предположим, что* $\varphi(x)\in W_2^2(0,l)$ *и* $f(t,x)\in C_0^{\alpha}([0,T],L_2(0,l))$ *и условие* $\int_0^T|a(s)|\,ds\,\|B\|_{L_2(0,l)\to L_2(0,l)}<1$ *выполнено. Тогда задача* (4.1) *имеет единственное решение* $u\in C_0^{\alpha}([0,T],L_2(0,l))$ *и для решения нелокальной краевой задачи* (4.1) *следующие оценки устойчивости*:

$$\|u\|_{C([0,T],L_2(0,l))}\leqslant M_{a,b,q,\delta}\left[\|\varphi\|_{L_2(0,l)}+\|f\|_{C([0,T],L_2(0,l))}\right], \tag{4.4}$$

$$\|u_t\|_{C([0,T],L_2(0,l))}+\|u\|_{C\left([0,T],W_2^2(0,l)\right)}\leqslant M_{a,b,q,\delta}\left[\|\varphi\|_{W_2^2(0,l)}+\|f_t\|_{C([0,T],L_2(0,l))}+\|f(0)\|_{L_2(0,l)}\right] \tag{4.5}$$

и оценки коэрцитивной устойчивости

$$\|u_t\|_{C_0^{\alpha}([0,T],L_2(0,l))}+\|u\|_{C_0^{\alpha}\left([0,T],W_2^2(0,l)\right)}\leqslant M_{a,b,q,\delta}\|\varphi\|_{W_2^2(0,l)}+\frac{M_{a,b,q,\delta}}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C_0^{\alpha}([0,T],L_2(0,l))} \tag{4.6}$$

выполнены.

Здесь пространство Соболева $W_2^2(0,l)$ определяется как множество всех функций $v(x)$, определенных на $(0,l)$, таких что как $v(x)$, $v'(x)$, так и $v''(x)$ локально интегрируемы в $L_2(0,l)$, снабженные нормой

$$\|v\|_{W_2^2(0,l)}=\left(\int_0^{\ell}|v(x)|^2\,dx\right)^{1/2}+\left(\int_0^{\ell}|v'(x)|^2\,dx\right)^{1/2}+\left(\int_0^{\ell}|v''(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Кроме того, пусть $L_{2h}=L_2[0,l]_h$ и $W_{2h}^2=W_2^2[0,l]_h$ – нормированные пространства всех сеточных функций $\gamma^h(x)=\{\gamma_n\}_{n=0}^M$ определенных на $[0,l]_h=\{x_n=nh,\,0\leqslant n\leqslant M,\,Mh=l\}$ с нормами

$$\left\|\gamma^h\right\|_{L_{2h}}=\left(\sum_{x\in[0,l]_h}\left|\gamma^h(x)\right|^2h\right)^{1/2}$$

и

$$\left\|\gamma^h\right\|_{W_{2h}^2} = \left\|\gamma^h\right\|_{L_{2h}} + \left(\sum_{x\in(0,l)_h}\left|(\gamma^h)_{x\bar{x},j}\right|^2 h\right)^{1/2},$$

соответственно. Кроме того, введем разностный оператор A_h^x определенной формулой

$$A_h^x u^h(x) = \left\{-\frac{1}{h}\left(a_{n+1}\frac{u_{n+1}-u_n}{h} - a_n\frac{u_n-u_{n-1}}{h}\right) + \delta u_n\right\}_1^{M-1}, \tag{4.7}$$

действующие в пространстве сеточных функций $u^h(x) = \{u_n\}_{n=0}^M$ определенных на $[0,l]_h$ удовлетворяющих условиям $u_M = u_0$, $u_1 - u_0 = u_M - u_{M-1}$. Для численного решения $\left\{u_k^h(x)\right\}_{k=0}^N$ нелокальной краевой задачи (4.1), представляем разностные схемы первого и второго порядка точности по t

$$\begin{gathered}
\frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \frac{1}{h}\left(a_{n+1}\frac{u_{n+1}^k - u_n^k}{h} - a_n\frac{u_n^k - u_{n-1}^k}{h}\right) + \delta u_n^k = f_n^k,\\
f_n^k = f(t_k, x_n), \quad t_k = k\tau, \quad x_n = nh, \quad k = \overline{1,N}, \quad n = \overline{1,M-1},\\
u_n^0 = \varphi_n, \varphi_n = \varphi(x_n), \quad n \in \overline{0,M},\\
u_M^k = u_0^k, \quad u_1^k - u_0^k = u_M^k - u_{M-1}^k, \quad k \in \overline{0,N},
\end{gathered} \tag{4.8}$$

$$\begin{gathered}
\frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \frac{1}{2h}\left(a_{n+1}\frac{u_{n+1}^k - u_n^k}{h} - a_n\frac{u_n^k - u_{n-1}^k}{h}\right) - \frac{1}{2h}\left(a_{n+1}\frac{u_{n+1}^{k-1} - u_n^{k-1}}{h} - a_n\frac{u_n^{k-1} - u_{n-1}^{k-1}}{h}\right) + \delta\frac{u_n^k + u_n^{k-1}}{2} = f_n^k,\\
f_n^k = f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n\right), \quad t_k = k\tau, \quad x_n = nh, \quad k \in \overline{1,N}, \quad n \in \overline{1,M-1},\\
u_n^0 = \varphi_n, \varphi_n = \varphi(x_n), \quad n \in \overline{0,M},\\
u_M^k = u_0^k, \quad u_1^k - u_0^k = u_M^k - u_{M-1}^k, \quad k \in \overline{0,N},
\end{gathered} \tag{4.9}$$

соответственно. Применяя результаты теорем 3, 4 и 5, можно получить результаты устойчивости, почти коэрцитивной устойчивости и коэрцитивной устойчивости для (4.8) и (4.9).

Теорема 7. *Пусть* τ *и* h *являются достаточно малыми числами и условие*

$$\left[\frac{|a_0| + |a_N|}{2}\tau + \sum_{i=1}^{N-1}|a_i|\tau\right]\|B\|_{L_{2h}\to L_{2h}} < 1$$

выполнено. Тогда решения разностных схем (4.8) *и* (4.9) *удовлетворяют оценку устойчивости*

$$\left\|\left\{u_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})} \leqslant M_{a,b,q,\delta}\left[\left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}} + \left\|\left\{f_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\right],$$

оценку почти коэрцитивной устойчивости

$$\left\|\left\{\frac{1}{\tau}\left(u_k^h - u_{k-1}^h\right)\right\}_{k=1}^N\right\|_{C(L_{2h})} \leqslant M_{a,b,q,\delta}\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2} + \ln\frac{1}{h+\tau}\left\|\left\{f_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C(L_{2h})}\right]$$

и оценку почти коэрцитивной устойчивости

$$\left\|\left\{\frac{1}{\tau}\left(u_k^h - u_{k-1}^h\right)\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})} \leqslant M_{a,b,q,\delta}\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\left\|\left\{f_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\right].$$

Во-вторых, пусть Ω – единичный куб в n-мерном евклидовом пространстве R^n ($0 < x_k < 1$, $1 \le k \le n$) с границей S и $\widetilde{\Omega} = \Omega \cup S$. В $[0,T]\times\widetilde{\Omega}$. В $[0,T]\times\widetilde{\Omega}$ рассмотрим нелокальную краевую задачу для многомерного параболического уравнения

$$\begin{gathered} u_t - \sum_{r=1}^{n}\left(a_r(x)u_{x_r}\right)_{x_r} = f(t,x), \quad 0 < t < T, \quad x \in \Omega, \\ u(0,x) = \int_0^T \alpha(s)Bu(s,x)ds + \varphi(x), \quad x \in \widetilde{\Omega}, \\ u(t,x) = 0, \quad x \in S, \quad 0 \le t \le T. \end{gathered} \tag{4.10}$$

Задача (4.10) имеет единственное гладкое решение $u(t,x)$ для гладких функций $a_r(x) \ge a > 0$ ($x \in \Omega$), $\varphi(x)(x \in \widetilde{\Omega})$ и $f(t,x)$ ($t \in [0,T]$, $x \in \Omega$). Это позволяет свести смешанную задачу (4.10) к нелокальной краевой задаче (1.1) в гильбертовом пространстве $H = L_2(\Omega)$ всех интегрируемых функций, определенных на Ω, с нормой

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} = \left\{\int\limits_{x\in\Omega}\cdots\int|f(x)|^2\,dx_1\ldots dx_n\right\}^{1/2}$$

с самосопряженным положительно-определенным оператором A^x, определяемым формулой

$$A^x u(x) = -\sum_{r=1}^{n}(a_r(x)u_{x_r})_{x_r} \tag{4.11}$$

с областью определения

$$D(A^x) = \left\{u(x) : u(x),\, u_{x_r}(x), (a_r(x)u_{x_r})_{x_r} \in L_2(\Omega), 1 \le r \le n,\, u(x) = 0,\, x \in S\right\}.$$

Применяя результаты теорем 1, 2, 3 и теоремы о неравенстве коэрцитивности для решения эллиптической задачи в $L_2(\overline{\Omega})$ (см. [19]), можно получить результаты устойчивости и коэрцитивной устойчивости.

Теорема 8. *Предположим, что* $\varphi(x) \in W_2^2(\Omega)$ и $f(t,x) \in C_0^{\alpha}\left([0,T], L_2(\Omega)\right)$ *и условие* $\int_0^T|a(s)|\,ds\,\|B\|_{H\to H} < 1$ *выполнено. Тогда задача* (4.10) *имеет единственное решение* $u \in C_0^{\alpha}\left([0,T], L_2(\Omega)\right)$ *и решение нелокальной краевой задачи* (4.10) *удовлетворяет следующим оценкам устойчивости*:

$$\|u\|_{C([0,T],L_2(\Omega))} \leqslant M_{a,b,q,\delta}\left[\|\varphi\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{C([0,T],L_2(\Omega))}\right], \tag{4.12}$$

$$\|u_t\|_{C([0,T],L_2(\Omega))} + \|u\|_{C\left([0,T],W_2^2(\Omega)\right)} \leqslant M_{a,b,q,\delta}\left[\|\varphi\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f_t\|_{C([0,T],L_2(\Omega))} + \|f(0)\|_{L_2(\Omega)}\right] \tag{4.13}$$

и коэрцитивной устойчивости

$$\|u_t\|_{C_0^{\alpha}([0,T],L_2(\Omega))} + \|u\|_{C_0^{\alpha}\left([0,T],W_2^2(\Omega)\right)} \leqslant M_{a,b,q,\delta}\|\varphi\|_{W_2^2(\Omega)} + \frac{M_{a,b,q,\delta}}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C_0^{\alpha}([0,T],L_2(\Omega))}. \tag{4.14}$$

Здесь пространство Соболева $W_2^2(\Omega)$ определяется как множество всех функций u, определенных на Ω таких, что u и все функции производной в частных производных второго порядка $u_{x_r x_r}$, $r = 1, \ldots, n$, все интегрируемы в $L_2(\Omega)$, снабжены нормой

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)} = \|u\|_{L_2(\Omega)} + \left(\int\cdots\int\limits_{x\in\Omega}\sum_{r=1}^{n}|u_{x_r x_r}|^2\,dx_1\ldots dx_n\right)^{1/2}.$$

Численное решение задачи (4.10) проводилось в два этапа. На первом этапе определяется сетка

$$\widetilde{\Omega}_h = \left\{x = x_m = (h_1m_1,\ldots,h_nm_n),\, m = (m_1,\cdots,m_n),\, 0 \le m_r \le M_r,\, h_rM_r = L,\, r = 1,\ldots,n\right\},$$

$$\Omega_h = \widetilde{\Omega}_h \cap \Omega, \quad S_h = \widetilde{\Omega}_h \cap S$$

и сеточный оператор A_h^x формулой

$$A_h^x u^h(x) = -\sum_{r=1}^{n} \left(a_r(x) u_{\bar{x}_r}^h \right)_{x_r, j_r}, \tag{4.15}$$

действующий в пространстве сеточных функций $u^h(x)$, удовлетворяющих условиям $u^h(x) = 0$ для всех $x \in S_h$. С помощью A_h^x мы приходим к нелокальной краевой задаче

$$\begin{gathered} v_t^h(t,x) + A_h^x v^h(t,x) = f^h(t,x), \quad 0 < t < T, \quad x \in \widetilde{\Omega}_h, \\ v^h(0,x) = \int_0^T \alpha(s) B_h v^h(s,x) ds + \varphi^h(x), \quad x \in \widetilde{\Omega}_h \end{gathered} \tag{4.16}$$

для бесконечной системы дифференциальных уравнений.

На втором этапе задача (4.16) заменяется разностными схемами первого и второго порядка точности по t :

$$\begin{gathered} \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + A_h^x u_k^h(x) = \varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x) = f^k(t_k, x), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \le k \le N, \quad x \in \Omega_h, \\ u_0^h(x) = \frac{a(0) B u_0^h(x) + a(T) u_N^h(T)}{2} \tau + \sum_{i=1}^{N-1} \alpha(t_i) B u_i^h(x) \tau + \varphi^h(x), \quad x \in \widetilde{\Omega}_h, \end{gathered} \tag{4.17}$$

$$\begin{gathered} \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + \frac{1}{2} A_h^x u_k^h(x) + \frac{1}{2} A_h^x u_{k-1}^h(x) = \varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x) = f^k\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x\right), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \le k \le N, \quad x \in \Omega_h, \\ u_0^h(x) = \frac{a(0) B u_0^h(x) + a(T) u_N^h(T)}{2} \tau + \sum_{i=1}^{N-1} \alpha(t_i) B u_i^h(x) \tau + \varphi^h(x), \quad x \in \widetilde{\Omega}_h, \end{gathered} \tag{4.18}$$

соответственно. Чтобы сформулировать результат устойчивости, введем пространство $L_{2h} = L_2(\Omega_h)$ всех сеточных функций $\varphi^h(x) = \varphi(h_1 m_1, \ldots, h_n m_n)$, определенных на $x \in \widetilde{\Omega}_h$, снабженных нормой

$$\left\| \varphi^h \right\|_{L_{2h}} = \left(\sum_{x \in \widetilde{\Omega}_h} \left| \varphi^h(x) \right|^2 h \right)^{1/2}.$$

Применяя результаты теорем 1, 2, 3 и теоремы о неравенстве коэрцитивности для решения эллиптической разностной задачи в L_{2h} (см. [33]), можно получить результаты устойчивости и коэрцитивной устойчивости.

Теорема 9. *Пусть* τ *и* $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_n^2}$ *— достаточно малые числа и условие*

$$\left[\frac{|a_0| + |a_N|}{2} \tau + \sum_{i=1}^{N-1} |a_i| \tau \right] \|B\|_{L_{2h} \to L_{2h}} < 1$$

выполнено. Тогда для решения разностных схем (4.17) *и* (4.18) *выполнены оценка устойчивости*

$$\left\| \left\{ u_k^h \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})} \leqslant M_{a,b,q,\delta} \left[\left\| \varphi^h \right\|_{L_{2h}} + \left\| \left\{ f_k^h \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})} \right],$$

оценка почти коэрцитивной устойчивости

$$\left\| \left\{ \frac{1}{\tau} \left(u_k^h - u_{k-1}^h \right) \right\}_{k=1}^N \right\|_{C(L_{2h})} \leqslant M_{a,b,q,\delta} \left[\left\| \varphi^h \right\|_{W_{2h}^2} + \ln \frac{1}{|h| + \tau} \left\| \left\{ f_k^h \right\}_{k=1}^N \right\|_{C(L_{2h})} \right],$$

Таблица 1. Погрешность и порядок приближения для разностных схем (4.17) и (4.18)

$N = M$	Погрешность для (4.17)	Порядок приближения для (4.17)	Погрешность для (4.18)	Порядок приближения для (4.18)
20	2.13×10^{-2}	–	3.10×10^{-4}	–
40	1.05×10^{-2}	1.0161	7.66×10^{-5}	2.0196
80	5.24×10^{-3}	1.0069	1.92×10^{-5}	1.9953
160	2.61×10^{-3}	1.0034	4.80×10^{-6}	2.0009

оценка коэрцитивной устойчивости

$$\left\| \left\{ \frac{1}{\tau}\left(u_k^h - u_{k-1}^h\right) \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})} \leqslant M_{a,b,q,\delta}\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left\| \left\{ f_k^h \right\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})} \right].$$

5. ЧИСЛЕННЫЕ ИЛЛЮСТРАЦИИ

Теперь применим разностные схемы первого и второго порядка точности к нелокальной краевой задаче

$$\begin{gathered} u_t(t,x) - (2-\sin x)^2 u_{xx}(t,x) - 2(2-\sin x)\cos x\, u_x(t,x) + u(t,x) = f(t,x), \\ f(t,x) = e^{-t}\left[(2-\sin x)^2 \sin x - 2(2-\sin x)\cos^2 x\right], \quad 0 < t < 1, \quad 0 < x < \pi, \\ u(0,x) = \frac{1}{4}\int_0^1 e^{-s}u(s,x)ds + \varphi(x), \quad \varphi(x) = \sin x\left[1 + \frac{1}{8}(e^{-2}-1)\right], \quad 0 \le x \le \pi, \\ u(t,0) = 0, \quad u(t,\pi) = 0, \quad 0 \le t \le 1, \end{gathered} \tag{5.1}$$

для одномерного параболического уравнения с использованием разностных схем (4.17) и (4.18).

Точное решение задачи: $u(t,x) = \exp(-t)\sin x$. Набор семейства узлов сетки $[0,1]_\tau \times 0,\pi]_h$ в зависимости от параметров τ и h определяется в виде

$$[0,1]_\tau \times 0,\pi]_h = \left\{(t_k, x_n) : t_k = \tau k,\ 0 \le k \le N,\ \tau N = 1,\ x_n = hn,\ 0 \le n \le M,\ hM = \pi\right\}.$$

Для численного решения разностных схем применяется модифицированный метод исключения Гаусса для системы уравнений с матричными коэффициентами.

Для сравнения приближенного решения с точным решением ошибка вычисляется по формуле

$$E_N^M = \max_{1\le k\le N-1}\left(\sum_{n=1}^{M-1}\left|u(t_k,x_n) - u_n^k\right|^2 h\right)^{1/2}.$$

В табл. 1 представлена ошибка между точным решением и решениями разностных схем (4.17) и (4.18) и порядок соответствующих приближений.

Ошибки разностных схем представлены в табл. 1 для N, M, 40, 80, 160 соответственно. Из табл. 1 видно, что порядок точности сходится к единице для разностной схемы (4.17) и к двум для разностной схемы (4.18).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье исследуются нелокальные по времени задачи параболического типа. Приведены одношаговые абсолютно устойчивые разностные схемы первого и второго порядка точности для численного решения дифференциальной задачи и установлены теоремы об устойчивости этих разностных схем. Цифровые иллюстрации описаны в тестовом примере.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sobolevskii P.E.* Coercivness inequalities for abstract parabolic equations // Soviet Math. (Doklady). 1964. V. 5. P. 894–897.
2. *Sobolevskii P.E.* The coercive solvability of difference equations // Soviet Math. (Doklady). 1971. V. 201. № 5. P. 1063–1066.
3. *Ashyralyev A., Hanalyev A., Sobolevskii P.E.* Coercive solvability of nonlocal boundary value problem for parabolic equations // Abstract and Applied Analysis. 2001. V. 6. № 1. P. 53–61.
4. *Ashyralyev A., Karatay I., Sobolevskii P.E.* Well-posedness of the nonlocal boundary value problem for parabolic difference equations // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2004. V. 2004. № 2. P. 273–286.
5. *Gulin A.V., Morozova V.A.* On the stability of a nonlocal finite–difference boundary value problem // Differ. Equ. 2003. V 39. 2. P. 962–967.
6. *Gulin A.V., Ionkin N.I., Morozova V.A.* On the stability of a nonlocal finite-difference boundary value problem // Differ. Equ. 2001. V. 37. № 7. P. 970–978.
7. *Ashyralyev A., Piskarev S. and Wei S.* On well-posedness of the difference schemes for abstract parabolic equations in L p([0, 1],E) spaces // Numerical Functional Analysis & Optimization. 2002. V. 23. № 7–8. P. 669–693.
8. *Guidetti D., Karasozen B., Piskarev S.* Approximation of abstract differential equations // J. of Math. Sci. 2004. V. 122. № 2. P. 3013–3054.
9. *Ashiraliev A., Sobolevskii P.E.* Difference schemes of a high order of accuracy for parabolic equations with the variable coefficients // Dokl. Akad. Nauk Ukrainian SSR, Ser. A Fiz.-Math. and Tech. Sciences. 1988. V. 6. P. 3–7.
10. *Gavrilyuk I.P., Makarov V.L.* Exponentially convergent parallel disretization methods for the first order evolution equations. Preprint Institut fur Angewandte Analysis und Stochastik (WIAS, Berlin, 2000).
11. *Gavrilyuk I.P.* Strongly p-positive operators and explicit representations of the solutions of initial value problems for second-order differential equations in Banach space // J. of Math. Analysis and Applicat. 1999. V. 236. № 2. P. 327–349.
12. *Ashyralyev A., Sobolevskii P.E.* New Difference Schemes for Partial Differential Equations. Operator Theory Advances and Applications, Birkhauser Verlag, 2004.
13. *Ashyralyyev C.* Stability of Rothe difference scheme for the reverse parabolic problem with integral boundary condition // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2020. V. 43. № 8. P. 5369–5379.
14. *Ashyralyyev C., Gonenc A.* Crank-Nicolson difference scheme for reverse parabolic nonlocal problem with integral and Neumann boundary conditions // International Journal of Applied Mathematics. 2021. V. 34. № 2. P. 273–282.
15. *Ashyralyyev C.* The second order of ADS for reverse parabolic boundary value problem with integral condition // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan. 2020. V. 46. № 2. P. 346–359.
16. *Wang Y.G., Oberguggenberger M.* Nonlinear parabolic equations with regularized derivatives // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1999. V. 233. № 2. P. 644–658.
17. *Beyn W.J., Garay B.M.* Estimates of variable stepsize Runge Kutta methods for sectorial evolution equations with nonsmooth data // Applied Numerical Mathematics. 2002. V. 41. № 3. P. 369–400.
18. *Rautmann R.* H2, r-convergent approximation schemes to the Navier-Stokes equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 1997. V. 30. № 4. P. 1915–1926.
19. *Starovoitov V.N.* Unique solvability of linear time-nonlocal parabolic problem // Sib. Mat. Zurn. 2021. V. 620. № 2. P. 417–421.
20. *Shelukhin V.V.* A problem with time-averaged data for nonlinear parabolic equations // Sib. Math. J. 1991. V. 32. № 2. P. 309–320.
21. *Shelukhin V.V.* A variational principle for linear evolution problems nonlocal in time // Sib. Math. J. 1993. V. 34. № 2. P. 369–384.
22. *Kozhanov A.I.* Solvability of boundary value problems for linear parabolic equations with an integral condition in a time variable // Math. Notes NEFU. 2014. V. 21. № 4. P. 17–25.
23. *Rossovskii L.E., Hanalyev A.R.* Coercive solvability of Nonlocal Boundary-Value Problems for Parabolic Equations // J. Math. Sci. 2019. V. 239. P. 855–866.
24. *Buranay S.C., Arshad N.* Hexagonal grid approximation of the solution of heat equation on special polygons // Advances in Difference Equations. 2020. V. 2020. № 309. P. 1–24.
25. *Buranay S.C., Matan A.H., Arshad N.* Two stage implicit method on hexagonal grids for approximating the first derivatives of the solution to the heat equation // Fractal and Fractions. 2021. V. 5. № 19. P. 1–26.
26. *Erdogan A.S.* Numerical solution of a parabolic problem with involution and nonlocal conditions // International Journal of Applied Mathematics. 2021. V. 34. № 2. P. 401–410.
27. *Ashyralyev A., Agirseven D., Agarwal R.P.* Stability estimates for delay parabolic differential and difference equation // Appl. Comput. Math. 2020. V. 19. № 2. P. 175–204.

28. *Iskenderov N.Sh., Allahverdiyeva S.I.* An inverse boundary value problem for the boussinesq-love equation with nonlocal integral condition // TWMS J. Pure Appl. Math. 2020. V. 11. № 2. P. 226–237.
29. *Ashyraliyev M.* On hyperbolic-parabolic problems with involution and Neumann boundary condition // International Journal of Applied Mathematics. 2021. V. 34. № 2. P. 363–376.
30. *Ashyraliyev M., Ashyralyyeva M.A., Ashyralyev A.* A note on the hyperbolic-parabolic identification problem with involution and Dirichlet boundary condition // Bull. of the Karaganda University-Mathematics. 2020. V. 99. № 3. P. 120–129.
31. *Ashyralyev A., Ashyraliyev M., Ashyralyyeva M.A.* Identification problem for telegraph-parabolic equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2020. V. 60. № 8. P. 1294–1305.
32. *Sadybekov M.A.* Stable difference scheme for a nonlocal boundary value heat conduction problem // e-Journal of Analysis and Applied Mathematics. 2018. V. 2018. № 1. P. 1–10.
33. *Соболевский П.Е.* Разностные методы решения дифференциальных уравнений. Издательство ВГУ, Воронеж, 1975.