ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 6, с. 912–932

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

ФОРМУЛЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ГОРНА ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

С. И. Безродных

119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

e-mail: sbezrodnykh@mail.ru

Поступила в редакцию 02.09.2021 г.
Переработанный вариант 24.09.2021 г.
Принята к публикации 07.10.2021 г.

Рассматриваются гипергеометрические ряды Горна двух переменных и соответствующие им системы уравнений с частными производными. Предложен метод нахождения формул аналитического продолжения произвольных рядов такого типа в виде линейных комбинаций других решений той же системы уравнений, которой удовлетворяет исходный ряд. В качестве примера построены формулы продолжения двух рядов из известного списка Горна. Библ. 32.

Ключевые слова: гипергеометрические функции многих переменных, ряды Горна, список Горна, аналитическое продолжение.

DOI: 10.31857/S0044466922060047

1. ВВЕДЕНИЕ

Гипергеометрические функции двух и большего числа переменных возникают при конструктивном решении многих задач математической физики (см., например, [1]–[14]). Важные классы таких функций определяются в виде кратных степенны́х рядов, имеющих конечные области сходимости. В связи с этим вопрос об аналитическом продолжении является одним из центральных в теории гипергеометрических функций и соответствующих им систем уравнений с частными производными (см. [1], [3], [7], [15]–[17]).

Настоящая работа посвящена выводу формул аналитического продолжения для гипергеометрических рядов Горна следующего вида:

$$F^{(M)}(\mathfrak{L};\mathbf{g};z_1,z_2) := \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k_1!k_2!}\prod_{j=1}^{M}\frac{\Gamma(g_j)}{\Gamma(g_j+\alpha_j k_1+\beta_j k_2)}\right) z_1^{k_1} z_2^{k_2}, \tag{1.1}$$

где z_1 и z_2 – комплексные переменные, $\mathbf{g} := (g_1, g_2, \ldots, g_M) \in \mathbb{C}^M$ – комплексный векторный параметр, а $\mathfrak{L}$ – целочисленная $(2\times M)$-матрица

$$\mathfrak{L} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_M \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_M \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

элементы $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{Z}$ которой удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{j=1}^{M}\alpha_j = -1, \quad \sum_{j=1}^{M}\beta_j = -1; \tag{1.3}$$

равенства (1.3) гарантируют конечность области сходимости ряда (1.1). Через $\Gamma(s)$, как обычно, обозначается гамма-функция (см. [15]).

Отметим, что согласно определению Горна (см. [18], а также [3], [7], [15], [19]) степенной ряд $\sum \lambda(k_1,k_2) z_1^{k_1} z_2^{k_2}$ называется *гипергеометрическим*, если его коэффициенты $\lambda(k_1,k_2)$ таковы, что отношения двух соседних $\lambda(k_1+1,k_2)/\lambda(k_1,k_2)$ и $\lambda(k_1,k_2+1)/\lambda(k_1,k_2)$ представляют собой рациональные функции индексов суммирования k_1 и k_2. Нетрудно убедиться в том, что коэффициенты ряда (1.1), имеющие вид

$$\Lambda(k_1,k_2) := \frac{1}{k_1!k_2!}\prod_{j=1}^{M}\frac{\Gamma(g_j)}{\Gamma(g_j+\alpha_j k_1+\beta_j k_2)},$$

обладают указанным свойством. Действительно, имеют место равенства

$$\frac{\Lambda(k_1+1,k_2)}{\Lambda(k_1,k_2)} = \frac{P_1(k_1,k_2)}{Q_1(k_1,k_2)}, \quad \frac{\Lambda(k_1,k_2+1)}{\Lambda(k_1,k_2)} = \frac{P_2(k_1,k_2)}{Q_2(k_1,k_2)}, \tag{1.4}$$

где P_1, P_2, Q_1 и Q_2 – полиномы следущего вида:

$$P_1(k_1,k_2) = \prod_{j:\alpha_j<0}((k_1+1)\alpha_j+k_2\beta_j+g_j)_{|\alpha_j|}, \quad Q_1(k_1,k_2) = (k_1+1)\prod_{j:\alpha_j>0}(k_1\alpha_j+k_2\beta_j+g_j)_{\alpha_j}, \tag{1.5}$$

$$P_2(k_1,k_2) = \prod_{j:\beta_j<0}(k_1\alpha_j+(k_2+1)\beta_j+g_j)_{|\beta_j|}, \quad Q_2(k_1,k_2) = (k_2+1)\prod_{j:\beta_j>0}(k_1\alpha_j+k_2\beta_j+g_j)_{\beta_j}, \tag{1.6}$$

записанные с помощью символа Похгаммера $(a)_m$, $m\in\mathbb{Z}$, который выражается через гамма-функцию по формуле (см. [15])

$$(a)_m := \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)} = \frac{(-1)^m\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-a-m)}, \tag{1.7}$$

и, как известно, является произведением конечного числа сомножителей вида

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_m = \begin{cases}(a)_m = a(a+1)\cdots(a+m-1), & m = 1,2,\ldots,\\ (-1)^m[(1-a)(2-a)\cdots((1-a)-m-1)]^{-1}, & m = -1,-2,\ldots.\end{cases} \tag{1.8}$$

Наивысшую из степеней полиномов (1.5), (1.6) называют порядком ряда (1.1). Дж. Горн составил полный перечень рядов вида (1.1) второго порядка. Отметим, что такой перечень, называемый списком Горна, включает 14 так называемых неконфлюентных рядов с конечной областью сходимости (см. [1], [15], [16]), для которых выполняются соотношения (1.3).

Согласно общим результатам теории рядов Горна, ряд (1.1) является решением следующей системы уравнений с частными производными (см. [3], [7], [15], [19]):

$$\mathcal{Q}_1(z_1^{-1}u(z_1,z_2)) = \mathcal{P}_1 u(z_1,z_2), \quad \mathcal{Q}_2(z_2^{-1}u(z_1,z_2)) = \mathcal{P}_2 u(z_1,z_2), \tag{1.9}$$

здесь $\mathcal{Q}_j$ и $\mathcal{P}_j$, $j = 1,2$, – дифференциальные операторы, получаемые подстановкой элементов $\theta_1 := z_1\partial/\partial z_1$ и $\theta_2 := z_2\partial/\partial z_2$ алгебры Вейля, вместо аргументов k_1 и k_2 полиномов P_j, Q_j, определяемых (1.5), (1.6).

В работе рассматривается проблема построения формул аналитического продолжения рядов Горна (1.1) за границу области Ω_0 его сходимости в виде конечных сумм

$$F^{(M)}(\mathfrak{L};\mathbf{g};z_1,z_2) = \sum\lambda_m u_m(z_1,z_2), \tag{1.10}$$

где u_m – обобщенные гипергеометрические ряды, являющиеся линейно независимыми решениями системы уравнений с частными производными (1.9), которой удовлетворяет исходный ряд (1.1), а λ_m – некоторые коэффициенты. При этом предполагается существование такой области $\Omega\subset\mathbb{C}^N$, в которой все ряды u_m сходятся одновременно, а ее пересечение с дополнением к Ω_0 непусто, т.е. $\Omega\cap(\mathbb{C}^N\backslash\Omega_0)\neq\varnothing$. Отметим, что представления вида (1.10) являются обобщением классических формул аналитического продолжения функции Гаусса одного переменного на случай двух переменных, а фигурирующие в (1.10) функции $u_m(z_1,z_2)$ играют для систем (1.9) ту же роль, что и канонические решения Куммера для гипергеометрического уравнения, которому удовлетворяет функция Гаусса; результаты теории функции Гаусса изложены, например, в [1], [15], [17], [20].

Сформулированная задача о построении формул (1.10) является частью общей проблемы аналитического продолжения рядов Горна N переменных. Для конкретных представителей семейства гипергеометрических функций двух и большего числа переменных вопрос о построении формул продолжения рассматривался, например, в [1], [4], [17], [21]–[24], где были получены частные, но содержательные результаты.

Важным этапом в решении общей проблемы аналитического продолжения функций Горна произвольного числа переменных являются результаты статей [7], [25]–[27]. В этих работах была решена проблема продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$, зависящей от $N \geq 2$ переменных $(z_1,\ldots,z_N) \in \mathbb{C}^N$, которая в единичном поликруге $\mathbb{U}^N = \{|z_j| < 1,\ j = \overline{1,N}\}$ представима следующим степенны́м рядом:

$$F_D^{(N)}(a_1,\ldots,a_N;b,c;z_1,\ldots,z_N) := \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{|\mathbf{k}|}(a_1)_{k_1}\cdots(a_N)_{k_N}}{(c)_{\mathbf{k}}k_1!\cdots k_N!} z_1^{k_1}\cdots z_N^{k_N}; \tag{1.11}$$

здесь $|\mathbf{k}| = \sum_{s=1}^{N} k_s$, $a_1,\ldots,a_N$, b и c – комплексные параметры ($c \neq 0,-1,-2,\ldots$). Отметим, что ряд (1.11) принадлежит к классу Горна гипергеометрических рядов N переменных (см. [7]). В [25], [7] при произвольном N найдены формулы аналитического продолжения функции $F_D^{(N)}$ в окрестности точек

$$(\underbrace{1,\ldots,1}_{p},\ \underbrace{\infty,\ldots,\infty}_{q},\ \underbrace{0,\ldots,0}_{N-p-q})$$

(для любых $p,q = \overline{0,N}$, $N-p-q \geq 0$), а в работах [26], [27] построены формулы продолжения $F_D^{(N)}$ в окрестность особых гиперплоскостей $\{z_j = z_k\}$ и любых их пересечений (также при произвольном N).

В [28], являющейся развитием исследований [7], [25], предложен весьма общий подход, позволяющий находить формулы аналитического продолжения рядов Горна, зависящих от произвольного числа переменных $z_1,\ldots,z_N$. В настоящей работе результаты [28] применены для случая рядов Горна (1.1) двух переменных, важного как с теоретической, так и с прикладной точек зрения.

Основным результатом следующего разд. 1 является теорема 1, устанавливающая в явном виде формулу продолжения ряда (1.1) по одному из двух переменных z_1 или z_2. Такая формула дает представления функции $F^{(M)}(z_1,z_2)$ вне области сходимости ряда (1.1) в виде линейной комбинации конечного числа других рядов Горна двух новых переменных w_1, w_2, одно из которых равно $w_1 = 1/z_1$ (или $w_1 = 1/z_2$), а второе имеет вид $w_2 = z_1^{\mu}z_2^{\nu}$, где μ и ν ($\nu \neq 0$) – целые числа, выражающиеся через элементы матрицы (1.2). Аналитическое продолжение по двум переменным z_1, z_2 строится путем повторного (возможно, неоднократного) применения теоремы 1 для продолжения по переменному w_2 и новым переменным, которые возникают в результате такого продолжения.

Указанным способом можно, в частности, построить формулы аналитического продолжения всех гипергеометрических рядов второго порядка из списка Горна. В разд. 3 и 4 в качестве примера приложения результатов разд. 2 построены формулы продолжения рядов H_3 и H_4 из этого списка (см. [1], [15], [16]), которые определяются равенствами

$$H_3(a,b,c;z_1,z_2) = \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty} \frac{(a)_{2k_1+k_2}(b)_{k_2}}{(c)_{k_1+k_2}k_1!k_2!} z_1^{k_1}z_2^{k_2}, \tag{1.12}$$

$$H_4(a,b,c,d;z_1,z_2) = \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty} \frac{(a)_{2k_1+k_2}(b)_{k_2}}{(c)_{k_1}(d)_{k_2}k_1!k_2!} z_1^{k_1}z_2^{k_2} \tag{1.13}$$

(здесь использованы традиционные обозначения, см. [15]). Область сходимости ряда H_3 имеет вид

$$\left\{|z_1| < \frac{1}{4}, |z_2| < \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} - |z_1|\right)^{1/2}\right\}, \tag{1.14}$$

а ряда H_4 – следующий вид:

$$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : 2|z_1|^{1/2} + |z_2| < 1\}. \tag{1.15}$$

Отметим, что различные аспекты теории функции Горна двух переменных активно развиваются в настоящее время (см., например, исследования авторов работ [29], [30]).

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ДВОЙНОГО РЯДА ГОРНА

2.1. Формулы продолжения по одному переменному

В настоящем разделе представлена теорема, которая дает формулу аналитического продолжения рядов (1.1) по одному из двух переменных. Далее потребуются следующие обозначения:

$$I^0(\mathfrak{L}) := \{j : \alpha_j = 0\}, \quad I^-(\mathfrak{L}) := \{j : \alpha_j < 0\}, \quad I^+(\mathfrak{L}) := \{j : \alpha_j > 0\}, \tag{2.1}$$

т.е., например, $I^-(\mathfrak{L})$ – это совокупность номеров j, которым соответствуют отрицательные элементы первой строки $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_M\}$ матрицы $\mathfrak{L}$ (см. (1.2)), с помощью которой определяется ряд (1.1). Для краткости будем опускать аргумент $\mathfrak{L}$ в обозначениях множеств (2.1), писать I^0, I^-, I^+. Определим также числа $\sigma_{j,\mathbf{r}}^{(s)}$, выражающиеся через элементы матрицы $\mathfrak{L}$ и параметры $g_1, \ldots, g_M$ ряда (1.1) по формулам

$$\sigma_{j,\mathbf{r}}^{(s)} := \begin{cases} g_j + \dfrac{\alpha_j}{\alpha_s}(1 - g_s) + \dfrac{1}{\alpha_s}[\alpha_j r_1 - \omega_j^{(s)} r_2], & j \neq s, \\ 1 + \alpha_s^{-1}(1 - g_s + r_1 - \beta_s r_2), & j = s, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\omega_j^{(s)} := \alpha_j \beta_s - \alpha_s \beta_j, \tag{2.3}$$

где $s \in I^-$, $j = \overline{1, M}$, а компоненты вектора $\mathbf{r} := (r_1, r_2)$ – целые числа, принимающие значения в диапазоне $r_j = \overline{0, |\alpha_s| - 1}$, $j = 1, 2$.

Введем следующий ряд:

$$\mathcal{F}^{(M)}(\mathfrak{M}, \boldsymbol{\varkappa}; \mathbf{h}, \mathbf{r}; w_1, w_2) := \sum_{k_1, k_2 = 0}^{\infty} \Xi(k_1, k_2) w_1^{k_1} w_2^{k_2}, \tag{2.4}$$

коэффициенты которого имеют вид

$$\Xi(k_1, k_2) := \frac{1}{(r_1 + \varkappa k_1)!(r_2 + \varkappa k_2)!} \prod_{j=1}^{M} \frac{\Gamma(h_j)}{\Gamma(h_j + \lambda_j k_1 + \omega_j k_2)}; \tag{2.5}$$

здесь $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ – комплексные переменные,

$$\mathbf{h} := (h_1, h_2, \ldots, h_M) \in \mathbb{C}^M \tag{2.6}$$

есть комплексный векторный параметр, $\mathbf{r} = (r_1, r_2) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$, $\varkappa \geq 1$ – целочисленные параметры, а целые числа $\lambda_j, \omega_j \in \mathbb{Z}$ образуют $(2 \times M)$-матрицу

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_M \\ \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_M \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

причем

$$\sum\nolimits_{j=1}^{M} \lambda_j + \varkappa = 0, \quad \sum\nolimits_{j=1}^{M} \omega_j + \varkappa = 0.$$

Следующее утверждение, вытекающее из [28, теорема 2.3], позволяет аналитически продолжить ряд (1.1) по переменному z_1.

Теорема 1. *Предположим, что параметры ряда* (1.1) *таковы, что ни одно из следующих чисел не является неположительным целым*:

$$(1 - \sigma_{j,\mathbf{r}}^{(s)}) \notin \mathbb{Z}^-, \quad \mathbf{r} = (r_1, r_2), \quad r_k = \overline{0, |\alpha_s| - 1}, \quad k = 1, 2, \quad s, j \in I^-, \tag{2.8}$$

где $\sigma_{j,r}^{(s)}$ *определены в* (2.2). *Тогда для гипергеометрического ряда* (1.1) *справедлива следующая формула аналитического продолжения*:

$$F^{(M)}(\mathfrak{L};\mathbf{g};z_1,z_2)=\sum_{s\in I^-}\sum_{r_1,r_2=0}^{|\alpha_s|-1}B_{s,\mathbf{r}}(\mathfrak{L},\mathbf{g})\mathcal{U}_{s,\mathbf{r}}(\mathfrak{L};\mathbf{g};z_1,z_2);\tag{2.9}$$

здесь функции $\mathcal{U}_{s,\mathbf{r}}(\mathfrak{L};\mathbf{g};z_1,z_2)$ *имеют вид*

$$\mathcal{U}_{s,\mathbf{r}}(\mathfrak{L};\mathbf{g};z_1,z_2)=((\varepsilon_1 z_1)^{-1+g_s-r_1}(\varepsilon_{2,s}w_{2,s})^{r_2})^{-1/\alpha_s}\mathcal{F}^{(M)}(\mathfrak{M}^{(s)},|\alpha_s|;\mathbf{h}_{s,\mathbf{r}},\mathbf{r};w_1^{(s)}(z_1,z_2),w_2^{(s)}(z_1,z_2)),\tag{2.10}$$

где новые переменные $w_1^{(s)}$, $w_2^{(s)}$ *связаны с* z_1, z_2 *равенствами*

$$w_1^{(s)}(z_1,z_2)=\frac{1}{z_1},\quad w_2^{(s)}(z_1,z_2)=z_1^{\beta_s}z_2^{|\alpha_s|},\tag{2.11}$$

функция $\mathcal{F}^{(M)}$ *представляет собой ряд Горна* (1.1), (1.2), *а* $\mathfrak{M}^{(s)}=\mathfrak{M}^{(s)}(\mathfrak{L})$ – *следующая целочисленная матрица*:

$$\mathfrak{M}^{(s)}=\begin{pmatrix}-\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{s-1} & -1 & -\alpha_{s+1} & \dots & -\alpha_M\\ \omega_1^{(s)} & \omega_2^{(s)} & \dots & \omega_{s-1}^{(s)} & \beta_s & \omega_{s+1}^{(s)} & \dots & \omega_M^{(s)}\end{pmatrix};\tag{2.12}$$

здесь числа $\omega_j^{(s)}=\alpha_j\beta_s-\alpha_s\beta_j$ *определены в* (2.3), α_j, β_j – *элементы* (1.2) *матрицы* $\mathfrak{L}$. *Набор параметров в* (2.10) *имеет вид* $\mathbf{h}_{s,\mathbf{r}}:=(\sigma_{1,\mathbf{r}}^{(s)},\dots,\sigma_{M,\mathbf{r}}^{(s)})$, *где* $\sigma_{j,\mathbf{r}}^{(s)}$ *заданы в* (2.2); *множители* ε_1, $\varepsilon_{2,s}$ *определяются соотношениями*

$$\varepsilon_1:=(-1)^{\theta_1},\quad \theta_1:=1+\sum_{s\in I^-}|\alpha_s|,\quad \varepsilon_{2,s}:=(-1)^{\theta_{2,s}},\quad \theta_{2,s}:=\beta_s+\sum_{j\in I^-\setminus\{s\}}\omega_j^{(s)}.\tag{2.13}$$

Коэффициенты $B_{s,\mathbf{r}}$ *в представлении* (2.9) *имеют вид*

$$B_{s,\mathbf{r}}(\mathfrak{L},\mathbf{g})=\frac{(-1)^{r_1}}{|\alpha_s|}\left(\prod_{j\in I^0\cup I^+}\frac{\Gamma(g_j)}{\Gamma(\sigma_{s,\mathbf{r}}^{(j)})}\right)\prod_{j\in I^-}\frac{\Gamma(1-\sigma_{j,\mathbf{r}}^{(s)})}{\Gamma(1-g_j)},\tag{2.14}$$

где множества индексов $I^0(\mathfrak{L})$, $I^+(\mathfrak{L})$, $I^-(\mathfrak{L})$ *определены в* (2.1). *Функции* $\mathcal{U}_{s,\mathbf{r}}(\mathfrak{L};\mathbf{g};z_1,z_2)$, *заданные равенствами* (2.10), *являются линейно независимыми решениями системы* (1.9), (1.5), (1.6).

Если требуется построить формулу продолжения по переменному z_2, то для этого, очевидно, достаточно поменять местами первую и вторую строки матрицы $\mathfrak{L}$, переобозначить $\tilde{z}_1=z_2$, $\tilde{z}_2=z_1$, а затем воспользоваться утверждением теоремы 1. Область сходимости представления (2.9) может быть найдена путем применения результатов [15, п. 5.7.2] к каждому из рядов (2.10) с последующим построением пересечения областей их сходимости. Вид таких областей будет продемонстрирован на примере рядов Горна H_3 и H_4 в разд. 3, 4.

В разд. 3, 4 для нахождения аналитического продолжения рядов (1.12), (1.13) с помощью теоремы 1 будем использовать также следующие обозначения для функций (2.10) и коэффициентов (2.14): $\mathcal{U}_{s,(r_1,r_2)}=\mathcal{U}_{s,\mathbf{r}}$, $B_{s,(r_1,r_2)}=B_{s,\mathbf{r}}$.

2.2. Формула аналитического продолжения функции Фокса–Райта и ее приложение к аналитическому продолжению ряда Горна

Мы не останавливаемся на подробном выводе формул аналитического продолжения, которые устанавливает теорема 1, поскольку она является следствием теоремы 2.3 работы [28], для которой в [28] представлено подробное доказательство. Опишем лишь в общих чертах ход рассуждений. Прежде всего отметим, что применяемый подход использует следующий гипергеометрический ряд одного переменного, введенный Ф. Фоксом (см. [31]) и Е.М. Райтом (см. [32]):

$${}_p\mathcal{F}_q(\mathbf{a},\mathbf{m};\mathbf{b},\mathbf{n};z):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1,m_1k)\cdots(a_p,m_pk)}{(b_1,n_1k)\cdots(b_q,n_qk)k!}z^k,\quad |z|<\rho:=\left(\prod_{j=1}^{p}m_j^{-m_j}\right)\prod_{s=1}^{q}n_s^{n_s},\tag{2.15}$$

здесь, $(\cdot,\cdot)$ — символ Похгаммера, т.е., например, $(a_1, m_1k) = (a_1)_{m_1k} = \Gamma(a_1 + m_1k)/\Gamma(a_1)$; напомним также соотношения (1.8). Функция (2.15) зависит от комплексного переменного $z \in \mathbb{C}$, от комплексных параметров $\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_p) \in \mathbb{C}^p$, $\mathbf{b} = (b_1,\dots,b_q) \in \mathbb{C}^q$, а также от неотрицательных целочисленных параметров $\mathbf{m} = (m_1,\dots,m_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $\mathbf{n} = (n_1,\dots,n_q) \in \mathbb{Z}_+^q$, удовлетворяющих условию $m_1 + \dots + m_p - n_1 - \dots - n_q = 1$. Нетрудно увидеть, что если $q = p - 1$ и, кроме того, все числа $m_j = 1$, $j = \overline{1,p}$, и $n_l = 1$, $l = \overline{1,q}$, то ${}_p\mathcal{F}_q$ совпадает с функцией Похгаммера ${}_pF_q$ (см. [15, гл. 4]).

Используя тождество $(a)_{m+n} = (a)_m(a + m)_n$, можно переписать (1.1) в виде

$$F^{(M)}(\mathfrak{L};\mathbf{g};\mathbf{z}) := \sum_{k_2=0}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{M}\frac{1}{(g_j,\beta_jk_2)}\frac{z_2^{k_2}}{k_2!}\sum_{k_1=0}^{\infty}\prod_{j:\alpha_j\neq 0}\frac{1}{(g_j+\beta_jk_2,\alpha_jk_1)}\frac{z_1^{k_1}}{k_1!}\right]. \tag{2.16}$$

С помощью (1.7), (1.8) можно показать, что

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\prod_{j:\alpha_j\neq 0}\frac{1}{(g_j+\beta_jk_2,\alpha_jk_1)}\right)\frac{z_1^{k_1}}{k_1!} = {}_p\mathcal{F}_q(\{1-g_j-k_2\beta_j\}_{j\in I^-},\{|\alpha_j|\}_{j\in I^-};\{g_j+k_2\beta_j\}_{j\in I^+},\{\alpha_j\}_{j\in I^+};(-1)^{\varepsilon}z_1), \tag{2.17}$$

где $\varepsilon := \sum_{s\in I^-}|\alpha_s|$, множества I^- и I^+ определены в (2.1), а ${}_p\mathcal{F}_q$ — это ряд (2.15), где p и q — соответственно число отрицательных и число положительных элементов первой строки $(\alpha_1,\dots,\alpha_M)$ матрицы $\mathfrak{L}$ из (1.2).

Далее, задача заключается в том, чтобы продолжить ряд ${}_p\mathcal{F}_q$, фигурирующий в (2.17). Следуя [28], введем гипергеометрическую функцию

$${}_p\Psi_q(\mathbf{a},\mathbf{m};n_0,r;\mathbf{b},\mathbf{n};z) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1,m_1k)\cdots(a_p,m_pk)}{(b_1,n_1k)\cdots(b_q,n_qk)(n_0k+r)!}z^k. \tag{2.18}$$

Кроме того, определим векторы

$$\mathbf{c}_{\alpha,r} := \left(1-c_{\alpha,r}^{(1)},\dots,1-c_{\alpha,r}^{(q)},\frac{a_\alpha+r}{m_\alpha}\right),\quad c_{\alpha,r}^{(j)} := \frac{m_\alpha b_j - n_ja_\alpha - n_jr}{m_\alpha},\quad j=\overline{1,q}, \tag{2.19}$$

$$\mathbf{d}_{\alpha,r} := (1-d_{\alpha,r}^{(1)},\dots,1-d_{\alpha,r}^{(\alpha-1)},1-d_{\alpha,r}^{(\alpha+1)},\dots,1-d_{\alpha,r}^{(p)}), \tag{2.20}$$

где числа $d_{\alpha,r}^{(j)}$ имеют вид

$$d_{\alpha,r}^{(j)} := \frac{m_\alpha a_j - m_ja_\alpha - m_jr}{m_\alpha},\quad j=\overline{1,q}\setminus\{\alpha\}, \tag{2.21}$$

причем $\alpha = \overline{1,p}$, $r = \overline{0,m_\alpha - 1}$, кроме того, введем целочисленные векторы

$$\mathbf{n}' := (n_1,\dots,n_q,1),\quad \mathbf{m}'_\alpha := (m_1,\dots,m_{\alpha-1},m_{\alpha+1},\dots,m_p). \tag{2.22}$$

Следующее утверждение, доказанное в [28], устанавливает формулу аналитического продолжения функции ${}_p\mathcal{F}_q$, определенной рядом (2.15) в круге $\{|z| < \rho\}$.

Теорема 2. *Если параметры функции* ${}_p\mathcal{F}_q(\mathbf{a},\mathbf{m};\mathbf{b},\mathbf{n};z)$ *таковы, что ни одно из чисел* $d_{\alpha,r}^{(j)}$*, заданных равенствами* (36)*, не является неположительным целым, т.е.*

$$d_{\alpha,r}^{(j)} \notin \mathbb{Z}^-,\quad \alpha,j=\overline{1,p},\quad r=\overline{0,m_\alpha-1},$$

то аналитическое продолжение функции ${}_p\mathcal{F}_q$*, определенной с помощью ряда* (30) *в область*

$$\mathbb{D}_\rho := \{z : |z| > \rho|, \arg(-z)| < \pi\},\quad \rho = \left(\prod_{j=1}^{p}m_j^{-m_j}\right)\prod_{s=1}^{q}n_s^{n_s},$$

дается формулой

$$ {}_p\mathcal{F}_q(\mathbf{a},\mathbf{m};\mathbf{b},\mathbf{n};z) = \sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{r=0}^{m_\alpha-1} A_{\alpha,r}u_{\alpha,r}(\mathbf{a},\mathbf{m};\mathbf{b},\mathbf{n};z), \tag{2.23}$$

где функции $u_{\alpha,r}$ имеют вид

$$ u_{\alpha,r}(\mathbf{a},\mathbf{m};\mathbf{b},\mathbf{n};z) = (-z)^{-(a_\alpha+r)/m_\alpha}\,{}_{q+1}\Psi_p(\mathbf{c}_{r,\alpha},\mathbf{n}';m_\alpha,r;\mathbf{d}_{r,\alpha},\mathbf{m}'_\alpha;1/z), \tag{2.24}$$

а коэффициенты $A_{\alpha,r}$ — следующий вид:

$$ A_{\alpha,r} = (-1)^r\frac{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j)\prod_{j=1,j\neq\alpha}^{p}\Gamma(d_{\alpha,r}^{(j)})}{m_\alpha\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j)\prod_{j=1}^{q}\Gamma(c_{\alpha,r}^{(j)})}\Gamma\left(\frac{a_\alpha+r}{m_\alpha}\right),\quad \alpha=\overline{1,p},\quad r=\overline{0,m_\alpha-1}. \tag{2.25}$$

Функции $u_{\alpha,r}$ из (2.24) *определены с помощью рядов* (2.18); *в формулах* (2.24) *и* (2.25) *фигурируют векторы $\mathbf{c}_{\alpha,r}$, $\mathbf{n}'$, $\mathbf{d}_{\alpha,r}$ и $\mathbf{m}'_\alpha$, а также числа $c_{\alpha,r}^{(j)}$ и $d_{\alpha,r}^{(j)}$, заданные равенствами* (2.19)–(2.21).

Выполняя аналитическое продолжение функции ${}_p\mathcal{F}_q$, фигурирующей в (2.17), по формулам (2.23)–(2.25) и подставляя результат в (2.16), после некоторых вспомогательных преобразований приходим к формулам (2.9)–(2.14), которые устанавливает теорема 1 для функции (1.1). Завершающее теорему 1 утвержение о том, что функции $\mathcal{U}_{s,\mathbf{r}}(\mathfrak{L};\mathbf{g};z_1,z_2)$, заданные равенствами (2.10), являются линейно независимыми решениями системы (1.9), (1.5), (1.6), устанавливается непосредственной проверкой.

2.3. Аналитическое продолжение по двум переменным z_1 и z_2

Формулы продолжения по двум переменным z_1 и z_2 могут быть получены путем последовательного применения теоремы 1 к ряду (1.1), а также рядам Горна двух переменных, получающихся после такого применения. Обратим внимание на то, что в результате аналитического продолжения по формуле (2.9) возникают ряды (2.4), (2.5), принадлежащие классу Горна, но отличающиеся от исходного ряда (1.1), для которого сформулировано утверждение теоремы 1. Поэтому, если необходимо повторное применение теоремы 1, то, вообще говоря, вначале следует привести ряды (2.4), (2.5) к виду (1.1). Для этого воспользуемся соотношением

$$ (r+\varkappa k)! = (2\pi)^{(1-\varkappa)/2}\varkappa^{\varkappa k+r+1/2}k!\prod_{s=0,s\neq\varkappa-r-1}^{\varkappa-1}\Gamma\left(\frac{1+r+s}{\varkappa}+k\right), \tag{2.26}$$

которое вытекает из равенства $(\varkappa k+r)! = \Gamma(\varkappa k+r+1)$ и тождества Гаусса–Лежандра для гамма-функции (см. [15, п. 2.1]). Используя равенство (2.26), преобразуем коэффициент (2.5) к виду

$$ \begin{gathered} \Xi(k_1,k_2) = \frac{(2\pi)^{\varkappa-1}\varkappa^{\varkappa(k_1+k_2)-r_1-r_2-1}}{\prod_{s=0}^{\varkappa-1}[\Gamma(\delta_{r_1,s})\Gamma(\delta_{r_2,s})]k_1!k_2!}\left[\prod_{s=0,s\neq\varkappa-r_1-1}^{\varkappa-1}\frac{\Gamma(\delta_{r_1,s})}{\Gamma(\delta_{r_1,s}+k_1)}\right]\times \\ \times\left[\prod_{s=0,s\neq\varkappa-r_2-1}^{\varkappa-1}\frac{\Gamma(\delta_{r_2,s})}{\Gamma(\delta_{r_2,s}+k_2)}\right]\prod_{j=1}^{M}\frac{\Gamma(h_j)}{\Gamma(h_j+\lambda_jk_1+\omega_jk_2)}, \end{gathered} \tag{2.27}$$

где $\delta_{r,s} := (1+r+s)/\varkappa$. Подставляя (2.27) в (2.5), получаем следующее выражение ряда $\mathcal{F}^{(M)}$ через исходный ряд Горна (1.1):

$$ \mathcal{F}^{(M)}(\mathfrak{M},\varkappa;\mathbf{h},\mathbf{r};\mathbf{w}) = \mathcal{K}(\varkappa,\mathbf{r})F^{(M+2\varkappa-2)}(\mathfrak{N};\mathbf{h}';\varkappa^{-\varkappa}w_1,\varkappa^{-\varkappa}w_2), \tag{2.28}$$

где $2\times(M+2\varkappa-2)$-матрица $\mathfrak{N}$, вектор параметров $\mathbf{h}'$ длины $M+2\varkappa-2$ и множитель $\mathcal{K}$ определяются по формулам

$$ \mathfrak{N} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_M \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_M \end{pmatrix}, \tag{2.29}$$

$$h' = (\delta_{r_1,0},\ldots,\delta_{r_1,\varkappa-r_1-2},\delta_{r_1,\varkappa-r_1},\ldots,\delta_{r_1,\varkappa-1},\delta_{r_2,0},\ldots,\delta_{r_2,\varkappa-r_2-2},\delta_{r_2,\varkappa-r_2},\ldots,\delta_{r_2,\varkappa-1},h_1,\ldots,h_M), \tag{2.30}$$

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{\varkappa},\mathbf{r}) = (2\pi)^{(\varkappa-1)}\boldsymbol{\varkappa}^{-\varkappa(r_1+r_2)-1}\prod_{s=0}^{\varkappa-1}[\Gamma(\delta_{r_1,s})\Gamma(\delta_{r_2,s})]^{-1}, \quad \delta_{r_j,s} = \frac{1+r_j+s}{\boldsymbol{\varkappa}}, \quad j = 1,2. \tag{2.31}$$

Таким образом, применение соотношений (2.28)–(2.31) к функциям (2.10) дает формулы продолжения рядов (1.1) в терминах рядов того же вида.

В следующих разд. 3 и 4 продемонстрировано применение теоремы 1 для аналитического продолжения гипергеометрических рядов (1.12), (1.13), входящих в список Горна (см. [1], [15], [16]).

3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ РЯДА ГОРНА H_3

3.1. Аналитическое продолжение ряда H_3 в область больших по модулю значений переменного z_1

Используя второе равенство (1.7) для символа Похгаммера, перепишем (1.12) в следующем виде:

$$H_3(a,b,c;z_1,z_2) = \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-a-2k_1-k_2)}\frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1-b-k_2)}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+k_1+k_2)}\frac{z_1^{k_1}z_2^{k_2}}{k_1!k_2!}. \tag{3.1}$$

Сравнивая (1.1) и (3.1), находим

$$H_3(a,b,c;z_1,z_2) = F^{(3)}(\mathfrak{L};\mathbf{g};z_1,z_2) = \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{3}\frac{\Gamma(g_j)}{\Gamma(g_j+\alpha_j k_1+\beta_j k_2)}\frac{z_1^{k_1}z_2^{k_2}}{k_1!k_2!}, \tag{3.2}$$

где (2×3) матрица $\mathfrak{L}$ и вектор параметров $\mathbf{g}$ имеют вид

$$\mathfrak{L} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

$$\mathbf{g} = (g_1,g_2,g_3) = (1-a,1-b,c). \tag{3.4}$$

Согласно формуле (2.1), находим подмножества индексов элементов первой строки матрицы (3.3):

$$I^0(\mathfrak{L}) := \{s : \alpha_s = 0\} = \{2\}, \quad I^-(\mathfrak{L}) := \{s : \alpha_s < 0\} = \{1\}, \quad I^+(\mathfrak{L}) := \{s : \alpha_s > 0\} = \{3\}. \tag{3.5}$$

Поскольку множество I^- в (3.5) состоит из одного элемента $s = 1$, а соответствующий элемент матрицы $\mathfrak{L}$ равен $\alpha_1 = -2$, то в формуле продолжения (2.9) для функции H_3 индекс s принимает лишь одно значение $s = 1$, а каждый из двух индексов r_1 и r_2 может быть равным 0 или $|\alpha_1| - 1 = 1$. Таким образом, в формуле (2.9), соответствующей ряду H_3, заданному соотношениями (3.2)–(3.4), будут фигурировать четыре слагаемых вида $B_{1,(r_1,r_2)}\mathcal{U}_{1,(r_1,r_2)}$.

Перейдем к нахождению $B_{1,(r_1,r_2)}$ и $\mathcal{U}_{1,(r_1,r_2)}$. Прежде всего, подставляя (3.3), (3.4) в (2.2), (2.3), находим

$$\omega_2^{(1)} = -2, \quad \omega_3^{(1)} = 1, \tag{3.6}$$

$$\sigma_{1,(0,0)}^{(1)} = 1-\frac{a}{2}, \quad \sigma_{2,(0,0)}^{(1)} = 1-b, \quad \sigma_{3,(0,0)}^{(1)} = c-\frac{a}{2}, \tag{3.7}$$

$$\sigma_{1,(1,0)}^{(1)} = \frac{1-a}{2}, \quad \sigma_{2,(1,0)}^{(1)} = 1-b, \quad \sigma_{3,(1,0)}^{(1)} = c-\frac{a+1}{2}, \tag{3.8}$$

$$\sigma_{1,(0,1)}^{(1)} = \frac{1-a}{2}, \quad \sigma_{2,(0,1)}^{(1)} = -b, \quad \sigma_{3,(0,1)}^{(1)} = c+\frac{1-a}{2}, \tag{3.9}$$

$$\sigma_{1,(1,1)}^{(1)} = \frac{-a}{2}, \quad \sigma_{2,(1,1)}^{(1)} = -b, \quad \sigma_{3,(1,1)}^{(1)} = c-\frac{a}{2}. \tag{3.10}$$

Подставляя (3.4), (3.5) и (3.7)–(3.10) в (2.14), получаем выражения для коэффициентов

$$
\begin{aligned}
&B_{1,(0,0)}(\mathfrak{L},\mathbf{g}) = \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{2\Gamma\left(c-\frac{a}{2}\right)\Gamma(a)}, \quad B_{1,(1,0)}(\mathfrak{L},\mathbf{g}) = -\frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(c-\frac{a+1}{2}\right)\Gamma(a)},\\
&B_{1,(0,1)}(\mathfrak{L},\mathbf{g}) = -\frac{b\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{2d\Gamma\left(c+\frac{1-a}{2}\right)\Gamma(a)}, \quad B_{1,(1,1)}(\mathfrak{L},\mathbf{g}) = \frac{b\Gamma(c)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)}{2\Gamma\left(c-\frac{a}{2}\right)\Gamma(a)}.
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Учитывая (3.3), (3.6), находим матрицу $\mathfrak{M}^{(1)}$ по формуле (2.12):

$$
\mathfrak{M}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.12}
$$

Выполняя вычисления по формулам (2.11), получаем выражения для новых переменных через z_1 и z_2:

$$
w_1^{(1)}(z_1,z_2) = \frac{1}{z_1}, \quad w_2^{(1)}(z_1,z_2) = \frac{z_2^2}{z_1}. \tag{3.13}
$$

Подставляя (3.7)–(3.10), (3.12), (3.13) в (2.10), находим следующие представления для функций $\mathcal{U}_{1,(r_1,r_2)}$, $r_1,r_2 = 0,1$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathfrak{L},\mathbf{g},z_1,z_2) = (-z_1)^{-\frac{a}{2}} \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1-\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{a}{2}-k_1-k_2\right)} \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1-b-2k_2)} \times \\
\times \frac{\Gamma\left(c-\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(c-\frac{a}{2}-k_1+k_2\right)} \frac{1}{(2k_1)!(2k_2)!} \frac{1}{z_1^{k_1}} \left(\frac{z_2^2}{z_1}\right)^{k_2},
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}_{1,(1,0)}(\mathfrak{L},\mathbf{g},z_1,z_2) = (-z_1)^{-\frac{a+1}{2}} \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1-a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-a}{2}-k_1-k_2\right)} \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1-b-2k_2)} \times \\
\times \frac{\Gamma\left(c-\frac{1+a}{2}\right)}{\Gamma\left(c-\frac{1+a}{2}-k_1+k_2\right)} \frac{1}{(2k_1+1)!(2k_2)!} \frac{1}{z_1^{k_1}} \left(\frac{z_2^2}{z_1}\right)^{k_2},
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}_{1,(0,1)}(\mathfrak{L},\mathbf{g},z_1,z_2) = (-z_1)^{-\frac{a+1}{2}} z_2 \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1-a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-a}{2}-k_1-k_2\right)} \frac{\Gamma(-b)}{\Gamma(-b-2k_2)} \times \\
\times \frac{\Gamma\left(c+\frac{1-a}{2}\right)}{\Gamma\left(c+\frac{1-a}{2}-k_1+k_2\right)} \frac{1}{(2k_1)!(2k_2+1)!} \frac{1}{z_1^{k_1}} \left(\frac{z_2^2}{z_1}\right)^{k_2},
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

$$\begin{gathered}\mathcal{U}_{1,(1,1)}(\mathfrak{L},\mathbf{g},z_1,z_2)=(-z_1)^{-\frac{a+2}{2}}z_2\sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{-a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-a}{2}-k_1-k_2\right)}\frac{\Gamma(-b)}{\Gamma(-b-2k_2)}\times\\ \times\frac{\Gamma\left(c-\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(c-\frac{a}{2}-k_1+k_2\right)}\frac{1}{(2k_1+1)!(2k_2+1)!}\frac{1}{z_1^{k_1}}\left(\frac{z_2^2}{z_1}\right)^{k_2}.\end{gathered}\tag{3.17}$$

Преобразуя коэффициенты рядов (3.14)–(3.17) с помощью равенств (1.7) для символа Похгаммера, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *Аналитическое продолжение ряда Горна* H_3, *определенного в области* (1.14) *равенством* (1.12), *в область*

$$\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2:|z_1|>\frac{1}{4},\ |z_2|(1+|z_2|)<|z_1|,\ |\arg(-z_1)|<\pi\}\tag{3.18}$$

дается формулой

$$\begin{gathered}H_3(a,b,c;z_1,z_2)=\frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{2\Gamma\left(c-\frac{a}{2}\right)\Gamma(a)}\mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathfrak{L},\mathbf{g},z_1,z_2)-\frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(c-\frac{a+1}{2}\right)\Gamma(a)}\mathcal{U}_{1,(1,0)}(\mathfrak{L},\mathbf{g},z_1,z_2)-\\ -\frac{b\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)}{2\Gamma\left(c+\frac{1-a}{2}\right)\Gamma(a)}\mathcal{U}_{1,(0,1)}(\mathfrak{L},\mathbf{g},z_1,z_2)+\frac{b\Gamma(c)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)}{2\Gamma\left(c-\frac{a}{2}\right)\Gamma(a)}\mathcal{U}_{1,(1,1)}(\mathfrak{L},\mathbf{g},z_1,z_2),\end{gathered}\tag{3.19}$$

где функции $\mathcal{U}_{1,(r_1,r_2)}$ *имеют следующий вид*:

$$\mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathfrak{L},\mathbf{g},z_1,z_2)=(-z_1)^{-\frac{a}{2}}\sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{a}{2}\right)_{k_1+k_2}(b)_{2k_2}\left(1-c+\frac{a}{2}\right)_{k_1-k_2}}{(2k_1)!(2k_2)!}\frac{1}{z_1^{k_1}}\left(\frac{z_2^2}{z_1}\right)^{k_2},\tag{3.20}$$

$$\mathcal{U}_{1,(1,0)}(\mathfrak{L},\mathbf{g},z_1,z_2)=(-z_1)^{-\frac{a+1}{2}}\sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1+a}{2}\right)_{k_1+k_2}(b)_{2k_2}\left(\frac{3}{2}-c+\frac{a}{2}\right)_{k_1-k_2}}{(2k_1+1)!(2k_2)!}\frac{1}{z_1^{k_1}}\left(\frac{z_2^2}{z_1}\right)^{k_2},\tag{3.21}$$

$$\mathcal{U}_{1,(0,1)}(\mathfrak{L},\mathbf{g},z_1,z_2)=(-z_1)^{-\frac{a+1}{2}}z_2\sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1+a}{2}\right)_{k_1+k_2}(1+b)_{2k_2}\left(\frac{1+a}{2}-c\right)_{k_1-k_2}}{(2k_1)!(2k_2+1)!}\frac{1}{z_1^{k_1}}\left(\frac{z_2^2}{z_1}\right)^{k_2},\tag{3.22}$$

$$\mathcal{U}_{1,(1,1)}(\mathfrak{L},\mathbf{g},z_1,z_2)=(-z_1)^{-\frac{a+2}{2}}z_2\sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{a}{2}\right)_{k_1+k_2}(1+b)_{k_2}\left(1-c+\frac{a}{2}\right)_{k_1-k_2}}{(2k_1+1)!(2k_2+1)!}\frac{1}{z_1^{k_1}}\left(\frac{z_2^2}{z_1}\right)^{k_2}.\tag{3.23}$$

Ряды (3.20)–(3.23) *в области* (3.18) *являются линейно независимыми решениями системы уравнений с частными производными* (1.9), *где дифференциальные операторы* $\mathcal{Q}_j$ *и* $\mathcal{P}_j$, $j=1,2$, *имеют вид*

$$\begin{gathered}\mathcal{P}_1=\left(a+2z_1\frac{\partial}{\partial z_1}+z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\left(a+2z_1\frac{\partial}{\partial z_1}+z_2\frac{\partial}{\partial z_2}+1\right),\quad \mathcal{Q}_1=\left(c+z_1\frac{\partial}{\partial z_1}+z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\left(1+z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\right),\\ \mathcal{P}_2=\left(a+2z_1\frac{\partial}{\partial z_1}+z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\left(b+z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right),\quad \mathcal{Q}_2=\left(c+z_1\frac{\partial}{\partial z_1}+z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\left(1+z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right).\end{gathered}\tag{3.24}$$

Вид области сходимости (3.18) устанавливается с помощью метода, изложенного в [15, п. 5.7.2]. Остальные утверждения теоремы 3 являются следствием теоремы 1.

Теорема 3 дает представление для ряда Горна H_3 в области (3.18), где обе переменные z_1 и z_2 могут принимать большие по модулю значения. Однако в этой области модуль переменного $|z_2|$

меньше, чем $|z_1|$. Для того чтобы снять такое ограничение, в следующем п. 3.2 теорема 1 применена для продолжения по переменному z_2.

3.2. Аналитическое продолжение ряда H_3 в область больших по модулю значений переменного z_2

Для того чтобы продолжить ряд (3.2) по переменному z_2, перепишем его в виде

$$H_3(a,b,c;z_1,z_2) = F^{(3)}(\mathfrak{L}';\mathbf{g};z_2,z_1) = \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{3}\frac{\Gamma(g_j)}{\Gamma(g_j+\beta_j k_1+\alpha_j k_2)}\frac{z_2^{k_1}z_1^{k_2}}{k_1!k_2!}, \tag{3.25}$$

где вектор параметров $\mathbf{g}$ дается формулой (3.4), а матрица $\mathfrak{L}'$ получена из $\mathfrak{L}$ перестановкой строк:

$$\mathfrak{L}' = \begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

Согласно формуле (2.1), находим множества индексов

$$I^0(\mathfrak{L}') := \{s : \alpha_s = 0\} = \varnothing, \quad I^-(\mathfrak{L}') := \{s : \alpha_s < 0\} = \{1,2\}, \quad I^+(\mathfrak{L}') := \{s : \alpha_s > 0\} = \{3\}. \tag{3.27}$$

Заметим, что множество I^- в (3.27) состоит из двух элементов $s = 1$ и $s = 2$, а соответствующие им элементы первой строки матрицы (3.26) равны $\alpha_1 = -1$ и $\alpha_2 = -1$. Поэтому в формуле продолжения (2.9) индекс s принимает два значения $s = 1$ и $s = 2$, а каждый из двух индексов r_1 и r_2 – только одно значение 0, поскольку $|\alpha_s| - 1 = 0$, $s = 1,2$. Таким образом, в формуле (2.9), соответствующей ряду (3.25), (3.26), будут фигурировать два слагаемых вида $B_{s,(0,0)}\mathcal{U}_{s,(0,0)}$.

Перейдем к нахождению $B_{s,(0,0)}$ и $\mathcal{U}_{s,(0,0)}$. Прежде всего, подставляя (3.4), (3.26) в (2.2), (2.3), находим $\omega_2^{(1)} = 2$, $\omega_3^{(1)} = -1$, $\omega_1^{(2)} = -2$, $\omega_3^{(2)} = 1$,

$$\sigma_{1,(0,0)}^{(1)} = 1-a, \quad \sigma_{2,(0,0)}^{(1)} = 1+a-b, \quad \sigma_{3,(0,0)}^{(1)} = c-a, \tag{3.28}$$

$$\sigma_{1,(0,0)}^{(2)} = 1-a+b, \quad \sigma_{2,(0,0)}^{(2)} = 1-b, \quad \sigma_{3,(0,0)}^{(2)} = c-b. \tag{3.29}$$

Подставляя (3.4), (3.27) и (3.28), (3.29) в (2.14), получаем выражения для коэффициентов

$$B_{1,(0,0)}(\mathfrak{L}',\mathbf{g}) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)}, \quad B_{2,(0,0)}(\mathfrak{L}',\mathbf{g}) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(a)}. \tag{3.30}$$

Учитывая (4.26), (4.29), (4.30), находим матрицы $\mathfrak{M}^{(s)}$, $s = 1,2$, по формуле (2.12) в виде

$$\mathfrak{M}^{(1)} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix}, \quad \mathfrak{M}^{(2)} = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

Согласно (2.13), имеют место равенства $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_{2,1} = 1$, $\varepsilon_{2,2} = 1$. Выполняя вычисления по формулам (2.11), получаем

$$w_1^{(1)}(z_1,z_2) = \frac{1}{z_2}, \quad w_2^{(1)}(z_1,z_2) = \frac{z_1}{z_2^2}; \quad w_1^{(2)}(z_1,z_2) = \frac{1}{z_2}, \quad w_2^{(2)}(z_1,z_2) = z_1. \tag{3.32}$$

Поставляя (3.28)–(3.32) в (2.9), (2.10), приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. *Если параметры ряда Горна H_3, определенного в области* (1.14) *равенством* (1.12), *таковы, что разность $a-b$ не является целым числом, то аналитическое продолжение H_3 в область*

$$\left\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2 : |z_1| < \frac{1}{4},\ |z_2| > \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}+|z_1|\right)^{1/2},\ |\arg(-z_2)| < \pi\right\} \tag{3.33}$$

дается формулой

$$H_3(a,b,c;z_1,z_2) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)}\mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathfrak{L}',\mathbf{g},z_1,z_2) + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(a)}\mathcal{U}_{2,(0,0)}(\mathfrak{L}',\mathbf{g},z_1,z_2), \tag{3.34}$$

где функции $\mathcal{U}_{1,(0,0)}$ *имеют следующий вид*:

$$\mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathfrak{L}',\mathbf{g},z_1,z_2) = (-z_2)^{-a}\sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}\frac{(a)_{2k_1+k_2}(1+a-c)_{k_1+k_2}}{(1-b+a)_{2k_1+k_2}k_1!k_2!}\left(-\frac{z_1}{z_2^2}\right)^{k_1}\frac{1}{z_2^{k_2}}, \tag{3.35}$$

$$\mathcal{U}_{2,(0,0)}(\mathfrak{L}',\mathbf{g},z_1,z_2) = (-z_2)^{-b}\sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}\frac{(a-b)_{2k_1-k_2}(b)_{k_2}}{(c-b)_{k_1-k_2}k_1!k_2!}z_1^{k_1}\frac{1}{z_2^{k_2}}. \tag{3.36}$$

Ряды (3.35), (3.36) *являются линейно независимыми решениями системы уравнений с частными производными* (1.9), *где дифференциальные операторы* $\mathfrak{Q}_j$ *и* $\mathcal{P}_j$, $j = 1,2$, *даются равенствами* (3.24) *в области* (3.33).

Для того чтобы продолжить ряд Горна в область, где обе переменные z_1 и z_2 могут принимать большие по модулю значения, в следующем п. 3.3 дано применение теоремы 1 к функции (3.36).

3.3. Аналитическое продолжение ряда H_3 в область больших по модулю переменных z_1, z_2

Для того чтобы продолжить ряд (3.36) по переменному z_1, заметим, что

$$\mathcal{U}_{2,(0,0)}(\mathfrak{L}';\mathbf{g};z_1,z_2) = (-z_2)^{-b}F^{(3)}\left(\mathfrak{H};\mathbf{f};z_1,\frac{1}{z_2}\right), \tag{3.37}$$

где матрица $\mathfrak{H}$ и вектор параметров $\mathbf{f}$ имеют вид

$$\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = (1+b-a, c-b, 1-b). \tag{3.38}$$

Согласно формуле (2.21), находим множества индексов

$$I^0(\mathfrak{H}) := \{s : \alpha_s = 0\} = \{3\}, \quad I^-(\mathfrak{H}) := \{s : \alpha_s < 0\} = \{1\}, \quad I^+(\mathfrak{H}) := \{s : \alpha_s > 0\} = \{2\}. \tag{3.39}$$

Заметим, что множество I^- в (3.39) состоит из одного элемента $s = 1$, а соответствующий элемент первой строки матрицы $\mathfrak{H}$, заданной первым равенством (3.38), равен $\alpha_1 = -2$. Поэтому в формуле продолжения (2.29) для функции (3.37) индекс s принимает лишь одно значение $s = 1$, а каждый из двух индексов r_1 и r_2 – два значения 0 и $|\alpha_1| - 1 = 1$. Таким образом, в формуле (2.9), соответствующей ряду (3.37), будут фигурировать четыре слагаемых вида $B_{1,(r_1,r_2)}\mathcal{U}_{s,(r_1,r_2)}$, $r_1, r_2 = 0,1$. Перейдем к их нахождению.

Прежде всего, подставляя (3.38), (3.39) в (2.2), (2.3), находим

$$\omega_2^{(1)} = -1, \quad \omega_3^{(1)} = -2, \tag{3.40}$$

$$\sigma_{1,(0,0)}^{(1)} = 1 + \frac{b-a}{2}, \quad \sigma_{2,(0,0)}^{(1)} = c - \frac{a+b}{2}, \quad \sigma_{3,(0,0)}^{(1)} = 1-b, \tag{3.41}$$

$$\sigma_{1,(1,0)}^{(1)} = \frac{1+b-a}{2}, \quad \sigma_{2,(1,0)}^{(1)} = c - \frac{a+b+1}{2}, \quad \sigma_{3,(1,0)}^{(1)} = 1-b, \tag{3.42}$$

$$\sigma_{1,(0,1)}^{(1)} = \frac{3+b-a}{2}, \quad \sigma_{2,(0,1)}^{(1)} = c - \frac{a+b+1}{2}, \quad \sigma_{3,(0,1)}^{(1)} = -b, \tag{3.43}$$

$$\sigma_{1,(1,1)}^{(1)} = 1 + \frac{b-a}{2}, \quad \sigma_{2,(1,1)}^{(1)} = c - \frac{a+b}{2} - 1, \quad \sigma_{3,(1,1)}^{(1)} = -b. \tag{3.44}$$

Подставляя (3.38), (3.39) и (3.41)–(3.44) в (2.14), находим выражения для коэффициентов

$$
\begin{gathered}
B_{1,(0,0)}(\mathfrak{H},\mathbf{f}) = \frac{\Gamma(c-b)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2\Gamma\left(c-\frac{a+b}{2}\right)\Gamma(a-b)}, \quad B_{1,(1,0)}(\mathfrak{H},\mathbf{f}) = -\frac{\Gamma(c-b)\Gamma\left(\frac{1+a-b}{2}\right)}{2\Gamma\left(c-\frac{a+b+1}{2}\right)\Gamma(a-b)}, \\
B_{1,(0,1)}(\mathfrak{H},\mathbf{f}) = -\frac{b\Gamma(c-b)\Gamma\left(\frac{a-b-1}{2}\right)}{2\Gamma\left(c-\frac{a+b+1}{2}\right)\Gamma(a-b)}, \quad B_{1,(1,1)}(\mathfrak{H},\mathbf{f}) = \frac{b\Gamma(c-b)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2\Gamma\left(c-\frac{a+b}{2}-1\right)\Gamma(a-b)}.
\end{gathered} \tag{3.45}
$$

Учитывая (3.38), (3.40), находим матрицу $\mathfrak{M}^{(1)}$ по формуле (2.12):

$$
\mathfrak{M}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}. \tag{3.46}
$$

Согласно (2.13), имеют место равенства $\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_{1,1} = -1$. Выполняя вычисления по формулам (2.11), находим

$$
w_1^{(1)}(z_1,z_2) = \frac{1}{z_1}, \quad w_2^{(1)}(z_1,z_2) = \frac{z_1}{z_2^2}. \tag{3.47}
$$

Подставив (3.46), (3.47) в (2.9), (2.10), находим формулу продолжения функции $\mathcal{U}_{2,(0,0)}$ из (3.36), согласно теореме 1. Подставляя эту формулу в (3.36) и используя теорему 4, приходим к следующему утверждению.

Теорема 5. *Если параметры ряда Горна H_3, определенного в области* (1.14) *равенством* (1.12), *таковы, что разность $a-b$ не является целым числом, то аналитическое продолжение H_3 в область*

$$
\left\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2 : |z_1| > \frac{1}{4}, |z_2| > \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}+|z_1|\right)^{1/2}, |\arg(-z_j)| < \pi,\ j = 1,2\right\} \tag{3.48}
$$

дается формулой

$$
\begin{gathered}
H_3(a,b,c;z_1,z_2) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)}\mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathfrak{L}',\mathbf{g},z_1,z_2) + \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2\Gamma(a)\Gamma\left(c-\frac{a+b}{2}\right)}\mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathfrak{H},\mathbf{f},z_1,z_2) - \\
-\frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{1+a-b}{2}\right)}{2\Gamma(a)\Gamma\left(c-\frac{a+b+1}{2}\right)}\mathcal{U}_{1,(1,0)}(\mathfrak{H},\mathbf{f},z_1,z_2) + \frac{b\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a-b-1}{2}\right)}{2\Gamma(a)\Gamma\left(c-\frac{a+b+1}{2}\right)}\mathcal{U}_{1,(0,1)}(\mathfrak{H},\mathbf{f},z_1,z_2) - \\
-\frac{b\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2\Gamma(a)\Gamma\left(c-\frac{a+b}{2}-1\right)}\mathcal{U}_{1,(1,1)}(\mathfrak{H},\mathbf{f},z_1,z_2),
\end{gathered} \tag{3.49}
$$

где функции $\mathcal{U}_{1,(0,0)}$, $\mathcal{U}_{1,(r_1,r_2)}$ имеют следующий вид:

$$
\mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathfrak{L}',\mathbf{g},z_1,z_2) = (-z_2)^{-a}\sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}\frac{(a)_{2k_1+k_2}(1+a-c)_{k_1+k_2}}{(1-b+a)_{2k_1+k_2}k_1!k_2!}\left(-\frac{z_1}{z_2^2}\right)^{k_1}\frac{1}{z_2^{k_2}}, \tag{3.50}
$$

$$
\mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathfrak{H},\mathbf{f},z_1,z_2) = (-z_1)^{\frac{b-a}{2}}(-z_2)^{-b}\sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}\frac{(b)_{2k_2}\left(\frac{a-b}{2}\right)_{k_1-k_2}\left(1-c+\frac{a+b}{2}\right)_{k_1+k_2}}{(2k_1)!(2k_2)!}\frac{1}{z_1^{k_1}}\left(\frac{z_1}{z_2^2}\right)^{k_2}, \tag{3.51}
$$

$$
\mathcal{U}_{1,(1,0)}(\mathfrak{H},\mathbf{f},z_1,z_2) = (-z_1)^{\frac{b-a-1}{2}}(-z_2)^{-b}\sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}\frac{(b)_{2k_2}\left(\frac{1-b+a}{2}\right)_{k_1-k_2}\left(\frac{a+b+3}{2}-c\right)_{k_1+k_2}}{(2k_1+1)!(2k_2)!}\frac{1}{z_1^{k_1}}\left(\frac{z_1}{z_2^2}\right)^{k_2}, \tag{3.52}
$$

$$\mathcal{U}_{1,(0,1)}(\mathfrak{H},\mathbf{f},z_1,z_2) = (-z_1)^{\frac{b-a+1}{2}}(-z_2)^{-b-1}\sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}\frac{(1+b)_{2k_2}\left(\frac{a-b-1}{2}\right)_{k_1-k_2}\left(\frac{a+b+3}{2}-c\right)_{k_1+k_2}}{(2k_1)!(2k_2+1)!}\frac{1}{z_1^{k_1}}\left(\frac{z_1}{z_2^2}\right)^{k_2}, \quad (3.53)$$

$$\mathcal{U}_{1,(1,1)}(\mathfrak{H},\mathbf{f},z_1,z_2) = (-z_1)^{\frac{b-a}{2}}(-z_2)^{-b-1}\sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}\frac{(1+b)_{2k_2}\left(\frac{a-b}{2}\right)_{k_1-k_2}\left(2+\frac{a+b}{2}-c\right)_{k_1+k_2}}{(2k_1+1)!(2k_2+1)!}\frac{1}{z_1^{k_1}}\left(\frac{z_1}{z_2^2}\right)^{k_2}. \quad (3.54)$$

Ряды (3.50)–(3.54) *являются линейно независимыми решениями системы уравнений с частными производными* (1.9), *где дифференциальные операторы* $\mathcal{Q}_j$ *и* $\mathcal{P}_j$, $j = 1,2$, *даются равенствами* (3.24), *в области* (3.48).

Теоремы 3, 5 дополняют друг друга и дают представление для ряда Горна H_3 в областях (3.18), (3.48), где обе переменные z_1 и z_2 могут принимать большие по модулю значения.

4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ РЯДА ГОРНА H_4

4.1. Аналитическое продолжение ряда H_4 в область больших по модулю значений переменного z_1

Используя тождество (1.8) для символа Похгаммера, перепишем (1.13) в следующем виде:

$$H_4(a,b,c,d;z_1,z_2) = \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-a-2k_1-k_2)}\frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1-b-k_2)}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+k_1)}\frac{\Gamma(d)}{\Gamma(d+k_2)}\frac{z_1^{k_1}z_2^{k_2}}{k_1!k_2!}. \quad (4.1)$$

Сравнивая (1.1) и (4.1), находим

$$H_4(a,b,c,d;z_1,z_2) = F^{(4)}(\mathfrak{L};\mathbf{g};z_1,z_2) = \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{4}\frac{\Gamma(g_j)}{\Gamma(g_j+\alpha_j k_1+\beta_j k_2)}\frac{z_1^{k_1}z_2^{k_2}}{k_1!k_2!}, \quad (4.2)$$

где (2×4)-матрица $\mathfrak{L}$ и вектор параметров $\mathbf{g}$ имеют вид

$$\mathfrak{L} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{g} = (g_1,g_2,g_3,g_4) = (1-a,1-b,c,d). \quad (4.4)$$

Согласно формуле (2.1), находим подмножества индексов элементов первой строки матрицы (4.3):

$$I^0(\mathfrak{L}) := \{s:\alpha_s = 0\} = \{2,4\}, \quad I^-(\mathfrak{L}) := \{s:\alpha_s < 0\} = \{1\}, \quad I^+(\mathfrak{L}) := \{s:\alpha_s > 0\} = \{3\}. \quad (4.5)$$

Поскольку множество I^- в (4.5) состоит из одного элемента $s = 1$, а соответствующий элемент матрицы $\mathfrak{L}$ равен $\alpha_1 = -2$, то в формуле продолжения (2.9) для функции H_4 индекс s принимает лишь одно значение $s = 1$, а каждый из двух индексов r_1 и r_2 может быть равным 0 или $|\alpha_1| - 1 = 1$. Таким образом, в формуле (2.9), соответствующей ряду H_4, заданному соотношениями (4.2)–(4.4), будут фигурировать четыре слагаемых вида $B_{1,(r_1,r_2)}\mathcal{U}_{1,(r_1,r_2)}$.

Перейдем к нахождению $B_{1,(r_1,r_2)}$ и $\mathcal{U}_{1,(r_1,r_2)}$. Прежде всего, подставляя (4.3), (4.4) в (2.2), (2.3), находим

$$\omega_2^{(1)} = -2, \quad \omega_3^{(1)} = -1, \quad \omega_4^{(1)} = 2, \quad (4.6)$$

$$\sigma_{1,(0,0)}^{(1)} = 1-\frac{a}{2}, \quad \sigma_{2,(0,0)}^{(1)} = 1-b, \quad \sigma_{3,(0,0)}^{(1)} = c-\frac{a}{2}, \quad \sigma_{4,(0,0)}^{(1)} = d, \quad (4.7)$$

$$\sigma_{1,(1,0)}^{(1)} = \frac{1-a}{2}, \quad \sigma_{2,(1,0)}^{(1)} = 1-b, \quad \sigma_{3,(1,0)}^{(1)} = c-\frac{a+1}{2}, \quad \sigma_{4,(1,0)}^{(1)} = d, \quad (4.8)$$

$$\sigma_{1,(0,1)}^{(1)} = \frac{1-a}{2}, \quad \sigma_{2,(0,1)}^{(1)} = -b, \quad \sigma_{3,(0,1)}^{(1)} = c-\frac{a+1}{2}, \quad \sigma_{4,(0,1)}^{(1)} = d+1, \quad (4.9)$$

$$\sigma_{1,(1,1)}^{(1)} = \frac{-a}{2}, \quad \sigma_{2,(1,1)}^{(1)} = -b, \quad \sigma_{3,(1,1)}^{(1)} = c-\frac{a}{2}-1, \quad \sigma_{4,(1,1)}^{(1)} = d+1. \quad (4.10)$$

Подставляя (4.4), (4.5) и (4.7)–(4.10) в (2.14), находим выражения для коэффициентов

$$\begin{gathered} B_{1,(0,0)}(\mathfrak{L},\mathbf{g})=\frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{2\Gamma\left(c-\frac{a}{2}\right)\Gamma(a)},\quad B_{1,(1,0)}(\mathfrak{L},\mathbf{g})=-\frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(c-\frac{a+1}{2}\right)\Gamma(a)},\\ B_{1,(0,1)}(\mathfrak{L},\mathbf{g})=-\frac{b\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{2d\Gamma\left(c-\frac{a+1}{2}\right)\Gamma(a)},\quad B_{1,(1,1)}(\mathfrak{L},\mathbf{g})=\frac{b\Gamma(c)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)}{2d\Gamma\left(c-\frac{a}{2}-1\right)\Gamma(a)}. \end{gathered} \tag{4.11}$$

Учитывая (4.3), (4.6), находим матрицу $\mathfrak{M}^{(1)}$ по формуле (2.12):

$$\mathfrak{M}^{(1)}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1 & 0\\ -1 & -2 & -1 & 2\end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

Выполняя вычисления по формулам (2.11), получаем выражения переменных

$$w_1^{(1)}(z_1,z_2)=\frac{1}{z_1},\quad w_2^{(1)}(z_1,z_2)=\frac{z_2^2}{z_1}. \tag{4.13}$$

Подставляя (4.7)–(4.10), (4.12), (4.13) в (2.10), находим следующие представления для функций $\mathcal{U}_{1,(r_1,r_2)}$, $r_1,r_2=0,1$:

$$\begin{gathered} \mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathfrak{L};\mathbf{g};z_1,z_2)=(-z_1)^{-\frac{a}{2}}\sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(1-\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{a}{2}-k_1-k_2\right)}\frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1-b-2k_2)}\times\\ \times\frac{\Gamma\left(c-\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(c-\frac{a}{2}-k_1-k_2\right)}\frac{\Gamma(d)}{\Gamma(d+2k_2)}\frac{1}{(2k_1)!(2k_2)!}\frac{1}{z_1^{k_1}}\left(\frac{z_2^2}{z_1}\right)^{k_2}, \end{gathered} \tag{4.14}$$

$$\begin{gathered} \mathcal{U}_{1,(1,0)}(\mathfrak{L};\mathbf{g};z_1,z_2)=(-z_1)^{-\frac{a+1}{2}}\sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1-a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-a}{2}-k_1-k_2\right)}\frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1-b-2k_2)}\times\\ \times\frac{\Gamma\left(c-\frac{1+a}{2}\right)}{\Gamma\left(c-\frac{1+a}{2}-k_1-k_2\right)}\frac{\Gamma(d)}{\Gamma(d+2k_2)}\frac{1}{(2k_1+1)!(2k_2)!}\frac{1}{z_1^{k_1}}\left(\frac{z_2^2}{z_1}\right)^{k_2}, \end{gathered} \tag{4.15}$$

$$\begin{gathered} \mathcal{U}_{1,(0,1)}(\mathfrak{L};\mathbf{g};z_1,z_2)=(-z_1)^{-\frac{a+1}{2}}z_2\sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1-a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-a}{2}-k_1-k_2\right)}\frac{\Gamma(-b)}{\Gamma(-b-2k_2)}\times\\ \times\frac{\Gamma\left(c-\frac{1+a}{2}\right)}{\Gamma\left(c-\frac{1+a}{2}-k_1-k_2\right)}\frac{\Gamma(1+d)}{\Gamma(1+d+2k_2)}\frac{1}{(2k_1)!(2k_2+1)!}\frac{1}{z_1^{k_1}}\left(\frac{z_2^2}{z_1}\right)^{k_2}, \end{gathered} \tag{4.16}$$

$$\begin{gathered} \mathcal{U}_{1,(1,1)}(\mathfrak{L};\mathbf{g};z_1,z_2)=(-z_1)^{-\frac{a+2}{2}}z_2\sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{-a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-a}{2}-k_1-k_2\right)}\frac{\Gamma(-b)}{\Gamma(-b-2k_2)}\times\\ \times\frac{\Gamma\left(c-\frac{a}{2}-1\right)}{\Gamma\left(c-\frac{a}{2}-1-k_1-k_2\right)}\frac{\Gamma(1+d)}{\Gamma(1+d+2k_2)}\frac{1}{(2k_1+1)!(2k_2+1)!}\frac{1}{z_1^{k_1}}\left(\frac{z_2^2}{z_1}\right)^{k_2}. \end{gathered} \tag{4.17}$$

Преобразуя коэффициенты рядов (4.14)–(4.17) с помощью тождества (1.8) для символа Похгаммера, приходим к следующему утверждению.

Теорема 6. *Аналитическое продолжение ряда Горна H_4, определенного в области* (1.15) *равенством* (1.13), *в область*

$$\left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : 1 + \frac{|z_2|}{2} < |z_1|^{1/2},\ |\arg(-z_1)| < \pi\right\}, \tag{4.18}$$

дается формулой

$$\begin{aligned} H_4(a,b,c,d;z_1,z_2) = {} & \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{2\Gamma\left(c-\frac{a}{2}\right)\Gamma(a)}\mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathfrak{L};\mathbf{g};z_1,z_2) - \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(c-\frac{a+1}{2}\right)\Gamma(a)}\mathcal{U}_{1,(1,0)}(\mathfrak{L};\mathbf{g};z_1,z_2) - \\ & - \frac{b\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)}{2d\Gamma\left(c-\frac{a+1}{2}\right)\Gamma(a)}\mathcal{U}_{1,(0,1)}(\mathfrak{L};\mathbf{g};z_1,z_2) + \frac{b\Gamma(c)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)}{2d\Gamma\left(c-\frac{a}{2}-1\right)\Gamma(a)}\mathcal{U}_{1,(1,1)}(\mathfrak{L};\mathbf{g};z_1,z_2), \end{aligned} \tag{4.19}$$

где функции $\mathcal{U}_{1,(r_1,r_2)}$ имеют следующий вид:

$$\mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathfrak{L};\mathbf{g};z_1,z_2) = (-z_1)^{-\frac{a}{2}} \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)_{k_1+k_2}(b)_{2k_2}\left(1-c+\frac{a}{2}\right)_{k_1+k_2}}{(d)_{2k_2}(2k_1)!(2k_2)!}\frac{1}{z_1^{k_1}}\left(\frac{z_2^2}{z_1}\right)^{k_2}, \tag{4.20}$$

$$\mathcal{U}_{1,(1,0)}(\mathfrak{L};\mathbf{g};z_1,z_2) = (-z_1)^{-\frac{a+1}{2}} \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1+a}{2}\right)_{k_1+k_2}(b)_{2k_2}\left(\frac{3}{2}-c+\frac{a}{2}\right)_{k_1+k_2}}{(d)_{2k_2}(2k_1+1)!(2k_2)!}\frac{1}{z_1^{k_1}}\left(\frac{z_2^2}{z_1}\right)^{k_2}, \tag{4.21}$$

$$\mathcal{U}_{1,(0,1)}(\mathfrak{L};\mathbf{g};z_1,z_2) = (-z_1)^{-\frac{a+1}{2}} z_2 \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1+a}{2}\right)_{k_1+k_2}(1+b)_{2k_2}\left(\frac{3+a}{2}-c\right)_{k_1+k_2}}{(1+d)_{2k_2}(2k_1)!(2k_2+1)!}\frac{1}{z_1^{k_1}}\left(\frac{z_2^2}{z_1}\right)^{k_2}, \tag{4.22}$$

$$\mathcal{U}_{1,(1,1)}(\mathfrak{L};\mathbf{g};z_1,z_2) = (-z_1)^{-\frac{a+2}{2}} z_2 \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{a}{2}\right)_{k_1+k_2}(1+b)_{k_2}\left(2-c+\frac{a}{2}\right)_{k_1+k_2}}{(1+d)_{2k_2}(2k_1+1)!(2k_2+1)!}\frac{1}{z_1^{k_1}}\left(\frac{z_2^2}{z_1}\right)^{k_2}. \tag{4.23}$$

Ряды (4.19)–(4.23) *в области* (4.18) *являются линейно независимыми решениями системы уравнений с частными производными* (1.9), *где дифференциальные операторы $\mathcal{Q}_j$ и $\mathcal{P}_j$, $j = 1,2$, имеют вид*

$$\begin{gathered} \mathcal{P}_1 = \left(a + 2z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\left(a + 2z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial}{\partial z_2} + 1\right), \quad \mathcal{Q}_1 = \left(c + z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\right)\left(1 + z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\right), \\ \mathcal{P}_2 = \left(a + 2z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\left(b + z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right), \quad \mathcal{Q}_2 = \left(d + z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\left(1 + z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right). \end{gathered} \tag{4.24}$$

Теорема 6 дает представление для ряда Горна H_4 в области (4.18), где обе переменные z_1 и z_2 могут принимать большие по модулю значения. Однако в этой области модуль переменного $|z_2|$ меньше, чем $|z_1|$. Для того чтобы снять такое ограничение, в следующем п. 4.2 теорема 1 применена для продолжения H_4 по переменному z_2, а затем – по переменному z_1.

4.2. Аналитическое продолжение ряда H_4 в область больших по модулю значений переменного z_2

Для того чтобы продолжить ряд (4.2) по переменному z_2, перепишем его в виде

$$H_4(a,b,c,d;z_1,z_2) = F^{(4)}(\mathfrak{L}';\mathbf{g};z_2,z_1)\sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{4}\frac{\Gamma(g_j)}{\Gamma(g_j+\beta_j k_1+\alpha_j k_2)}\frac{z_2^{k_1}z_1^{k_2}}{k_1!k_2!}, \tag{4.25}$$

где вектор параметров $\mathbf{g}$ дается формулой (4.4), а матрица $\mathfrak{L}'$ получена из $\mathfrak{L}$ перестановкой строк:

$$\mathfrak{L}' = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.26}$$

Согласно формуле (2.1), находим множества индексов

$$I^0(\mathfrak{L}') := \{s : \alpha_s = 0\} = \{3\}, \quad I^-(\mathfrak{L}') := \{s : \alpha_s < 0\} = \{1,2\}, \quad I^+(\mathfrak{L}') := \{s : \alpha_s > 0\} = \{4\}. \tag{4.27}$$

Заметим, что множество I^- в (4.27) состоит из двух элементов $s = 1$ и $s = 2$, а соответствующие им элементы первой строки матрицы $\mathfrak{L}$ равны $\alpha_1 = -1$ и $\alpha_2 = -1$. Поэтому в формуле продолжения (2.9) индекс s принимает два значения $s = 1$ и $s = 2$, а каждый из двух индексов r_1 и r_2 принимают только нулевое значение, поскольку $|\alpha_s| - 1 = 0$, $s = 1,2$. Таким образом, в формуле (2.9), соответствующей ряду H_4, заданному равенствами (4.25), (4.26), будут фигурировать два слагаемых вида $B_{s,(0,0)}\mathcal{U}_{s,(0,0)}$.

Перейдем к нахождению этих величин. Прежде всего, подставляя (4.26), (4.4) в (2.2), (2.3), находим

$$\omega_2^{(1)} = 2, \quad \omega_3^{(1)} = 1, \quad \omega_4^{(1)} = -2, \tag{4.28}$$

$$\omega_1^{(2)} = -2, \quad \omega_3^{(2)} = 1, \quad \omega_4^{(2)} = 0, \tag{4.29}$$

$$\sigma_{1,(0,0)}^{(1)} = 1 - a, \quad \sigma_{2,(0,0)}^{(1)} = 1 - b + a, \quad \sigma_{3,(0,0)}^{(1)} = c, \quad \sigma_{4,(0,0)}^{(1)} = d - a, \tag{4.30}$$

$$\sigma_{1,(0,0)}^{(2)} = 1 + b - a, \quad \sigma_{2,(0,0)}^{(2)} = 1 - b, \quad \sigma_{3,(0,0)}^{(2)} = c, \quad \sigma_{4,(0,0)}^{(2)} = d - b. \tag{4.31}$$

Подставляя (4.4), (4.27) и (4.30), (4.31) в (2.14), получаем выражения для коэффициентов

$$B_{1,(0,0)}(\mathfrak{L}', \mathbf{g}) = \frac{\Gamma(d)\Gamma(b-a)}{\Gamma(d-a)\Gamma(b)}, \quad B_{2,(0,0)}(\mathfrak{L}', \mathbf{g}) = \frac{\Gamma(d)\Gamma(a-b)}{\Gamma(d-b)\Gamma(a)}. \tag{4.32}$$

Учитывая (4.26), (4.29), (4.30), находим вид матриц $\mathfrak{M}^{(s)}$, $s = 1,2$, по формуле (2.12):

$$\mathfrak{M}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{M}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.33}$$

Выполняя вычисления по формулам (2.11), получаем

$$w_1^{(1)}(z_1, z_2) = \frac{1}{z_2}, \quad w_2^{(1)}(z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2^2}; \quad w_1^{(2)}(z_1, z_2) = \frac{1}{z_2}, \quad w_2^{(2)}(z_1, z_2) = z_1. \tag{4.34}$$

Поставляя (4.27)–(4.34) в (2.8), (2.9), приходим к следующему утверждению.

Теорема 7. *Если параметры ряда Горна H_4, определенного в области* (1.15) *равенством* (1.13), *таковы, что разность $a - b$ не является целым числом, то аналитическое продолжение H_4 в область*

$$\left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < \frac{1}{4}, |z_2| > 1 + 2|z_1|^{1/2}, |\arg(-z_2)| < \pi\right\} \tag{4.35}$$

дается формулой

$$H_4(a,b,c,d; z_1, z_2) = \frac{\Gamma(d)\Gamma(b-a)}{\Gamma(d-a)\Gamma(b)}\mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathfrak{L}'; \mathbf{g}; z_1, z_2) + \frac{\Gamma(d)\Gamma(a-b)}{\Gamma(d-b)\Gamma(a)}\mathcal{U}_{2,(0,0)}(\mathfrak{L}'; \mathbf{g}; z_1, z_2), \tag{4.36}$$

где функции $\mathcal{U}_{1,(0,0)}$ имеют следующий вид:

$$\mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathfrak{L}'; \mathbf{g}; z_1, z_2) = (-z_2)^{-a} \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty} \frac{(a)_{2k_1+k_2}(1+a-d)_{2k_1+k_2}}{(1-b+a)_{2k_1+k_2}(c)_{k_1} k_1! k_2!} \left(\frac{z_1}{z_2^2}\right)^{k_1} \frac{1}{z_2^{k_2}}, \tag{4.37}$$

$$\mathcal{U}_{2,(0,0)}(\mathfrak{L}'; \mathbf{g}; z_1, z_2) = (-z_2)^{-b} \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty} \frac{(b)_{k_2}(1+b-d)_{k_2}}{(1+b-a)_{k_2-2k_1}(c)_{k_1} k_1! k_2!} z_1^{k_1} \frac{1}{z_2^{k_2}}. \tag{4.38}$$

Ряды (4.37), (4.38) *являются линейно независимыми решениями системы уравнений с частными производными* (1.9), *где дифференциальные операторы* $\mathcal{Q}_j$ *и* $\mathcal{P}_j$, $j = 1,2$, *даются равенствами* (4.24) *в области* (4.35).

Для того чтобы продолжить ряд Горна H_4 в область, где обе переменные z_1 и z_2 могут принимать большие по модулю значения, в следующем п. 4.3 теорема 1 применена к функции (4.38).

4.3. Аналитическое продолжение ряда H_4 по двум переменным z_1, z_2

Для нахождения формул продолжение ряда (4.38) по переменному z_1 заметим, что

$$\mathcal{U}_{2,(0,0)}(\mathfrak{L}';\mathbf{g};z_1,z_2) = (-z_2)^{-b}F^{(4)}\left(\mathfrak{H};\mathbf{f};z_1,\frac{1}{z_2}\right), \tag{4.39}$$

где матрица $\mathfrak{H}$ и вектор параметров $\mathbf{f}$ имеют вид

$$\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = (1+b-a, c, 1-b, d-b). \tag{4.40}$$

Согласно формуле (2.1), находим множества индексов

$$I^0(\mathfrak{H}) := \{s : \alpha_s = 0\} = \{3,4\}, \quad I^-(\mathfrak{H}) := \{s : \alpha_s < 0\} = \{1\}, \quad I^+(\mathfrak{H}) := \{s : \alpha_s > 0\} = \{2\}. \tag{4.41}$$

Заметим, что множество I^- в (4.41) состоит из одного элемента $s = 1$, а соответствующий элемент матрицы $\mathfrak{L}$ равен $\alpha_1 = -2$. Поэтому в формуле продолжения (2.9) индекс s принимает лишь одно значение $s = 1$, а каждый из двух индексов r_1 и r_2 принимает значение 0 и $|\alpha_1| - 1 = 1$. Таким образом, в формуле (2.9) будут фигурировать четыре слагаемых вида $B_{s,(r_1,r_2)}\mathcal{U}_{s,(r_1,r_2)}$. Перейдем к нахождению этих величин.

Прежде всего, подставляя (4.40), (4.41) в (2.2), (2.3), находим

$$\omega_2^{(1)} = 1, \quad \omega_3^{(1)} = -2, \quad \omega_4^{(1)} = -2, \tag{4.42}$$

$$\sigma_{1,(0,0)}^{(1)} = 1 + \frac{b-a}{2}, \quad \sigma_{2,(0,0)}^{(1)} = c + \frac{b-a}{2}, \quad \sigma_{3,(0,0)}^{(1)} = 1-b, \quad \sigma_{4,(0,0)}^{(1)} = d-b, \tag{4.43}$$

$$\sigma_{1,(1,0)}^{(1)} = \frac{1+b-a}{2}, \quad \sigma_{2,(1,0)}^{(1)} = c + \frac{b-a-1}{2}, \quad \sigma_{3,(1,0)}^{(1)} = 1-b, \quad \sigma_{4,(1,0)}^{(1)} = d-b, \tag{4.44}$$

$$\sigma_{1,(0,1)}^{(1)} = \frac{3+b-a}{2}, \quad \sigma_{2,(0,1)}^{(1)} = c + \frac{b-a+1}{2}, \quad \sigma_{3,(0,1)}^{(1)} = -b, \quad \sigma_{4,(0,1)}^{(1)} = d-b-1, \tag{4.45}$$

$$\sigma_{1,(1,1)}^{(1)} = 1 + \frac{b-a}{2}, \quad \sigma_{2,(1,1)}^{(1)} = c + \frac{b-a}{2}, \quad \sigma_{3,(1,1)}^{(1)} = -b, \quad \sigma_{4,(1,1)}^{(1)} = d-b-1. \tag{4.46}$$

Подставляя (4.40), (4.41) и (4.43)–(4.46) в (2.14), находим выражения для коэффициентов

$$\begin{gathered} B_{1,(0,0)}(\mathfrak{H},\mathbf{f}) = \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2\Gamma\left(c+\frac{b-a}{2}\right)\Gamma(a-b)}, \quad B_{1,(1,0)}(\mathfrak{H},\mathbf{f}) = -\frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{1+a-b}{2}\right)}{2\Gamma\left(c+\frac{b-a-1}{2}\right)\Gamma(a-b)}, \\ B_{1,(0,1)}(\mathfrak{H},\mathbf{f}) = \frac{b(1+b-d)\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a-b-1}{2}\right)}{2\Gamma\left(c+\frac{b-a+1}{2}\right)\Gamma(a-b)}, \quad B_{1,(1,1)}(\mathfrak{H},\mathbf{f}) = \frac{b(d-b-1)\Gamma(c)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2\Gamma\left(c+\frac{b-a}{2}\right)\Gamma(a-b)}. \end{gathered} \tag{4.47}$$

Учитывая (4.40), (4.42), находим матрицу $\mathfrak{M}^{(1)}$ по формуле (2.12):

$$\mathfrak{M}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}. \tag{4.48}$$

Выполняя вычисления по формулам (2.11), находим

$$w_1^{(1)}(z_1, z_2) = \frac{1}{z_1}, \quad w_2^{(1)}(z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2^2}. \tag{4.49}$$

Подставив (4.48), (4.49) в (2.10), находим формулу продолжения функции $\mathcal{U}_{2,(0,0)}$ из (4.36), согласно теореме 1. Подставляя эту формулу в (4.36) и используя теорему 7, приходим к следующему утверждению.

Теорема 8. *Если параметры ряда Горна H_4, определенного в области* (1.15) *равенством* (1.13), *таковы, что ни одно из чисел $a - b$, $c + (b - a \pm 1)/2$ не является целым, то аналитическое продолжение H_4 в область*

$$\left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| > \frac{1}{4}, |z_2| > 1 + 2|z_1|^{1/2}, |\arg(-z_j)| < \pi, \ j = 1, 2\right\} \tag{4.50}$$

дается формулой

$$\begin{gathered}
H_4(a, b, c, d; z_1, z_2) = \frac{\Gamma(d)\Gamma(b-a)}{\Gamma(d-a)\Gamma(b)} \mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathfrak{L}'; \mathbf{g}; z_1, z_2) + \\
+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2\Gamma(a)\Gamma(d-b)\Gamma\left(c + \frac{b-a}{2}\right)} \mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathfrak{H}; \mathbf{f}; z_1, z_2) - \frac{\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma\left(\frac{1+a-b}{2}\right)}{2\Gamma(a)\Gamma(d-b)\Gamma\left(c + \frac{b-a-1}{2}\right)} \mathcal{U}_{1,(1,0)}(\mathfrak{H}; \mathbf{f}; z_1, z_2) + \\
+ \frac{b(d-b-1)\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma\left(\frac{a-b-1}{2}\right)}{2\Gamma(a)\Gamma(d-b)\Gamma\left(c + \frac{b-a+1}{2}\right)} \mathcal{U}_{1,(0,1)}(\mathfrak{H}; \mathbf{f}; z_1, z_2) + \\
+ \frac{b(1+b-d)\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2\Gamma(a)\Gamma(d-b)\Gamma\left(c + \frac{b-a}{2}\right)} \mathcal{U}_{1,(1,1)}(\mathfrak{H}; \mathbf{f}; z_1, z_2),
\end{gathered} \tag{4.51}$$

где функции $\mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathfrak{L}'; \mathbf{g}; z_1, z_2)$, $\mathcal{U}_{1,(r_1,r_2)}(\mathfrak{H}; \mathbf{f}; z_1, z_2)$ имеют следующий вид:

$$\mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathfrak{L}'; \mathbf{g}; z_1, z_2) = (-z_2)^{-a} \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty} \frac{(a)_{2k_1+k_2}(1+a-d)_{2k_1+k_2}}{(1-b+a)_{2k_1+k_2}(c)_{k_1} k_1! k_2!} \left(\frac{z_1}{z_2^2}\right)^{k_1} \frac{1}{z_2^{k_2}}, \tag{4.52}$$

$$\mathcal{U}_{1,(0,0)}(\mathfrak{H}; \mathbf{f}; z_1, z_2) = (-z_1)^{\frac{b-a}{2}} (-z_2)^{-b} \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty} \frac{(b)_{2k_2}(1+b-d)_{2k_2}}{\left(1 + \frac{b-a}{2}\right)_{k_2-k_1} \left(c + \frac{b-a}{2}\right)_{k_2-k_1} (2k_1)!(2k_2)!} \frac{1}{z_1^{k_1}} \left(\frac{z_1}{z_2^2}\right)^{k_2}, \tag{4.53}$$

$$\begin{gathered}
\mathcal{U}_{1,(1,0)}(\mathfrak{H}; \mathbf{f}; z_1, z_2) = (-z_1)^{\frac{b-a-1}{2}} (-z_2)^{-b} \times \\
\times \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty} \frac{(b)_{2k_2}(1+b-d)_{2k_2}}{\left(\frac{1+b-a}{2}\right)_{k_2-k_1} \left(c + \frac{b-a-1}{2}\right)_{k_2-k_1} (2k_1+1)!(2k_2)!} \frac{1}{z_1^{k_1}} \left(\frac{z_1}{z_2^2}\right)^{k_2},
\end{gathered} \tag{4.54}$$

$$\begin{gathered}
\mathcal{U}_{1,(0,1)}(\mathfrak{H}; \mathbf{f}; z_1, z_2) = (-z_1)^{\frac{b-a+1}{2}} (-z_2)^{-b-1} \times \\
\times \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty} \frac{(1+b)_{2k_2}(2+b-d)_{2k_2}}{\left(\frac{3+b-a}{2}\right)_{k_2-k_1} \left(c + \frac{b-a+1}{2}\right)_{k_2-k_1} (2k_1)!(2k_2+1)!} \frac{1}{z_1^{k_1}} \left(\frac{z_1}{z_2^2}\right)^{k_2},
\end{gathered} \tag{4.55}$$

$$\mathcal{U}_{1,(1,1)}(\mathfrak{H};\mathbf{f};z_1,z_2) = (-z_1)^{\frac{b-a}{2}}(-z_2)^{-b-1} \times$$
$$\times \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty} \frac{(1+b)_{2k_2}(2+b-d)_{2k_2}}{\left(1+\frac{b-a}{2}\right)_{k_2-k_1}\left(c+\frac{b-a}{2}\right)_{k_2-k_1}(2k_1+1)!(2k_2+1)!}\frac{1}{z_1^{k_1}}\left(\frac{z_1}{z_2^2}\right)^{k_2}. \tag{4.56}$$

Ряды (4.52)–(4.56) *являются линейно независимыми решениями системы уравнений с частными производными* (1.9), *где дифференциальные операторы* $\mathcal{Q}_j$ *и* $\mathcal{P}_j$, $j = 1,2$, *даются равенствами* (4.24) *в области* (4.50).

Теоремы 6, 8 дополняют друг друга и дают представление для ряда Горна H_4 в областях (4.18), (4.50), где обе переменные z_1 и z_2 могут принимать большие по модулю значения.

Представления функций H_3 и H_4, найденные в теоремах 3–8, демонстрируют, что теорема 1 является основой эффективного метода построения формул аналитического продолжения общих рядов Горна (1.1). Полученные в результате применения теоремы 1 формулы дают эффективный алгоритм для вычисления функций Горна вне области сходимости степенного ряда (1.1), которым исходно определяются такие функции. Таким образом, результаты настоящей работы могут быть востребованы в задачах математической физики, при решении которых возникают ряды вида (1.1) или системы уравнений с частными производными (1.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Exton H.* Multiple hypergeometric functions and application. New York: John Willey & Sons, Inc, 1976.
2. *Iwasaki K., Kimura H., Shimomura Sh., Yoshida M.* From Gauss to Painlevé: a modern theory of special functions. Aspects of Mathematics. V. E16. Braunschweig: Friedrich Vieweg & Sohn, 1991.
3. *Гельфанд И.М., Граев М.И., Ретах В.С.* Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа // Успехи матем. наук. 1992. Т. 47. Вып. 4(286). С. 3–82.
4. *Akerblom N., Flohr M.* Explicit formulas for the scalar modes in Seiberg–Witten theory with an application to the Argyres–Douglas point // J. High Energy Phys. 2005. V. 2. № 057. P. 24.
5. *Holzapfel R.-P., Uludag A.M., Yoshida M.* Arithmetic and geometry around hypergeometric functions. Progr. Math. V. 260. Basel: Birkhäuser Verlag, 2007.
6. *Тарасов О.В.* Применение функциональных уравнений для вычисления фейнмановских интегралов // Теор. и матем. физ. 2019. Т. 200. № 2. С. 324–342.
7. *Безродных С.И.* Гипергеометрическая функция Лауричеллы $F_D^{(N)}$, задача Римана–Гильберта и некоторые приложения // Успехи матем. наук. 2018. Т. 73. № 6 (444). С. 3–94.
8. *Brychkov Yu.A., Savischenko N.V.* Application of hypergeometric functions of two variables in wireless communication theory // Lobachevskii J. of Math. 2019. V. 40. № 7. P. 938–953.
9. *Berge J., Massey R., Baghi Q., Touboul P.* Exponential shapelets: basis functions for data analysis of isolated feature // Month. Notices Royal Astron. Soc. 2019. 486(1). P. 544–559.
10. *Безродных С.И., Власов В.И.* Асимптотика задачи Римана–Гильберта для модели магнитного пересоединения в плазме // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 11. С. 1898–1914.
11. *Власов В.И., Скороходов С.Л.* Аналитическое решение задачи о кавитационном обтекании клина. I // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 12. С. 2098–2121.
12. *Kalmykov M., Bytev V., Kniehl B., Moch S.-O., Ward B., Yost S.* Hypergeometric functions and Feynman diagrams. In: *Blümlein J., Schneider C.* (eds) Anti-Differentiation and the Calculation of Feynman Amplitudes. Texts & Monographs in Symbolic Computation (A Series of the Research Institute for Symbolic Computation, Johannes Kepler University, Linz, Austria). Springer, Cham, 2021.
13. *Bezrodnykh S.I., Vlasov V.I.* Asymptotics of the Riemann–Hilbert problem for the Somov model of magnetic reconnection of long shock waves // Math. Notes. 2021. V. 110. Iss. P. 853–871.
14. *Власов В.И., Скороходов С.Л.* Аналитическое решение задачи о кавитационном обтекании клина. II // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 11. С. 1873–1893.
15. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973.
16. *Srivastava H.M., Karlsson P.W.* Multiple Gaussian hypergeometric series. Chichester: Ellis Horwood, 1985.
17. *Appell P., Kampé de Fériet J.* Fonctions hypergéometriques et hypersphérique. Paris: Gauthier–Villars, 1926.
18. *Horn J.* Über die konvergenz der hypergeometrischen Reihen zweier und dreier Veränderlichen. Math. Ann. 1889. V. 34. P. 544–600.

19. *Садыков Т.М., Цих А.К.* Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных. М.: Наука, 2014.
20. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Т. 2. М.: Эдиториал УРСС, 2002.
21. *Olsson O.M.* Integration of the partial differential equations for the hypergeometric function F_1 and F_D of two and more variables // J. Math. Phys. 1964. V. 5. № 420. P. 420–430.
22. *Srivastava H.M.* A note on certain hypergeometric differential equations // Math. Vesnik. 1972. V. 9. № 24. P. 101–107.
23. *Sud A.R., Sud K.K.* Analytic continuation of the Lauricella function // J. Math. Phys. 1978. V. 19. № 12.
24. *Власов В.И.* Краевые задачи в областях с криволинейной границей. Докторская дисс. М.: ВЦ АН СССР, 1990.
25. *Bezrodnykh S.I.* Analytic continuation of the Lauricella function $F_D^{(N)}$ with arbitrary number of variables // Integral Transforms and Special Functions. 2018. V. 29. № 1. P. 21–42.
26. *Bezrodnykh S.I.* Analytic continuation of Lauricella's function $F_D^{(N)}$ for large in modulo variables near hyperplanes $\{z_j = z_l\}$ // Integral Transforms and Special Functions. 2021. Publ. online. https://doi.org/10.1080/10652469.2021.1929206
27. *Bezrodnykh S.I.* Analytic continuation of Lauricella's function $F_D^{(N)}$ for variables close to unit near hyperplanes $\{z_j = z_l\}$ // Integral Transforms and Special Functions. 2021. Publ. online. https://doi.org/10.1080/10652469.2021.1939329
28. *Bezrodnykh S.I.* Analytic continuation of the Horn hypergeometric series with an arbitrary number of variables // Integral Transforms and Spec Functions. 2020. V. 31. № 10. P. 788–803.
29. *Brychkov Yu.A., Savischenko N.V.* On some formulas for the Horn functions $H_5(a,b;c;w,z)$ and $H_5^c(a;c;w,z)$ // Integral Transforms and Special Functions. 2021. Publ.online. https://doi.org/10.1080/10652469.2021.1938026
30. *Brychkov Yu.A., Savischenko N.V.* On some formulas for the Horn functions $H_6(a,b,b',w,z)$ and $H_8^{(c)}(a,b;w,z)$ // Integral Transforms and Special Functions. 2021. Publ. online. https://doi.org/10.1080/10652469.2021.2017427
31. *Fox F.* The asymtotic expansion of hypergeometric functions // Proc. London Math. Soc. 1928. V. 27. № 2. P. 389–400.
32. *Wright E.M.* The asymtotic expansion of hypergeometric functions // Proc. London Math. Soc. 1935. V. 10. № 4. P. 286–293.