

НЕСЖИМАЕМЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ С ПРОТИВОТОКАМИ
ПРИ ЗАДАННОМ ГРАДИЕНТЕ ДАВЛЕНИЯ¹⁾© 2022 г. Тэ Ха Чжун¹, С. И. Безродных^{2,*}, В. Б. Заметаев^{1,2}¹ 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ, Россия² 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: sbezrodnykh@mail.ru, chzhun.th@phystech.edu

Поступила в редакцию 03.12.2021 г.
Переработанный вариант 22.12.2021 г.
Принята к публикации 28.12.2021 г.

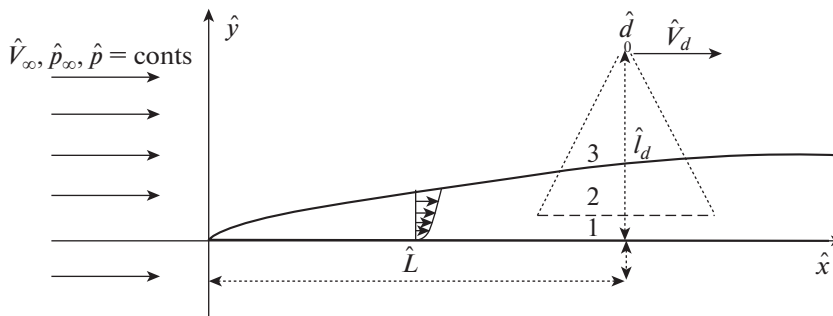
Рассматривается двумерное ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости около плоской поверхности при больших числах Рейнольдса. В рамках асимптотической теории изучается влияние тела, движущегося вниз по потоку с малой по отношению к пластине скоростью, на пограничный слой Блазиуса. Исследован частный случай, в котором внешнее малое тело, моделируемое потенциальным диполем, движется с постоянной скоростью вниз по потоку. Данная задача является формально нестационарной на неподвижной пластине, однако в результате перехода в подвижную систему координат, связанную с диполем, описывается стационарными уравнениями вязкого подслоя, но на движущейся вверх по потоку стенке. Предложен оригинальный метод решения подобных задач, содержащих противотоки, а именно, около поверхности выделяется слой текущей вверх по потоку жидкости, в то время как выше него жидкость в пограничном слое течет вниз по потоку. Удалось найти точное аналитическое решение линейной задачи при малых интенсивностях потенциального диполя и численное решение нелинейной задачи при больших значениях интенсивности. Решения содержат замкнутые и разомкнутые отрывные области вблизи линии нулевой продольной скорости даже в линейном приближении. Найденные решения позволяют уточнить методику измерения параметров пограничного слоя на сплошных и перфорированных стенках аэродинамических труб с помощью термоанемометров, приемников давления и других датчиков, установленных на подвижном координатном устройстве. Библ. 11. Фиг. 5.

Ключевые слова: ламинарный пограничный слой, отрыв, асимптотический метод.**DOI:** 10.31857/S0044466922060059

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о движении обтекаемой стенки по потоку или против потока в стационарном пограничном слое является частным случаем нестационарного отрыва пограничного слоя вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса. Широкий класс плоских отрывных ламинарных течений вязкой несжимаемой жидкости описан в [1], где, в частности, изложены основы асимптотической теории отрыва стационарного и нестационарного пограничных слоев и подробно описан случай стенки, движущейся вниз по потоку. В деталях изложено формирование особенности Мура–Рота–Сирса в решении уравнений пограничного слоя при воздействии на него неблагоприятного, тормозящего градиента давления. Похожая задача была рассмотрена и в [2], где величину неблагоприятного градиента давления можно было регулировать. При изменении величины действующего на пограничный слой давления поток тормозился внутри слоя вплоть до нулевого значения в некоторой точке. Причем удалось найти решение задачи с более слабой особенностью “кромочного” типа, нежели особенность Мура–Рота–Сирса, далее которой вниз по потоку решение не существует. Течение около стенки, движущейся вверх по потоку, в сверхзвуковом пограничном слое было исследовано численно в [3]. Применение асимптотических “многопалубных” разложений при исследовании задач гидродинамической устойчивости подробно описано в [4]. В [5] изучено воздействие скачка уплотнения, движущегося вверх по по-

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-11-20006) в МФТИ. Компьютерная поддержка обеспечена в ФИЦ ИУ РАН.



Фиг. 1. Схема течения.

току (а в системе координат, движущейся со скачком, стенка соответственно движется вниз по потоку), на ламинарный пограничный слой. Исследование [3] повторено в работе [6] в несколько более широких рамках. Анализ отрывных течений в канале с подвижной стенкой с использованием метода сращиваемых асимптотических разложений выполнен в [7]. Численный расчет полных уравнений Навье–Стокса для чисел Маха больше единицы в случае подвижного скачка уплотнения, падающего на пограничный слой вязкого совершенного газа, выполнен в работе [8]. Подобные расчеты являются убедительным средством проверки и подтверждения результатов применения асимптотических теорий. Дальнейшее развитие теории отрывных течений на подвижной стенке было предложено в [9], где также рассматривалась поверхность, движущаяся вверх по потоку.

В настоящей работе рассматривается ламинарное течение несжимаемой вязкой жидкости в пограничном слое около стенки, движущейся вверх по потоку. А именно, изучено влияние заданных малых внешних возмущений давления на пограничный слой, содержащий противотоки. Предполагается, что на пограничный слой действует возмущение давления, источник которого является локальным, регулируется по величине и движется вниз по потоку.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В качестве базового течения в исследовании рассматривается двумерное ламинарное обтекание плоской пластины потоком вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса. На расстоянии \hat{L} от передней кромки пластины и на высоте $\hat{l}_d = \hat{L} \cdot l$ выше обтекаемой поверхности расположено малое тело, движущееся вниз по потоку с заданной постоянной скоростью $\hat{V}_d = \hat{V}_\infty u_w$, где \hat{V}_∞ – скорость внешнего потока (фиг. 1).

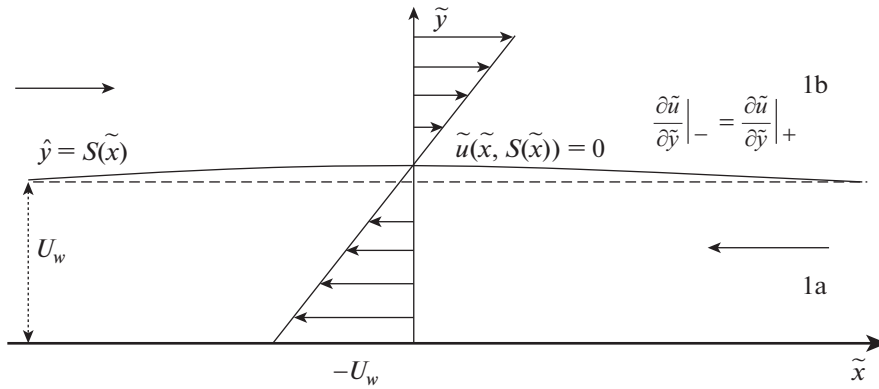
Малое тело, создающее возмущение давления в потоке и соответственно на обтекаемой поверхности, заменим потенциальным диполем интенсивности $\hat{d} = \hat{V}_\infty \hat{L}^2 m$. Комплексный потенциал w такого течения хорошо известен и имеет вид

$$w = \hat{V}_\infty \hat{z} + \frac{\hat{d}}{\hat{z} - (\hat{L} + i\hat{l}_d)} + \frac{\hat{d}}{\hat{z} - (\hat{L} - i\hat{l}_d)}, \quad \hat{z} = \hat{x} + i\hat{y}.$$

А выражение для давления на обтекаемой поверхности пластины, введенное по формуле $\hat{p} = \hat{p}_\infty + \rho \hat{V}_\infty^2 \bar{p}$, в безразмерных координатах $\{\bar{x}, \bar{y}\} = \{\hat{x}/\hat{L}, \hat{y}/\hat{L}\}$ следует из уравнения Бернулли

$$\bar{p} = m \cdot 2 \frac{(\bar{x} - 1)^2 - l^2}{((\bar{x} - 1)^2 + l^2)^2} - m^2 \cdot 2 \left[\frac{(\bar{x} - 1)^2 - l^2}{((\bar{x} - 1)^2 + l^2)^2} \right]^2.$$

Далее в работе будем изучать режимы течения при малых высотах диполя над пластиной $l \rightarrow 0$, но, конечно, выше пограничного слоя, развивающегося вдоль обтекаемой поверхности вследствие действия сил вязкости. Если задать интенсивность диполя $m = l^{8/3} m_1$ такую, чтобы влияние возмущения давления было сопоставимо с вязкими и инерционными эффектами в вязком пристенном подслое пограничного слоя, и задать высоту положения диполя над по-



Фиг. 2. Противотоки в вязком подслое, разделенные неизвестной границей.

верхностью, большей по сравнению с размерами области взаимодействия $Re^{-3/8} \ll l \ll 1$, $Re = \hat{\rho} \hat{V}_\infty \hat{L} / \mu \rightarrow \infty$ (область 3, фиг. 1), то индуцированным давлением, обусловленным вытеснением вязкого подслоя, можно пренебречь и считать возмущение давления заданным исключительно диполем

$$p = l^{2/3} m_1 p_d(\tilde{x}) + \dots, \quad p_d = \frac{2(\tilde{x}^2 - 1)}{(\tilde{x}^2 + 1)^2}. \tag{2.1}$$

В (2.1) введена новая нормированная продольная координата \tilde{x} , связанная с исходной по формуле $\bar{x} = 1 + l\tilde{x}$, а также из разложения давления отброшены члены более высокого порядка малости по параметру l .

При переходе в систему координат, движущуюся вместе с диполем вниз по потоку с малой постоянной скоростью u_w , заданное распределение давления (2.1) не изменится в главном приближении, так как нестационарные поправки к нему окажутся малыми. Однако при этом давление (2.1) будет воздействовать уже на вязкий пристенный подслоя (область 1, фиг. 1), развивающийся на стенке, которая движется против потока со скоростью $-u_w$. При ненулевой интенсивности диполя наблюдатель, движущийся вместе с ним, увидит вблизи обтекаемой стенки стационарное возмущенное течение с противотоками, качественно изображенное на фиг. 2.

Асимптотика решения уравнений Навье–Стокса в вязком подслое 1a–1b на дне пограничного слоя Блазиуса вблизи точки $\bar{x} = 1$, $u'_{BLAS}(0) = \lambda$ ищется при $l \rightarrow 0$, $Re \rightarrow \infty$ в виде

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 1 + l\tilde{x}, & \bar{y} &= l^{1/3} Re^{-1/2} \lambda^{-1/3} \tilde{y}, \\ \bar{u} &= l^{1/3} \lambda^{2/3} \tilde{u} + \dots, & \bar{v} &= l^{-1/3} Re^{-1/2} \lambda^{1/3} \tilde{v} + \dots, & \bar{p} &= l^{2/3} \tilde{p} + \dots, \\ u_w &= \lambda^{2/3} l^{1/3} U_w, & m &= \lambda^{4/3} l^{8/3} M. \end{aligned} \tag{2.2}$$

В результате подстановки (2.2) в уравнения Навье–Стокса задача в вязком подслое (область 1, фиг. 1) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} &= -\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}, & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} &= 0, \\ \tilde{u}(\tilde{x}, 0) &= -U_w, & \tilde{v}(\tilde{x}, 0) &= 0, & \tilde{u}|_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} &= \tilde{y} + A(\tilde{x}) + \dots, & \tilde{u}|_{|\tilde{x}| \rightarrow \infty} &= -U_w + \tilde{y} + \dots, \\ \tilde{p} &= M \frac{2(\tilde{x}^2 - 1)}{(\tilde{x}^2 + 1)^2}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Задача (2.3) содержит два независимых параметра: M – интенсивность диполя, U_w – скорость стенки. Искомая функция $A(\tilde{x})$ – это второй член координатного разложения решения при $\tilde{y} \rightarrow +\infty$ (называемый толщиной вытеснения вязкого подслоя), а \tilde{p} – давление, заданное диполем. Уравнения вязкого подслоя (2.3) являются уравнениями параболического типа, однако из-за наличия противотоков начальные условия должны быть заданы с двух сторон: при $\tilde{x} \rightarrow +\infty$ и $\tilde{x} \rightarrow -\infty$. Соответственно использовать традиционный метод для решения системы (2.3) не удастся.

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ С ПРОТИВОТОКАМИ

Обозначим через $\tilde{y} = S(\tilde{x})$ заранее неизвестную кривую, в каждой точке которой горизонтальная скорость принимает нулевое значение. Таким образом, кривая $S(\tilde{x})$ делит исходную область на две подобласти 1a и 1b (см. фиг. 2), причем в области 1a, $\tilde{y} \in [0; S(\tilde{x})]$, поток движется только в отрицательном направлении оси $O\tilde{x}$, а в области 1b, $\tilde{y} \in [S(\tilde{x}); +\infty)$, — только в положительном направлении. В результате в случае заданного давления и известной функции $S(\tilde{x})$ можно сформулировать следующие краевые задачи в каждой из введенных областей по отдельности:

$$\begin{aligned} \text{1a: } \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} &= -\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \\ \tilde{u}(\tilde{x}, 0) &= -U_w, \quad \tilde{v}(\tilde{x}, 0) = 0, \quad \tilde{u}(\tilde{x}, S(\tilde{x})) = 0, \quad \tilde{u}|_{\tilde{x} \rightarrow +\infty} = -U_w + \tilde{y}, \quad S|_{\tilde{x} \rightarrow +\infty} = U_w, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \text{1b: } \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} &= -\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \\ \tilde{u}(\tilde{x}, S(\tilde{x})) &= 0, \quad \tilde{v}(\tilde{x}, S(\tilde{x})) = \tilde{v}^-(\tilde{x}, S(\tilde{x})), \quad \left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right|_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} = 1, \quad \tilde{u}|_{\tilde{x} \rightarrow -\infty} = -U_w + \tilde{y}, \quad S|_{\tilde{x} \rightarrow -\infty} = U_w, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\tilde{v}^-(\tilde{x}, S(\tilde{x}))$ — вертикальная скорость на линии раздела, найденная из расчета течения в области 1a. Отметим, что на линии $\tilde{y} = S(\tilde{x})$ справедливо дополнительное краевое условие, связывающее касательные напряжения снизу и сверху от искомой кривой (в нашем случае имеет место равенство этих величин, поскольку иначе на данной линии будет приложена касательная сила, что не физично). В выбранных переменных указанное краевое условие имеет вид

$$\left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right|_{-} = \left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right|_{+}. \quad (3.3)$$

Задача (2.3) при нулевой интенсивности диполя ($M = 0$) допускает точное решение вида $\tilde{u} = -U_w + \tilde{y}$, $\tilde{v} = \tilde{p} = S - U_w = A = 0$. Если диполь имеет отличную от нуля малую интенсивность, то он слабо возмущает само течение и границу между областями 1a и 1b. Далее построим решение линеаризованной задачи при условии малой интенсивности диполя. Такое решение может быть выписано в замкнутом аналитическом виде и, таким образом, является удобным для проверки численного решения нелинейной задачи.

Введем функцию тока $\Psi: \tilde{u} = \partial \Psi / \partial \tilde{y}$, $\tilde{v} = -\partial \Psi / \partial \tilde{x}$ и в качестве первого шага построим решение задачи с диполем малой интенсивности при $M \rightarrow 0$. Функция тока Ψ представляется в виде ряда по M , а скорость движения стенки U_w фиксирована. В случае решения линейной задачи граница раздела противотоков $\tilde{y} = S(\tilde{x})$ сносится на линию $\tilde{y} = U_w$, и задача сильно упрощается, позволяя применить для решения операционный метод

$$\begin{aligned} \Psi(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \frac{\tilde{y}^2}{2} - U_w \tilde{y} + M \cdot \Psi_1(\tilde{x}, \tilde{y}) + M^2 \cdot \Psi_2(\tilde{x}, \tilde{y}) + \dots, \quad S(\tilde{x}) = U_w + M \cdot S_1(\tilde{x}) + \dots, \\ A(\tilde{x}) &= M \cdot A_1(\tilde{x}) + \dots, \quad p = M \cdot p_1, \quad p_1 = \frac{2(\tilde{x}^2 - 1)}{(\tilde{x}^2 + 1)^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Подставив (3.4) в уравнения и граничные условия (2.3) и отбросив квадратичные по M члены, получим следующую линейную задачу:

$$\begin{aligned} (\tilde{y} - U_w) \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial \tilde{x}} &= -\frac{dp_1}{d\tilde{x}} + \frac{\partial^3 \Psi_1}{\partial \tilde{y}^3}, \\ \Psi_1(\tilde{x}, 0) &= 0, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \tilde{y}^2} \right|_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial \tilde{y}} \right|_{|\tilde{x}| \rightarrow \pm\infty} = 0, \\ S_1(\tilde{x}) &= -\frac{\partial \Psi_1}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, U_w), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где поправка $S_1(\tilde{x})$ находится из условия равенства нулю горизонтальной скорости на линии раздела противотоков. Линейную задачу (3.5) будем решать методом преобразования Фурье. Применяя это преобразование и обозначая фурье-образы искомого функций через

$$\hat{\Psi}_1(\alpha, \tilde{y}) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1(\tilde{x}, \tilde{y}) e^{-i\alpha\tilde{x}} d\tilde{x} \quad \text{и} \quad \tilde{S}_1(\alpha) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\tilde{x}) e^{-i\alpha\tilde{x}} d\tilde{x},$$

получим краевую задачу в областях 1a и 1b

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_1''' - i\alpha(\tilde{y} - U_w)\hat{\Psi}_1' + i\alpha\hat{\Psi}_1 &= i\alpha\hat{p}_1, \\ \hat{\Psi}_1(\alpha, 0) = 0, \quad \hat{\Psi}_1'(\alpha, 0) = 0, \quad \hat{\Psi}_1''(\alpha, \tilde{y}) \Big|_{\tilde{y} \rightarrow \infty} &= 0, \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\hat{S}_1 = -\hat{\Psi}_1'(\alpha, U_w).$$

Решая ее, находим искомые фурье-образы функций тока и скоростей по формулам

$$\hat{\Psi}_1(\alpha, \tilde{y}) = \kappa\hat{p}_1 \int_0^{\tilde{y}} J_A(\alpha, \eta) d\eta, \quad \hat{\Psi}_1'(\alpha, \tilde{y}) = \kappa\hat{p}_1 J_A(\alpha, \tilde{y}), \tag{3.7}$$

$$\hat{S}_1 = -\kappa\hat{p}_1 J_A(\alpha, U_w), \quad \hat{A}_1 = \kappa\hat{p}_1 \left[J_A(\alpha, U_w) + \frac{1}{3}(i\alpha)^{-1/3} \right]. \tag{3.8}$$

В (3.7), (3.8) использованы следующие вспомогательные функции и константы:

$$J_A(\alpha, \tilde{y}) = \int_0^{\tilde{y}} Ai\left((i\alpha)^{1/3}(\xi - U_w)\right) d\xi, \quad \kappa = \frac{(i\alpha)^{2/3}}{Ai'(-i\alpha)^{1/3}U_w}.$$

Здесь $Ai(z)$ – функция Эйри (см. [10]), а через $\tilde{P}_1, \tilde{S}_1, \tilde{A}_1$ обозначены образы возмущений давления, границы противотоков и толщины вытеснения. Применение обратного преобразования Фурье к (3.7), (3.8) позволит получить линейные возмущения решения, удобные для проверки точности численного метода.

4. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ

Выполним следующие преобразования координат и искомых скоростей, которые упрощают численное решение рассматриваемой задачи (3.1)–(3.3):

$$x = \tilde{x}, \quad Y = \frac{\tilde{y}}{S(\tilde{x})}, \quad U = S(x) \cdot \tilde{u}, \quad V = \tilde{v} - S'(x)Y \cdot \tilde{u}. \tag{4.1}$$

После преобразований (4.1) структура областей в вязком подслое существенно упрощается, так как граница раздела разнонаправленных потоков (областей 1a и 1b) в новых координатах проходит по прямой линии $Y = 1$, а задача (3.1)–(3.3) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{1a: } U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial Y} &= -S^2(x) \frac{dp}{dx} + \frac{1}{S(x)} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{S'(x)}{S(x)} U^2, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \\ U(x, 0) &= -S(x) \cdot U_w, \quad V(x, 0) = 0, \quad U(x, 1) = 0, \quad U \Big|_{x \rightarrow +\infty} = -SU_w + S^2 Y, \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$p = M \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2},$$

$$\begin{aligned} \text{1b: } U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial Y} &= -S^2(x) \frac{dp}{dx} + \frac{1}{S(x)} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{S'(x)}{S(x)} U^2, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \\ U(x, 1) = 0, \quad V(x, 1) &= V^-(x, 1), \quad \frac{\partial U}{\partial Y} \Big|_{Y \rightarrow +\infty} = S^2(x), \quad U \Big|_{x \rightarrow -\infty} = -SU_w + S^2 Y, \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} \Big|_- = \frac{\partial U}{\partial Y} \Big|_+. \tag{4.4}$$

В вязком подслое была введена равномерная прямоугольная сетка с координатами $\{x_i \in [-20; 20], i = 1, \dots, Nx; Y_j \in [0; 1], j = 1, \dots, Ny_a\}$ в области 1a и $\{x_i \in [-20; 20], i = 1, \dots, Nx;$

$Y_j \in [1; 1]$, $j = 1, \dots, Ny_b$ в области 1b. Для некоторой заданной сеточной функции формы границы раздела $\{S_i, i = 1, \dots, Nx\}$ численное решение задачи (4.2)–(4.4) проводилось в два этапа. На первом этапе решалась краевая задача (4.2) в области 1a, где поток направлен в отрицательном направлении вдоль оси Ox . Для ее решения использовалась разностная схема, аналогичная предложенной в [11]:

$$U_i^j \left(\frac{-3U_i^j + 4U_{i+1}^j - U_{i+2}^j}{x_{i+2} - x_i} \right) + V_i^j \frac{U_i^{j+1} - U_i^{j-1}}{Y_{j+1} - Y_{j-1}} = -S_i^2 \left(\frac{dp}{dx} \right)_i + \frac{1}{S_i} \frac{U_i^{j+1} - 2U_i^j + U_i^{j-1}}{(Y_{j+1} - Y_j)^2} + \frac{S_i'}{S_i} (U_i^j)^2, \\ j = 2, \dots, Ny_a - 1; \quad (4.5)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{-3U_i^{j-1} + 4U_{i+1}^{j-1} - U_{i+2}^{j-1}}{x_{i+2} - x_i} + \frac{-3U_i^j + 4U_{i+1}^j - U_{i+2}^j}{x_{i+2} - x_i} \right) + \frac{V_i^j - V_i^{j-1}}{Y_j - Y_{j-1}} = 0, \quad j = 2, \dots, Ny_a,$$

$$U_i^1 = -S_i \cdot U_w, \quad V_i^1 = 0, \quad U_i^{Ny_a} = 0, \quad i = Nx - 2, \dots, 1.$$

Начальные условия для (4.5) задавались в сечениях $x = x_{Nx}$ и $x = x_{Nx-1}$: $U_N^j = -S_N U_w + S_N^2 Y_j$, $U_{N-1}^j = -S_{N-1} U_w + S_{N-1}^2 Y_j$, $j = 2, \dots, Ny_a - 1$, затем решение искалось маршевым способом, используя метод Ньютона в каждом сечении $x = x_i$. Производная S_i' аппроксимировалась с помощью центральных разностей со вторым порядком точности.

Далее полученные из решения задачи (4.5) значения вертикальной скорости на границе раздела $Y = 1 \{V_i^{Ny_a}, i = 1, \dots, Nx\}$ использовались в качестве граничных условий для численного решения задачи (4.3) в области 1b, где поток направлен в положительном направлении вдоль оси Ox . Для решения краевой задачи (4.3) применялся маршевый метод слева направо, использующий аналогичную разностную схему из [11]:

$$U_i^j \frac{U_{i-2}^j - 4U_{i-1}^j + 3U_i^j}{x_i - x_{i-2}} + V_i^j \frac{U_i^{j+1} - U_i^{j-1}}{Y_{j+1} - Y_{j-1}} = -S_i^2 \left(\frac{dp}{dx} \right)_i + \frac{1}{S_i} \frac{U_i^{j+1} - 2U_i^j + U_i^{j-1}}{(Y_{j+1} - Y_j)^2} + \frac{S_i'}{S_i} (U_i^j)^2, \\ j = 2, \dots, Ny_b - 1; \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{U_{i-2}^{j-1} - 4U_{i-1}^{j-1} + 3U_i^{j-1}}{x_i - x_{i-2}} + \frac{U_{i-2}^j - 4U_{i-1}^j + 3U_i^j}{x_i - x_{i-2}} \right) + \frac{V_i^j - V_i^{j-1}}{Y_j - Y_{j-1}} = 0, \quad j = 2, \dots, Ny_b,$$

$$U_i^1 = 0, \quad V_i^1 = V_i^{Ny_a}, \quad \frac{U_i^{Ny_b-2} - 4U_i^{Ny_b-1} + 3U_i^{Ny_b}}{Y_{Ny_b} - Y_{Ny_b-2}} = S_i^2, \quad i = 3, \dots, Nx.$$

Начальные условия для задачи (4.6) задавались в сечениях $x = x_1$ и $x = x_2$: $U_1^j = -S_1 U_w + S_1^2 Y_j$, $U_2^j = -S_2 U_w + S_2^2 Y_j$, $j = 2, \dots, Ny_b - 1$.

После решения задач (4.5) и (4.6) при заданной форме границы можно вычислить значения касательных напряжений ниже и выше границы раздела противотоков $Y = 1$ и их невязку:

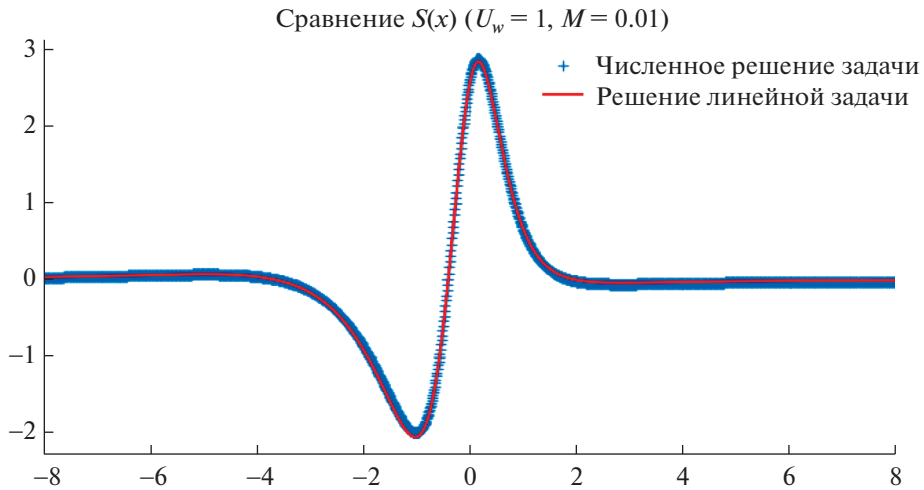
$$\left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{i,-} = \frac{U_i^{Ny_a-2} - 4U_i^{Ny_a-1} + 3U_i^{Ny_a}}{Y_{Ny_a} - Y_{Ny_a-2}}, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{i,+} = \frac{-3U_i^1 + 4U_i^2 - U_i^3}{Y_3 - Y_1}, \quad i = 3, \dots, Nx - 2, \quad (4.7)$$

$$F_i = \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{i,-} - \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{i,+}, \quad i = 3, \dots, Nx - 2. \quad (4.8)$$

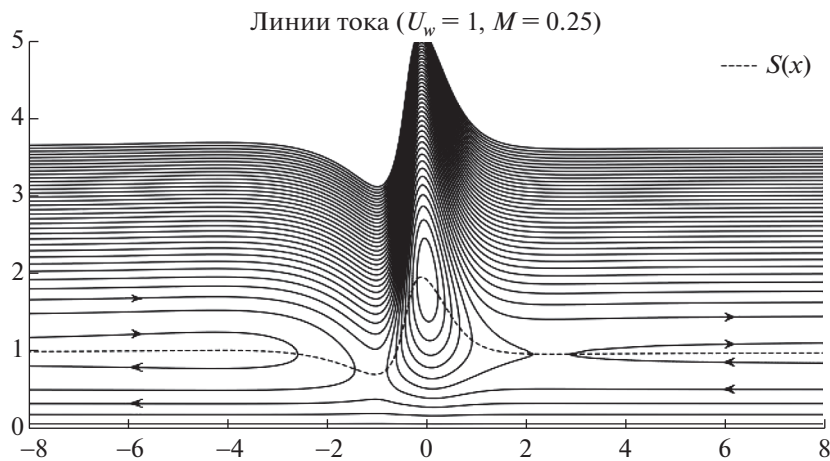
Из условия непрерывности касательного напряжения на границе раздела противотоков (4.4) следует, что величина (4.8) должна обращаться в нуль в каждой точке сетки. В результате в качестве второго этапа расчета можно сформулировать систему неявных уравнений для нахождения искомой формы границы $\{S_i, i = 3, \dots, Nx - 2\}$:

$$F_i(S_3, \dots, S_{Nx-2}) = \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{i,-} - \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{i,+} = 0, \quad i = 3, \dots, Nx - 2. \quad (4.9)$$

Для того чтобы решить систему нелинейных неявных уравнений (4.9) методом Ньютона, возникает нетривиальный вопрос о способе вычисления матрицы Якоби. В работе предлагается по-



Фиг. 3. Сравнение аналитического решения линейной задачи и численного решения нелинейной задачи.



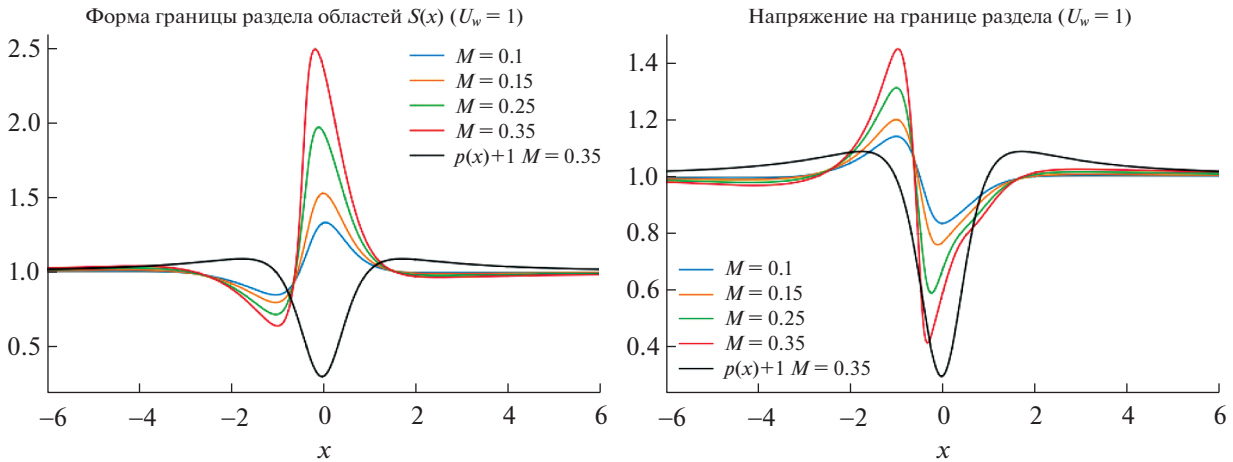
Фиг. 4. Картина линий тока при $U_w = 1, M = 0.25$.

точечно возмущать границу S_i малым возмущением δ и для каждой возмущенной в одной точке границы вычислять вектор невязки (4.9). Разница между возмущенным вектором невязки и невозмущенным вектором невязки (4.9), деленная на δ , даст столбец матрицы Якоби. Повторение указанной операции для всех i позволит полностью заполнить матрицу Якоби на текущей итерации метода Ньютона. При описанном выше способе итерационная формула метода Ньютона будет иметь вид

$$W(\bar{S}^{(k)}) \cdot \Delta \bar{S}^{(k)} = -\bar{F}(\bar{S}^{(k)}), \tag{4.10}$$

где $\bar{S}^{(k)} = [S_3^{(k)}, \dots, S_{N_x-2}^{(k)}]^T$ – вектор значений сеточной функции формы границы на k -й итерации метода Ньютона, $\Delta \bar{S}^{(k)} = \bar{S}^{(k+1)} - \bar{S}^{(k)}$, $\bar{F}(\bar{S}^{(k)}) = [F_3(\bar{S}^{(k)}), \dots, F_{N_x-2}(\bar{S}^{(k)})]^T$ – вектор значений невязок (4.8), $W(\bar{S}^{(k)})$ – матрица Якоби. Компоненты матрицы Якоби $W(\bar{S}^{(k)})$ вычислялись следующим образом:

$$W_{nm}(\bar{S}^{(k)}) = \frac{F_{2+n}(\bar{S}_{2+m}^{(k)}) - F_{2+n}(\bar{S}^{(k)})}{\delta}, \quad n, m = 1, \dots, N_x - 4, \tag{4.11}$$



Фиг. 5. Результаты расчетов для значений параметров $U_w = 1$, $M = 0.1; 0.15; 0.25; 0.35$.

где $F_{2+n}(\bar{S}^{(k)})$ – значение невязки в точке $x = x_{2+n}$ для невозмущенной границы $\bar{S}^{(k)} = [S_3^{(k)}, \dots, S_{2+m}^{(k)}, \dots, S_{N_x-2}^{(k)}]^T$ из (4.8), $F_{2+n}(\bar{S}_{2+m}^{(k)})$ – значение невязки в точке $x = x_{2+n}$, вычисленное для формы границы, возмущенной в точке $x = x_{2+m}$: $\bar{S}_{2+m}^{(k)} = [S_3^{(k)}, \dots, S_{2+m}^{(k)} + \delta, \dots, S_{N_x-2}^{(k)}]^T$.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

С помощью предложенной схемы были выполнены расчеты для различных значений параметра M . Сравнение численного решения для $M = 0.01$ с решением линейной задачи (3.8) показало хорошее совпадение результатов (фиг. 3).

Также была проведена серия расчетов для значений параметров $M = 0.1, 0.15, 0.25, 0.35$, проявляющих нелинейный режим течения. Были построены картины линий тока в вязком подслое (область 1), на которых вблизи линии нулевой скорости видны замкнутая и две разомкнутые висячие отрывные зоны (фиг. 4). Из расчетов следует, что поперечный размер замкнутой висячей зоны отрыва существенно нарастает с увеличением значения параметра M .

Кроме того, численное решение показало заметное уменьшение касательного напряжения и увеличение значения вертикальной скорости в некоторой точке на линии раздела противотоков $\tilde{y} = S(\tilde{x})$ с ростом интенсивности диполя M (фиг. 5). В этой же точке заметно нарастала производная функции $\tilde{y} = S(\tilde{x})$, а сама точка формировалась на фоне падающего давления, что свидетельствует о формировании особенности нового типа.

6. ВЫВОДЫ

Исследована детальная структура течения в вязком подслое с противотоками при заданном градиенте давления. Получены картины висячей замкнутой и двух разомкнутых отрывных зон для всех рассчитанных режимов. В отличие от течений на неподвижной стенке, в которых отрывы присоединены к поверхности, линия нулевой продольной скорости в изученных режимах находится внутри потока и, как следствие, отрывные зоны висячие. Отметим, что для любого $M > 0$ топологическая картина линий тока неизменна и отлична от невозмущенного течения, что подтверждается решением линейной задачи.

Обнаружен значительный вертикальный рост замкнутой зоны отрыва при увеличении заданного давления. Выявлено формирование сингулярности в картине течения вблизи точки минимума напряжения на границе раздела противотоков: с ростом заданного давления, вертикальная скорость заметно возрастает, наклон границы раздела противотоков также заметно возрастает, напряжение трения убывает до малых величин. Заданный градиент давления имеет отрицательную величину в изучаемой точке, что предполагает формирование особенности нового типа. Эта особенность, по-видимому, отлична от сингулярностей, исследованных Гольдштейном и Рубаном.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сычев В.В., Рубан А.И., Сычев Вик.В., Королев Г.Л., Сычев В.В. Асимптотическая теория отрывных течений. Под ред. Сычева В.В. М.: Физматлит, 1987.
2. Timoshin S. Concerning marginal singularities in the boundary-layer flow on a downstream-moving surface // J. of Fluid Mech. 1996. V. 308. P. 171–194.
3. Жук В.И. О локальных рециркуляционных зонах в сверхзвуковом пограничном слое на движущейся поверхности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1982. Т. 22. № 5. С. 249–255.
4. Жук В.И. Волны Толлмина–Шлихтинга и солитоны. М.: Наука, 2001.
5. Ruban A., Araki D., Yapalparvi R., Gajjar J. On unsteady boundary-layer separation in supersonic flow. Part 1. Upstream moving separation point // J. of Fluid Mech. 2011. V. 678. P. 124–155.
6. Yapalparvi R., Van Dommelen L. Numerical solution of unsteady boundary-layer separation in supersonic flow: Upstream moving wall // J. of Fluid Mech. 2012. V. 706. P. 413–430.
7. Timoshin S.N., Thapa P. On-wall and interior separation in a two-fluid boundary layer // J. Engng. Math. 2019. V. 199. P. 1–21.
8. Егоров И.В., Илюхин И.М., Нейланд В.Я. Моделирование взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем над движущейся стенкой // Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии: тезисы докладов XIV Всероссийской школы-конференции молодых ученых (Новосибирск–Шерегеш, 28 февраля–6 марта 2020 г.). Новосибирск: Параллель, 2020. С. 67–68.
9. Сычев Вик.В. О ламинарном отрыве на медленно движущейся вверх по потоку поверхности // Уч. зап. ЦАГИ. 2016. Т. 47. Вып. 3. С. 1–26.
10. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Физматлит, 1979.
11. Kravtsova M.A., Zametaev V.B., Ruban A.I. An effective numerical method for solving viscous-inviscid interaction problems // Philosophic. Transact. 2005. V. 363. № 1830. P. 1157–1167.