ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 6, с. 891–911

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 519.622.2

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ТИХОНОВСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С МНОГОЗОННЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ[1)]

 М. В. Бутузова

119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, Россия

e-mail: m.butuzova@mail.ru

Поступила в редакцию 12.12.2020 г.
Переработанный вариант 29.12.2021 г.
Принята к публикации 11.02.2022 г.

Для системы двух уравнений тихоновского типа, содержащих разные степени малого параметра при производной в одном и другом уравнениях, построена и обоснована асимптотика погранслойного решения начальной задачи в случае двукратного корня вырожденной системы. Характер асимптотики и алгоритм ее построения существенно отличаются от классического случая простого (однократного) корня вырожденной системы. Пограничный слой оказывается многозонным. Библ. 14.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система уравнений тихоновского типа, случай кратного корня вырожденной системы, многозонный пограничный слой.

DOI: 10.31857/S0044466922060060

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу Коши для системы двух уравнений следующего вида (z и y – скалярные функции, $\varepsilon > 0$ – малый параметр):

$$\varepsilon^2 \frac{dz}{dx} = F(x,y,z,\varepsilon), \quad \varepsilon \frac{dy}{dx} = f(x,y,z,\varepsilon), \quad 0 \le x \le X, \tag{1}$$

$$z(0,\varepsilon) = z^0, \quad y(0,\varepsilon) = y^0. \tag{2}$$

В классическом тихоновском случае (см. [1], см. также [2]) уравнение

$$F(x,y,z,0) = 0, \tag{3}$$

получающееся из первого уравнения системы (1) при $\varepsilon = 0$, имеет простой (однократный) корень $z = \varphi(x,y)$, который подставляется в уравнение $f(x,y,z,0) = 0$, и требуется, чтобы получившееся уравнение

$$g(x,y) := f(x,y,\varphi(x,y),0) = 0 \tag{4}$$

также имело простой корень $y = \bar{y}_0(x)$.

Тогда при определенных условиях асимптотическое разложение по параметру ε решения задачи (1), (2) имеет вид

$$z = \bar{z}(x,\varepsilon) + \Pi z(\xi,\varepsilon) + Pz(\zeta,\varepsilon), \quad y = \bar{y}(x,\varepsilon) + \Pi y(\xi,\varepsilon) + Py(\zeta,\varepsilon), \tag{5}$$

где

$$\bar{z}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \bar{z}_i(x) \tag{6}$$

1) Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 18-01-00424).

— регулярная часть асимптотики z — компоненты решения с главным членом $\bar{z}_0(x) = \varphi(x, \bar{y}_0(x))$,

$$\Pi z(\xi, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Pi_i z(\xi) \tag{7}$$

и

$$Pz(\zeta, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P_i z(\zeta) \tag{8}$$

— погранслойные части асимптотики z — компоненты решения, $\xi = \dfrac{x}{\varepsilon}$ и $\zeta = \dfrac{x}{\varepsilon^2}$ — погранслойные переменные, разложения $\bar{y}(x, \varepsilon)$, $\Pi y(\xi, \varepsilon)$ и $Py(\zeta, \varepsilon)$ имеют такой же вид, как (6), (7) и (8). Члены рядов (6), (7) и (8) и аналогичных рядов для y-компоненты решения определяются последовательно по методу А.Б. Васильевой (см. [2]), причем пограничные функции имеют экспоненциальные оценки вида

$$\begin{aligned} |\Pi_i z(\xi)| &\le c\exp(-\kappa\xi), \quad \xi \ge 0, \\ |P_i z(\zeta)| &\le c\exp(-\kappa\zeta), \quad \zeta \ge 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где $c > 0$ и $\kappa > 0$ — здесь и в дальнейшем подходящие положительные числа, не зависящие от ε.

В данной работе задача (1), (2) исследуется в том случае, когда вырожденное уравнение (3) имеет двукратный корень $z = \varphi(x, y)$, а уравнение (4) имеет простой корень $y = \bar{y}_0(x)$. Оказывается, что в этом случае при определенных условиях решение задачи (1), (2) сохраняет погранслойное поведение, однако вид регулярной и погранслойных частей асимптотики, поведение пограничных функций $P_i z(\zeta)$, $P_i y(\zeta)$ и их оценки, а также сам алгоритм определения этих функций существенно изменяются по сравнению со случаем простых корней вырожденных уравнений (3) и (4). В частности, особенностью P-функций является разделение полупрямой $\zeta \ge 0$ на три промежутка (три зоны) с различным характером убывания этих функций в разных зонах.

Аналогичные особенности в асимптотике погранслойного решения начальной задачи были исследованы ранее в [3] для системы тихоновского типа, которая получается из (1), если параметр ε^2 перед $\dfrac{dz}{dx}$ заменить на ε, параметр ε перед $\dfrac{dy}{dx}$ заменить на 1 и сохранить условие двукратного корня вырожденного уравнения (3). В этом случае асимптотика решения содержит регулярную часть и только одну погранслойную часть типа $\Pi z(\xi, \varepsilon)$, $\Pi y(\xi, \varepsilon)$, которая характеризуется трехзонным поведением.

Следует отметить, что другие сингулярно возмущенные задачи с кратным корнем вырожденного уравнения рассматривались в работах других авторов. В частности, в работе [4] исследована краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Случаи кратных корней вырожденного уравнения рассматривались также в работах [5]–[13].

В разд. 2 будут сформулированы условия и описан алгоритм построения асимптотического разложения решения задачи (1), (2) в случае двукратного корня вырожденного уравнения (3), в разд. 3 доказано существование решения с построенной асимптотикой.

2. УСЛОВИЯ И АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ АСИМПТОТИКИ

2.1. Вид асимптотики

Условие А1. Пусть

$$F(x, y, z, \varepsilon) = -h(x, y)(z - \varphi(x, y))^2 + \varepsilon F_1(x, y, z, \varepsilon).$$

При условии А1 вырожденное уравнение (3) имеет двукратный корень $z = \varphi(x, y)$.

Условие А2. Достаточная гладкость функций h, φ, F_1, f.

Как обычно, требуемый порядок гладкости зависит от порядка асимптотики, которую мы хотим построить. Поскольку речь пойдет об асимптотике произвольного порядка, будем считать функции h, φ, F_1 и f бесконечно дифференцируемыми в соответствующих областях.

Условие А3. Уравнение (4) имеет относительно y корень $y = \bar{y}_0(x)$ такой, что

$$\bar{g}_y(x) := \frac{\partial g}{\partial y}(x, \bar{y}_0(x)) < 0, \quad 0 \le x \le X. \tag{10}$$

Неравенство (10) будет играть в дальнейшем принципиальную роль.

Будем строить асимптотику погранслойного решения задачи (1), (2) в виде (5), где $\xi = x/\varepsilon$ и $\zeta = x/\varepsilon^2$ – погранслойные переменные. Однако, как показывает исследование, регулярная и погранслойная части асимптотики будут теперь рядами по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$ (а не ε, как в случае простых корней уравнений (3) и (4)):

$$\bar{z}(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{i}{2}} \bar{z}_i(x), \quad \bar{y}(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{i}{2}} \bar{y}_i(x); \tag{11}$$

$$\Pi z(\xi, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{i}{2}} \Pi_i z(\xi), \quad \Pi y(\xi, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{i}{2}} \Pi_i y(\xi); \tag{12}$$

$$Pz(\zeta, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{i}{2}} P_i z(\zeta), \quad Py(\zeta, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{i}{2}} P_i y(\zeta). \tag{13}$$

Более того, как мы увидим ниже, коэффициенты рядов (12) и (13), т.е. функции $\Pi_i z$, $\Pi_i y$ и $P_i z$, $P_i y$, будут зависеть не только, соответственно, от ξ и ζ, но также и от ε, но с целью уменьшения громоздкости записи зависимости их от ε отмечать не будем, т.е. будем писать $\Pi_i z(\xi)$ вместо $\Pi_i z(\xi, \varepsilon)$ и также для других функций.

Подставляем выражения (5) в систему (1) и представляем правые части уравнений в виде

$$F = \bar{F} + \Pi F + PF, \quad f = \bar{f} + \Pi f + Pf$$

таким же образом, как это делается в стандартном алгоритме Васильевой (см. [2]), т.е.

$$\begin{gathered} \bar{F} = F(x, \bar{y}(z, \varepsilon), \bar{z}(x, \varepsilon), \varepsilon), \\ \Pi F = \left[F\left(x, \bar{y}(x, \varepsilon) + \Pi y(\xi, \varepsilon), \bar{z}(x, \varepsilon) + \Pi z(\xi, \varepsilon), \varepsilon\right) - F\left(x, \bar{y}(x, \varepsilon), \bar{z}(x, \varepsilon), \varepsilon\right)\right]_{x=\varepsilon\xi}, \end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered} PF = \left[F\left(x, \bar{y}(x, \varepsilon) + \Pi y(\xi, \varepsilon) + Py(\zeta, \varepsilon), \bar{z}(x, \varepsilon) + \Pi z(\xi, \varepsilon) + Pz(\zeta, \varepsilon), \varepsilon\right) - \right. \\ \left. - F\left(x, \bar{y}(x, \varepsilon) + \Pi y(\xi, \varepsilon), \bar{z}(x, \varepsilon) + \Pi z(\xi, \varepsilon), \varepsilon\right)\right]_{x=\varepsilon^2\zeta, \xi=\varepsilon\zeta} \end{gathered} \tag{15}$$

и аналогичные выражения имеют $\bar{f}$, Πf и Pf.

После этого разделяем каждое уравнение системы на три равенства:

$$\varepsilon^2 \frac{d\bar{z}}{dx} = \bar{F}, \quad \varepsilon \frac{d\bar{y}}{dx} = \bar{f}, \quad 0 \le x \le 1; \tag{16}$$

$$\varepsilon \frac{d\Pi z}{d\xi} = \Pi F, \quad \frac{d\Pi y}{d\xi} = \Pi f, \quad \xi \ge 0; \tag{17}$$

$$\frac{dPz}{d\zeta} = PF, \quad \frac{1}{\varepsilon}\frac{dPy}{d\zeta} = Pf, \quad \zeta \ge 0. \tag{18}$$

К этим равенствам добавим два равенства, которые получаются подстановкой выражений (5) в начальные условия (2):

$$\bar{z}(0, \varepsilon) + \Pi z(0, \varepsilon) + Pz(0, \varepsilon) = z^0, \tag{19}$$

$$\bar{y}(0, \varepsilon) + \Pi y(0, \varepsilon) + Py(0, \varepsilon) = y^0, \tag{20}$$

а также добавим условие на бесконечности, стандартное при использовании алгоритма Васильевой для систем типа (1):

$$Py(\infty, \varepsilon) = 0. \tag{21}$$

Из равенств (16)–(21) будем извлекать уравнения и дополнительные условия для коэффициентов рядов (11)–(13).

2.2. Регулярная часть асимптотики

Для нахождения коэффициентов регулярной части асимптотики имеем равенства (16). Запишем их, подставляя вместо $\bar{z}$ и $\bar{y}$ ряды (11) и используя представление для функции F из условия A1:

$$\begin{gathered}\varepsilon^2\frac{d}{dx}(\bar{z}_0+\sqrt{\varepsilon}\bar{z}_1+\ldots)=-h(x,\bar{y}_0+\sqrt{\varepsilon}\bar{y}_1+\ldots)\big(\bar{z}_0+\sqrt{\varepsilon}\bar{z}_1+\ldots-\\ -\varphi(x,\bar{y}_0+\sqrt{\varepsilon}\bar{y}_1+\ldots)\big)^2+\varepsilon F_1(x,\bar{y}_0+\sqrt{\varepsilon}\bar{y}_1+\ldots,\bar{z}_0+\sqrt{\varepsilon}\bar{z}_1+\ldots,\varepsilon),\\ \varepsilon\frac{d}{dx}(\bar{y}_0+\sqrt{\varepsilon}\bar{y}_1+\ldots)=f\left(x,\bar{y}_0+\sqrt{\varepsilon}\bar{y}_1+\ldots,\bar{z}_0+\sqrt{\varepsilon}\bar{z}_1+\ldots,\varepsilon\right).\end{gathered}\tag{22}$$

Отсюда стандартным способом, т.е. разложив правые части равенств в ряды по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$ и приравнивая затем коэффициенты при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$ в обеих частях каждого равенства, будем получать системы уравнений для нахождения коэффициентов рядов (11).

В нулевом приближении, т.е. для $\bar{z}_0$, $\bar{y}_0$, получаем систему уравнений

$$0=-h(x,\bar{y}_0)(\bar{z}_0-\varphi(x,\bar{y}_0))^2,\quad 0=f(x,\bar{y}_0,\bar{z}_0,0).\tag{23}$$

Из первого уравнения следует: $\bar{z}_0=\varphi(x,\bar{y}_0)$. Подставив это выражение для $\bar{z}_0$ во второе уравнение, приходим к уравнению $0=f(x,\bar{y}_0,\varphi(x,\bar{y}_0),0)$, т.е. $g(x,\bar{y}_0)=0$, которое в силу условия A3 имеет решение $\bar{y}_0=\bar{y}_0(x)$, $0\le x\le X$. Таким образом, найдены главные члены регулярной части асимптотики

$$\bar{y}_0(x)\quad\text{и}\quad\bar{z}_0(x)=\varphi(x,\bar{y}_0(x)).\tag{24}$$

Условие A4. Пусть

$$\bar{h}(x):=h(x,\bar{y}_0(x))>0,\quad 0\le x\le X.$$

Это условие понадобится в дальнейшем.

Разложение правой части первого равенства в (22) не содержит членов порядка $\sqrt{\varepsilon}$. Приравнивая нулю коэффициент при ε этого разложения, и также коэффициент при $\sqrt{\varepsilon}$ разложения правой части второго равенства, получаем систему уравнений относительно $\bar{z}_1$, $\bar{y}_1$:

$$-\bar{h}(x)(\bar{z}_1-\bar{\varphi}_y(x)\bar{y}_1)^2+\bar{F}_1(x)=0,\quad\bar{f}_y(x)\bar{y}_1+\bar{f}_z(x)\bar{z}_1=0,\tag{25}$$

где $\bar{h}(x)>0$ в силу условия A4, $\bar{\varphi}_y(x):=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,\bar{y}_0(x))$, $\bar{F}_1(x):=F_1(x,\bar{y}_0(x),\bar{z}_0(x),0)$ и такой же смысл имеют обозначения $\bar{f}_y(x)$ и $\bar{f}_z(x)$.

Необходимым условием разрешимости первого уравнения системы (25) является неравенство $\bar{F}_1(x)\ge 0$. Потребуем выполнения более жесткого условия.

Условие A5. Пусть $\bar{F}_1(x)>0$, $0\le x\le X$.

Тогда из первого уравнения (25) получаем

$$\bar{z}_1-\bar{\varphi}_y(x)\bar{y}_1=\left[\bar{h}^{-1}(x)\bar{F}_1(x)\right]^{1/2}=:a(x)>0,\quad 0\le x\le X,\tag{26}$$

либо $\bar{z}_1-\bar{\varphi}_y(x)\bar{y}_1=-a(x)<0$. Как будет видно из дальнейшего, для того, чтобы решение задачи (1), (2) имело погранслойный характер, нужно взять первое решение, т.е.

$$\bar{z}_1=\bar{\varphi}_y(x)\bar{y}_1+a(x).$$

Подставляя это выражение для $\bar{z}_1$ во второе уравнение (25), получаем линейное алгебраическое уравнение относительно $\bar{y}_1$:

$$\left[\bar{f}_y(x)+\bar{f}_z(x)\bar{\varphi}_y(x)\right]\bar{y}_1=-\bar{f}_z(x)a(x).\tag{27}$$

Коэффициент при $\bar{y}_1$ равен $\bar{g}_y(x) < 0$ (см. (4) и условие А3), поэтому

$$\bar{y}_1(x) = -\bar{g}_y^{-1}(x)\bar{f}_z(x)a(x),$$

$$\bar{z}_1(x) = -\bar{\varphi}_y(x)\bar{g}_y^{-1}(x)\bar{f}_z(x)a(x) + a(x) = \bar{g}_y^{-1}(x)\bar{f}_y(x)a(x).$$

Для $\bar{z}_i$, $\bar{y}_i$, $i \geq 2$, из (22) получаются системы линейных уравнений вида

$$\begin{aligned} \bar{z}_i - \bar{\varphi}_y(x)\bar{y}_i &= \left[2\bar{h}(x)a(x)\right]^{-1} G_i(x), \\ \bar{f}_y(x)\bar{y}_i + \bar{f}_z(x)\bar{z}_i &= g_i(x), \end{aligned} \tag{28}$$

где функция $a(x)$ определена в (26), а $G_i(x)$ и $g_i(x)$ – известные функции, выражающиеся рекуррентно через $\bar{z}_j(x)$, $\bar{y}_j(x)$ с номерами $j < i$. Так как определитель системы (28) равен $\bar{f}_y(x) + \bar{f}_z(x)\bar{\varphi}_y(x) = \bar{g}_y(x) \neq 0$ (см. условие А3), то из этой системы однозначно определяются $\bar{z}_i(x)$ и $\bar{y}_i(x)$.

Итак, регулярная часть асимптотики решения построена. Отметим, что частичные суммы

$$\overset{(n)}{\bar{z}}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{\frac{i}{2}}\bar{z}_i(x) \quad \text{и} \quad \overset{(n)}{\bar{y}}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{\frac{i}{2}}\bar{y}_i(x)$$

рядов (11) при подстановке их в равенства (16) вместо $\bar{z}$ и $\bar{y}$ удовлетворяют первому равенству в (16) с точностью порядка $O\left(\varepsilon^{\frac{n+2}{2}}\right)$, а второму – с точностью порядка $O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right)$, т.е.

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2 \frac{d\overset{(n)}{\bar{z}}}{dx} - F(x, \overset{(n)}{\bar{y}}, \overset{(n)}{\bar{z}}, x) O\left(\varepsilon^{\frac{n+2}{2}}\right), \quad 0 \leq x \leq X, \\ &\varepsilon \frac{d\overset{(n)}{\bar{y}}}{dx} - f(x, \overset{(n)}{\bar{y}}, \overset{(n)}{\bar{z}}, \varepsilon) O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \quad 0 \leq x \leq X. \end{aligned} \tag{29}$$

2.3. Погранслойные части асимптотики

Для нахождения коэффициентов погранслойных частей асимптотики, т.е. пограничных функций $\Pi_i z(\xi)$, $\Pi_i y(\xi)$, $P_i z(\zeta)$, $P_i y(\zeta)$ имеем равенства (17)–(21). Запишем равенства (17), используя выражение (14) для ΠF и аналогичное выражение для Πf, учитывая вид функции F и подставляя вместо $\bar{z}$ и $\bar{y}$, Πz и Πy ряды (11) и (12):

$$\begin{aligned} &\varepsilon \frac{d}{d\xi}\left(\Pi_0 z + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 z + \ldots\right) = -h\left(\varepsilon\xi, \bar{y}_0(\varepsilon\xi) + \sqrt{\varepsilon}\bar{y}_1(\varepsilon\xi) + \ldots + \Pi_0 y + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 y + \ldots\right) \times \\ &\times \Big[\bar{z}_0(\varepsilon\xi) + \sqrt{\varepsilon}\bar{z}_1(\varepsilon\xi) + \ldots + \Pi_0 z + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 z + \ldots - \varphi\left(\varepsilon\xi, \bar{y}_0(\varepsilon\xi) + \sqrt{\varepsilon}\bar{y}_1(\xi) + \ldots +\right. \\ &\left. + \Pi_0 y + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 y + \ldots\right)\Big]^2 + h\left(\varepsilon\xi, \bar{y}_0(\varepsilon\xi) + \sqrt{\varepsilon}\bar{y}_1(\varepsilon\xi) + \ldots\right)\Big[\bar{z}_0(\varepsilon\xi) + \sqrt{\varepsilon}\bar{z}_1(\varepsilon\xi) + \ldots - \\ &- \varphi\left(\varepsilon\xi, \bar{y}_0(\varepsilon\xi) + \sqrt{\varepsilon}\bar{y}_1(\varepsilon\xi) + \ldots\right)\Big]^2 + \varepsilon\Pi F_1, \quad \xi \geq 0; \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\xi}\left(\Pi_0 y + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 y + \ldots\right) = f\left(\varepsilon\xi, \bar{y}_0(\varepsilon\xi) + \sqrt{\varepsilon}\bar{y}_1(\varepsilon\xi) + \ldots + \Pi_0 y + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 y + \ldots, \bar{z}_0(\varepsilon\xi) + \sqrt{\varepsilon}\bar{z}_1(\varepsilon\xi) + \right. \\ &\left. + \ldots + \Pi_0 z + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 z + \ldots, \varepsilon\right) - f\left(\varepsilon\xi, \bar{y}_0(\varepsilon\xi) + \sqrt{\varepsilon}\bar{y}_1(\varepsilon\xi) + \ldots, \bar{z}_0(\varepsilon\xi) + \sqrt{\varepsilon}\bar{z}_1(\varepsilon\xi) + \ldots, \varepsilon\xi\right), \quad \xi \geq 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Равенства (18) запишем в аналогичном виде, но с тем отличием, что будем использовать еще одну погранслойную переменную $\eta = \dfrac{x}{\varepsilon^{3/2}} = \dfrac{\xi}{\sqrt{\varepsilon}}$ и обе части второго равенства умножим на ε:

$$\begin{gathered}
\frac{d}{d\zeta}\left(P_0 z + \sqrt{\varepsilon}P_1 z + \ldots\right) = -h\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\eta, \bar{y}_0\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\eta\right) + \ldots + \Pi_0 y(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 y(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \ldots + P_0 y + \sqrt{\varepsilon}P_1 y + \ldots\right)\times \\
\times\left[\bar{z}_0\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\eta\right) + \sqrt{\varepsilon}\bar{z}_1\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\eta\right) + \ldots + \Pi_0 z(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 z(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \ldots + P_0 z + \sqrt{\varepsilon}P_1 z + \ldots -\right. \\
\left.- \varphi\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\eta, \bar{y}_0\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\eta\right) + \sqrt{\varepsilon}\bar{y}_1\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\eta\right) + \ldots + \Pi_0 y(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 y(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \ldots + P_0 y + \sqrt{\varepsilon}P_1 y + \ldots\right)\right]^2 - \\
- h\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\eta, \bar{y}_0\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\eta\right) + \sqrt{\varepsilon}\bar{y}_1\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\eta\right) + \ldots + \Pi_0 y(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 y(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \ldots\right)\left[\bar{z}_0\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\eta\right) + \sqrt{\varepsilon}\bar{z}_1\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\eta\right) + \ldots +\right. \\
+ \Pi_0 z(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 z(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \ldots - \varphi\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\eta, \bar{y}_0\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\eta\right) + \sqrt{\varepsilon}\bar{y}_1\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\eta\right) + \ldots +\right. \\
\left.\left.+ \Pi_0 y(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 y(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \ldots\right)\right]^2 + \varepsilon P_1 F, \quad \zeta \geq 0;
\end{gathered} \tag{32}$$

$$\begin{gathered}
\frac{d}{d\zeta}\left(P_0 y + \sqrt{\varepsilon}P_1 y + \ldots\right) = \varepsilon\left[f\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\eta,\ \bar{y}_0\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\eta\right) + \sqrt{\varepsilon}\bar{y}_1\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\eta\right) + \ldots + \Pi_0 y(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 y(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \ldots +\right.\right. \\
+ P_0 y + \sqrt{\varepsilon}P_1 y + \ldots,\ \bar{z}_0\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\eta\right) + \sqrt{\varepsilon}\bar{z}_1\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\eta\right) + \ldots + \Pi_0 z(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 z(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \ldots + P_0 z + \\
\left.+ \sqrt{\varepsilon}P_1 z + \ldots,\ \varepsilon\right) - f\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\eta,\ \bar{y}_0\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\eta\right) + \sqrt{\varepsilon}\bar{y}_1\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\eta\right) + \ldots + \Pi_0 y(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 y(\sqrt{\varepsilon}\eta) +\right. \\
\left.\left.+ \ldots,\ \bar{z}_0\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\eta\right) + \sqrt{\varepsilon}\bar{z}_1\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\eta\right) + \ldots + \Pi_0 z(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 z(\sqrt{\varepsilon}\eta) + \ldots,\ \varepsilon\right)\right], \quad \zeta \geq 0.
\end{gathered} \tag{33}$$

Подставим также ряды (11), (12), (13) в равенства (19), (20) и условие на бесконечности (21):

$$\bar{z}_0(0) + \sqrt{\varepsilon}\bar{z}_1(0) + \ldots + \Pi_0 z(0) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 z(0) + \ldots + P_0 z(0) + \sqrt{\varepsilon}P_1 z(0) + \ldots = z^0, \tag{34}$$

$$\bar{y}_0(0) + \sqrt{\varepsilon}\bar{y}_1(0) + \ldots + \Pi_0 y(0) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 y(0) + \ldots + P_0 y(0) + \sqrt{\varepsilon}P_1 y(0) + \ldots = y^0, \tag{35}$$

$$P_0 y(\infty) + \sqrt{\varepsilon}P_1 y(\infty) + \ldots = 0. \tag{36}$$

Из равенств (30)–(33) будем извлекать уравнения, а из равенств (34)–(36) – начальные условия и условие на бесконечности для последовательного определения пограничных функций. На каждом шаге будут определены четыре пограничные функции, причем порядок их нахождения на любом i-м шаге будет таким: сначала определяется функция $P_i y(\zeta)$, затем функции $\Pi_i y(\xi)$ и $\Pi_i z(\xi)$ и, наконец, функция $P_i z(\zeta)$. При этом алгоритм формирования уравнений для функций $P_i z(\zeta)$ и $P_i y(\zeta)$ будет существенно отличаться от стандартного алгоритма Васильевой. На начальном шаге из (33) и (36) получаем задачу для $P_0 y(\zeta)$:

$$\frac{dP_0 y}{d\zeta} = 0, \quad \zeta \geq 0; \quad P_0 y(\infty) = 0,$$

откуда следует, что $P_0 y(\zeta) = 0$, $\zeta \geq 0$.

Из (30) и (31) в нулевом приближении имеем уравнения

$$0 = h(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y)\left[\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z - \varphi(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y)\right]^2 - h(0, \bar{y}_0(0))\left[\bar{z}_0(0) - \varphi(0, \bar{y}_0(0))\right]^2,$$

$$\frac{d\Pi_0 y}{d\xi} = f(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, 0) - f(0, \bar{y}_0(0), \bar{z}_0(0), 0), \quad \xi \geq 0.$$

В силу (24) и (23) вторые слагаемые в правых частях этих уравнений равны нулю, поэтому из первого уравнения находим

$$\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z = \varphi(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y), \tag{37}$$

и после подстановки этого выражения в правую часть второго уравнения получаем уравнение для $\Pi_0 y(\xi)$:

$$\frac{d\Pi_0 y}{d\xi} = f(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, \varphi(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y), 0), \quad \xi \geq 0.$$

Его можно записать в виде (см. (4))

$$\frac{d\Pi_0 y}{d\xi} = g(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y), \quad \xi \geq 0. \tag{38}$$

Начальное условие для $\Pi_0 y(\xi)$ следует из (35) с учетом того, что $P_0 y(0) = 0$:

$$\Pi_0 y(0) = y^0 - \bar{y}_0(0). \tag{39}$$

В силу (10) имеем $g_y(0, \bar{y}_0(0)) < 0$, поэтому $\Pi_0 y = 0$ является асимптотически устойчивой точкой покоя уравнения (38). Чтобы решение $\Pi_0 y(\xi)$ задачи (38), (39) стремилось к нулю при $\xi \to \infty$, потребуем выполнения следующего условия.

Условие A6. Начальное значение $y^0 - \bar{y}_0(0)$ функции $\Pi_0 y(\xi)$ принадлежит области притяжения асимптотически устойчивой точки покоя $\Pi_0 y = 0$ уравнения (38).

При этом условии функция $\Pi_0 y(\xi)$ монотонно стремится к нулю при $\xi \to \infty$ и имеет экспоненциальную оценку

$$|\Pi_0 y(\xi)| \leq c \exp(-\kappa\xi), \quad \xi \geq 0. \tag{40}$$

Как обычно, для упрощения записи одними и теми же буквами c и κ будем обозначать в разных оценках подходящие положительные числа, не зависящие от ε.

Таким образом, функция $\Pi_0 y(\xi)$ определена, и это позволяет найти $\Pi_0 z(\xi)$ из равенства (37). Учитывая, что $\bar{z}_0(0) = \varphi(0, \bar{y}_0(0))$ (см. (24)), запишем $\Pi_0 z(\xi)$ в виде

$$\Pi_0 z(\xi) = \varphi(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi)) - \varphi(0, \bar{y}_0(0)).$$

Отсюда следует, что для $\Pi_0 z(\xi)$ справедлива оценка типа (40).

Для дальнейшего нахождения пограничных функций нам понадобятся дополнительные требования, связанные с функциями $\Pi_0 y(\xi)$ и $\Pi_0 z(\xi)$.

Введем две функции, зависящие от $\Pi_0 y(\xi)$ и $\Pi_0 z(\xi)$:

$$h(\xi) := h(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi)) \tag{41}$$

и

$$\begin{aligned} b(\xi) &:= F_1(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi), \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(\xi), 0) - \frac{d\Pi_0 z}{d\xi} = \\ &= F_1(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi), \varphi(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi)), 0) - \\ &\quad - \varphi_y(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi)) g(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi)). \end{aligned} \tag{42}$$

Как мы увидим, на следующих шагах алгоритма принципиальную роль будут играть неравенства

$$h(\xi) \geq c > 0, \quad b(\xi) \geq c > 0, \quad \xi \geq 0. \tag{43}$$

Чтобы обеспечить эти неравенства, введем следующее требование.

Условие A7. Пусть

$$H(y) := h(0, y) > 0 \quad \text{при} \quad y \in [y^0, \bar{y}_0(0)],$$

$$B(y) := F_1(0, y, \varphi(0, y), 0) - \varphi_y(0, y) g(0, y) > 0 \quad \text{при} \quad y \in [y^0, \bar{y}_0(0)].$$

Так как

$$h(\xi) = H(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi)), \quad b(\xi) = B(\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi))$$

и функция $\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi)$ принимает значения от y^0 до $\bar{y}_0(0)$ при $\xi \geq 0$ в силу монотонного изменения функции $\Pi_0 y(\xi)$ от значения $(y^0 - \bar{y}_0(0))$ до нуля при изменении ξ от 0 до ∞, то условие A7 обеспечивает выполнение неравенств (43).

Отметим, что условие A5 и условие A7 в отношении функции $B(y)$ показывают, что в случае двукратного корня вырожденного уравнения (3) (в отличие от случая простого корня) принципиальную роль в построении (и, как увидим далее, в обосновании) погранслойной асимптотики решения задачи (1), (2) играют члены порядка $O(\varepsilon)$, входящие в правую часть первого уравнения системы (1) (а именно, функция $\varepsilon F_1(x, y, z, 0)$).

Перейдем к определению пограничной функции $P_0 z(\zeta)$. Поскольку функция $\Pi_0 z(\xi)$ известна, из равенства (34) находим начальное значение функции $P_0 z(\zeta)$ (используем также равенство (37)):

$$P_0 z(0) = z^0 - \bar{z}_0(0) - \Pi_0 z(0) = z^0 - \varphi(0, y^0) =: P^0. \tag{44}$$

Уравнение для $P_0 z(\zeta)$ получим из (32). Стандартный алгоритм, при котором приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях ε в разложениях левой и правой частей равенства (32), дает уравнение

$$\frac{dP_0 z}{d\zeta} = -h(0, y^0)(P_0 z)^2, \quad \zeta \geq 0. \tag{45}$$

Поскольку $h(0, y^0) > 0$ (в силу условия A7), то решение $P_0 z(\zeta)$ уравнения (45) с начальным условием (44) будет стремиться к нулю при $\zeta \to \infty$, т.е. будет удовлетворять стандартному требованию к пограничным функциям, если только $P^0 \geq 0$. Потребуем выполнения более жесткого условия.

Условие A8. Пусть

$$P^0 := z^0 - \varphi(0, y^0) > 0.$$

Отметим, что если $P^0 = 0$, то $P_0 z(\zeta) \equiv 0$, и этот случай требует отдельного рассмотрения. При условии A8 решение задачи (45), (44) имеет вид

$$P_0 z(\zeta) = \frac{P^0}{1 + h(0, y^0) P^0 \zeta}, \quad \zeta \geq 0. \tag{46}$$

Следовательно, $P_0 z(\zeta) \to 0$ при $\zeta \to \infty$ степенным образом: $P_0 z(\zeta) = O\left(\frac{1}{1+\zeta}\right)$ при $\zeta \to \infty$.

Однако, как показывает исследование, компонента решения, зависящая от погранслойной переменной ζ, т.е. функция $P_0 z(\zeta)$ и другие члены рядов (13), ведет себя более сложным образом, чем функция (46). Для правильного описания этой компоненты нужно изменить уравнение для $P_0 z(\zeta)$ и также нестандартным образом формировать уравнения для следующих функций $P_i z$ и $P_i y$.

Прежде чем внести изменения в уравнение (45) для $P_0 z(\zeta)$, рассмотрим уравнения для функций $\Pi_1 z(\xi)$, $\Pi_1 y(\xi)$, которые получаются на следующем шаге из (30) и (31). Именно с этими функциями будет связано изменение уравнения (45).

Из (30) в первом приближении, т.е. приравнивая в разложениях обеих частей равенства коэффициенты при ε, получаем (заметим, что разложения левой и правой частей в (30) не содержат членов порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$):

$$\begin{aligned}\frac{d\Pi_0 z}{d\xi} = -h(\xi)\left[\bar{z}_1(0) + \Pi_1 z - \varphi_y(\xi)(\bar{y}_1(0) + \Pi_1 y)\right]^2 + \bar{h}(0)\left[\bar{z}_1(0) - \bar{\varphi}_y(0)\bar{y}_1(0)\right] + \\ + F_1(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi), \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(\xi), 0) - \bar{F}_1(0), \quad \xi \geq 0,\end{aligned} \tag{47}$$

где $h(\xi)$ определена в (41), $\varphi_y(\xi) := \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi))$. Учитывая первое равенство в (25) и выражение (42) для функции $b(\xi)$, запишем (47) в виде

$$h(\xi)\left[\bar{z}_1(0) + \Pi_1 z - \varphi_y(\xi)(\bar{y}_1(0) + \Pi_1 y)\right]^2 = b(\xi). \tag{48}$$

Так как $h(\xi) \geq c > 0$ и $b(\xi) \geq c > 0$ (см. (43)), то

$$\sigma(\xi) := \left[h^{-1}(\xi)b(\xi)\right]^{1/2} \geq c > 0, \quad \xi \geq 0. \tag{49}$$

Поэтому выражение в квадратных скобках в левой части (48) равно либо $\sigma(\xi)$, либо $-\sigma(\xi)$. Из дальнейшего станет ясно, что нужно взять положительное значение, т.е.

$$\bar{z}_1(0) + \Pi_1 z - \varphi_y(\xi)(\bar{y}_1(0) + \Pi_1 y) = \sigma(\xi). \tag{50}$$

Тогда

$$\bar{z}_1(0) + \Pi_1 z = \varphi_y(\xi)(\bar{y}_1(0) + \Pi_1 y) + \sigma(\xi). \tag{51}$$

Отметим также, что в силу (42) и (26)

$$\sigma(\infty) = \left[h^{-1}(\infty)b(\infty)\right]^{1/2} = \left[\bar{h}^{-1}(0)\bar{F}_1(0)\right]^{1/2} = a(0). \tag{52}$$

Из (31) в первом приближении получаем уравнение

$$\frac{d\Pi_1 y}{d\xi} = f_y(\xi)(\bar{y}_1(0) + \Pi_1 y) + f_z(\xi)(\bar{z}_1(0) + \Pi_1 z), \quad \xi \geq 0,$$

где

$$f_y(\xi) := \frac{\partial f}{\partial y}(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi), \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(\xi), 0)$$

и такой же смысл имеет обозначение $f_z(\xi)$. Подставляя в правую часть уравнения выражение (51) для $\bar{z}_1(0) + \Pi_1 z$, приходим к уравнению для $\Pi_1 y(\xi)$:

$$\frac{d\Pi_1 y}{d\xi} = g_y(\xi)\Pi_1 y + \pi_1(\xi), \quad \xi \geq 0, \tag{53}$$

где

$$g_y(\xi) := g_y(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi)), \quad \pi_1(\xi) = \left[f_y(\xi) + f_z(\xi)\varphi_y(\xi)\right]\bar{y}_1(0) + f_z(\xi)\sigma(\xi).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\pi_1(\infty) &= \left[f_y(\infty) + f_z(\infty)\varphi_y(\infty)\right]\bar{y}_1(0) + f_z(\infty)\sigma(\infty) = \\ &= \left[\bar{f}_y(0) + \bar{f}_z(0)\bar{\varphi}_y(0)\right]\bar{y}_1(0) + \bar{f}_z(0)a(0) = 0 \quad \text{(см. (27))},\end{aligned}$$

поэтому

$$|\pi_1(\xi)| \leq c\exp(-\kappa\xi), \quad \xi \geq 0. \tag{54}$$

Начальное условие для $\Pi_1 y(\xi)$ следует из (35):

$$\Pi_1 y(0) = -\bar{y}_1(0) - P_1 y(0). \tag{55}$$

Однако нам не известна пока величина $P_1 y(0)$, поэтому мы не можем на этом этапе определить функцию $\Pi_1 y(\xi)$, а значит, и функцию $\Pi_1 z(\xi)$, которая выражается через $\Pi_1 y(\xi)$ по формуле (51).

Вернемся к уравнению (45) для $P_0 z(\zeta)$, которое мы хотим модернизировать. Добавим в правую часть уравнения слагаемые

$$-h(0, y^0) \cdot 2\sqrt{\varepsilon}\left[\bar{z}_1(0) + \Pi_1 z(0) - \varphi_y(0, y^0)(\bar{y}_1(0) + \Pi_1 y(0))\right]P_0 z,$$

содержащиеся в разложении правой части равенства (32). Хотя функции $\Pi_1 y(\xi)$ и $\Pi_1 z(\xi)$ еще не определены, но число, заключенное в квадратных скобках, нам известно – это $\sigma(0) = [h^{-1}(0)b(0)]^{1/2} > 0$ (см. (50) и (49)). Уравнение для $P_0 z(\zeta)$ принимает вид:

$$\frac{dP_0 z}{d\zeta} = -h(0, y^0)\left[(P_0 z)^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\sigma(0)P_0 z\right], \quad \zeta \geq 0. \tag{56}$$

Решение уравнения (56) с начальным условием (44) находится в явном виде:

$$P_0 z(\zeta) = \frac{2\sqrt{\varepsilon}\sigma P^0 \exp(-2\sqrt{\varepsilon}h\sigma\zeta)}{2\sqrt{\varepsilon}\sigma + P^0[1 - \exp(-2\sqrt{\varepsilon}h\sigma\zeta)]}, \quad \zeta \geq 0, \tag{57}$$

где $h := h(0, y^0)$, $\sigma := \sigma(0)$. Отметим, что $P_0 z(\zeta) > 0$ при $\zeta \geq 0$, это будет играть важную роль при обосновании асимптотики.

Несложный анализ выражения (57) показывает, что $P_0 z(\zeta)$ монотонно стремится к нулю при $\zeta \to \infty$, но убывание функции $P_0 z(\zeta)$ имеет различный характер на разных промежутках изменения ζ. Можно разделить полупрямую $\zeta \geq 0$ на три зоны.

Первой зоной является промежуток $0 \leq \zeta \leq \varepsilon^{-\gamma}$, где в качестве γ можно взять любое положительное число, меньшее, чем $\frac{1}{2}$. В этой зоне $P_0 z(\zeta) = O\left(\frac{1}{1+\zeta}\right)$, т.е. функция $P_0 z(\zeta)$ убывает с ростом ζ степенным образом так же, как функция (46).

Промежуток $\varepsilon^{-\gamma} \leq \zeta \leq \varepsilon^{-1/2}$ является второй (переходной) зоной. Здесь происходит изменение характера убывания функции $P_0 z(\zeta)$ и изменение масштаба погранслойной переменной.

И, наконец, в третьей зоне, где $\zeta \geq \varepsilon^{-1/2}$, функция $P_0 z(\zeta)$ имеет оценку

$$P_0 z(\zeta) = O(\sqrt{\varepsilon})\exp(-k\eta), \quad \text{где} \quad k := 2h\sigma > 0, \quad \eta = \sqrt{\varepsilon}\zeta = \frac{x}{\varepsilon^{3/2}},$$

т.е. новая погранслойная переменная η, возникшая в третьей зоне, имеет иной масштаб по сравнению со старой переменной ζ, а функция $P_0 z$ убывает в третьей зоне экспоненциально при $\eta \to \infty$.

Отметим, что принципиальную роль в описанном поведении функции $P_0 z(\zeta)$ играет положительность чисел $h = h(0, y^0)$ и $\sigma = \sigma(0)$.

Итак, на начальном шаге алгоритма определены функции $P_0 y$, $\Pi_0 y$, $\Pi_0 z$, $P_0 z$, т.е. главные члены рядов (12) и (13). Из (57) для $P_0 z(\zeta)$ следует оценка

$$P_0 z(\zeta) \leq cP_\kappa(\zeta), \quad \zeta \geq 0, \tag{58}$$

где

$$P_\kappa(\zeta) = \frac{\sqrt{\varepsilon}\exp(-\sqrt{\varepsilon}\kappa\zeta)}{1 + \sqrt{\varepsilon} - \exp(-\sqrt{\varepsilon}\kappa\zeta)}, \quad \zeta \geq 0,$$
$$0 < \kappa \leq k = 2h\sigma.$$

Функция $P_\kappa(\zeta)$ имеет такое же трехзонное поведение, как и функция $P_0 z(\zeta)$. Она будет играть роль эталонной (оценочной) функции для коэффициентов $P_i z(\zeta)$, $P_i y(\zeta)$ рядов (13) аналогично тому, как функция $\exp(-\kappa\zeta)$ была эталонной функцией в случае простого корня уравнения (3) (см. (9)), т.е. все функции $P_i z(\zeta)$ и $P_i y(\zeta)$ будут иметь оценки типа (58):

$$|P_i z(\zeta)| \leq cP_\kappa(\zeta), \quad |P_i y(\zeta)| \leq cP_\kappa(\zeta), \quad \zeta \geq 0, \tag{59}$$

с различными, вообще говоря, c и κ для различных i. Чтобы обеспечить эти оценки, будем формировать уравнения для $P_i z(\zeta)$, $P_i y(\zeta)$, $i = 1, 2, \ldots$, нестандартным способом.

В правую часть уравнения для $P_iz(\zeta)$ наряду с членом $-2h(0,y^0)P_0z(\zeta)P_iz$ включим слагаемое $-2h(0,y^0)\sqrt{\varepsilon}\sigma(0)P_iz$, аналогичное слагаемому $-2h(0,y^0)\sqrt{\varepsilon}\sigma(0)P_0z$, добавленному в уравнение (45) (см. (56)). Уравнение для $P_iz(\zeta)$, $i = 1,2,\ldots$, будет иметь вид

$$\frac{dP_iz}{d\zeta} = -2h(0,y^0)\left(P_0z(\zeta) + \sqrt{\varepsilon}\sigma(0)\right)P_iz + p_i(\zeta,\varepsilon), \quad \zeta \ge 0, \tag{60}$$

где $p_i(\zeta,\varepsilon)$ рекуррентно выражаются через $P_jz(\zeta)$ с номерами $j < i$ и $P_jy(\zeta)$ с номерами $j \le i$ и формируются нестандартным способом. Опишем этот способ.

Разложив правую часть (32) в ряд по степеням $\sqrt{\varepsilon}$, обозначим коэффициент при $\varepsilon^{\frac{i}{2}}$ через $\beta_i(\eta, P_0z,\ldots,P_{i-1}z, P_1y,\ldots,P_iy)$ (в этот коэффициент мы не включаем слагаемое $-2h(0,y^0)P_0z(\zeta)P_iz$, оно уже вошло в правую часть уравнения (60)). Если какое-то слагаемое (обозначим его $\tilde{\beta}_i(\eta, P_0z,\ldots,P_{i-1}z, P_1y\ldots,P_iy)$), входящее в β_i, имеет оценку по модулю, содержащую не менее двух сомножителей из числа функций $|P_0z|,\ldots,|P_{i-1}z|$, $|P_1y|,\ldots,|P_iy|$ (например, $|\tilde{\beta}_i| \le q(\eta)|P_kz(\zeta)|\cdot|P_ly(\zeta)|$, $k \le i-1$, $l \le i$), то это слагаемое включаем в $p_i(\zeta,\varepsilon)$; если же оценка $|\tilde{\beta}_i|$ содержит только один сомножитель указанного типа, то слагаемое $\sqrt{\varepsilon}\tilde{\beta}_i$ включаем в $p_{i-1}(\zeta,\varepsilon)$, т.е. это слагаемое войдет в правую часть уравнения для $P_{i-1}z(\zeta)$. Кроме того, переменную η, входящую в выражение для β_i, заменяем на $\sqrt{\varepsilon}\zeta$.

В качестве примера выпишем выражение для $p_1(\zeta,\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} p_1(\zeta,\varepsilon) = 2h(0,y^0)\Big[\varphi_y(0,y^0)P_0z(\zeta)P_1y(\zeta) - \sqrt{\varepsilon}(a_1P_0z(\zeta) - \sigma(0)\varphi_y(0,y^0)P_1y(\zeta))\Big] - \\ - h_y(0,y^0)\left(a_2 + \sqrt{\varepsilon}a_3\zeta + P_1y(\zeta)\right)(P_0z(\zeta))^2 + \\ + \sqrt{\varepsilon}\Big[F_1(0,y^0,\varphi(0,y^0) + P_0z(\zeta),0) - F_1(0,y^0,\varphi(0,y^0),0)\Big], \end{aligned} \tag{61}$$

где a_1, a_2, a_3 — известные числа.

Уравнения для $P_iy(\zeta)$, $i = 1,2,\ldots$, извлекаемые из (33), имеют вид

$$\frac{dP_iy}{d\zeta} = q_i(\zeta,\varepsilon), \quad \zeta \ge 0, \tag{62}$$

где правые части $q_i(\zeta,\varepsilon)$ выражаются рекуррентно через известные к моменту рассмотрения этого уравнения на i-м шаге функции $P_jz(\zeta)$ и $P_jy(\zeta)$ с номерами $j < i$ и формируются по тому же принципу, что и функции $p_i(\zeta,\varepsilon)$. В частности, функция $q_1(\zeta,\varepsilon)$ имеет вид

$$q_1(\zeta,\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\Big[f(0,y^0,\varphi(0,y^0) + P_0z(\zeta),0) - f(0,y^0,\varphi(0,y^0),0)\Big]. \tag{63}$$

Рассмотрим теперь шаг алгоритма, на котором определяются пограничные функции с номером 1.

Для $P_1y(\zeta)$ имеем уравнение (62) при $i = 1$, где $q_1(\zeta,\varepsilon)$ выражается формулой (63) и имеет, очевидно, оценку

$$|q_1(\zeta,\varepsilon)| \le c\sqrt{\varepsilon}P_0z(\zeta) \le c\sqrt{\varepsilon}P_\kappa(\zeta), \quad \zeta \ge 0,$$

последнее неравенство получено с учетом (58). Из (36) для $P_1y(\zeta)$ получаем условие

$$P_1y(\infty) = 0. \tag{64}$$

Решение уравнения для $P_1y(\zeta)$ с условием (64) имеет вид

$$P_1y(\zeta) = \int_\infty^\zeta q_1(s,\varepsilon)ds. \tag{65}$$

Нетрудно доказать так же, как это сделано в лемме в работе [3], что для $P_1y(\zeta)$ имеет место оценка вида (59):

$$|P_1y(\zeta)| \le cP_\kappa(\zeta), \quad \zeta \ge 0. \tag{66}$$

Из (65) находим значение $P_1y(0)$:

$$P_1y(0) = -\int_0^\infty q_1(s,\varepsilon)ds.$$

Теперь мы можем найти функцию $\Pi_1y(\xi)$ как решение уравнения (53) с начальным условием (55):

$$\Pi_1y(\xi) = \Pi_1y(0)\exp\left(\int_0^\xi g_y(s)ds\right) + \int_0^\xi \exp\left(\int_s^\xi g_y(p)dp\right)\pi_1(s)ds. \tag{67}$$

Так как

$$\exp\left(\int_s^\xi g_y(p)dp\right) = \exp\left(\int_s^\xi g_y(0,\bar{y}^0(0) + \Pi_0y(p)dp\right) \le c\exp\left(-\kappa(\xi - s)\right) \quad \text{при} \quad 0 \le s \le \xi$$

в силу (10) и (40), то из (67) с учетом оценки (54) получаем для $\Pi_1y(\xi)$ экспоненциальную оценку типа (40):

$$|\Pi_1y(\xi)| \le c\exp(-\kappa\xi), \quad \xi \ge 0. \tag{68}$$

Функция $\Pi_1z(\xi)$ находится из равенства (51) и также имеет оценку типа (68). Эта оценка следует из вида функции $\Pi_1z(\xi)$ с учетом равенства (см. (26) и (50)):

$$\bar{z}_1(0) - \varphi_y(\infty)\bar{y}_1(0) - \sigma(\infty) = \bar{z}_1(0) - \varphi_y(0,\bar{y}_0(0))\bar{y}_1(0) - a(0) = a(0) - a(0) = 0.$$

Определив $\Pi_1z(\xi)$, находим из (34) начальное условие для $P_1z(\zeta)$:

$$P_1z(0) = -\bar{z}_1(0) - \Pi_1z(0). \tag{69}$$

Уравнение для $P_1z(\zeta)$ имеет вид (60) при $i = 1$, где $p_1(\zeta,\varepsilon)$ выражается формулой (61) и имеет оценку

$$|p_1(\zeta,\varepsilon)| \le c\left[P_0z|P_1y| + \sqrt{\varepsilon}(P_0z + |P_1y|) + (1 + \sqrt{\varepsilon}\zeta)(P_0z)^2\right] \le c\left[P_\kappa^2(\zeta) + \sqrt{\varepsilon}P_\kappa(\zeta)\right].$$

Последнее неравенство получено с учетом оценок (58), (66) и неравенства $\sqrt{\varepsilon}\zeta P_\kappa(\zeta) \le cP_{\kappa_1}(\zeta)$, где $\kappa_1 < \kappa$. Решение уравнения для $P_1z(\zeta)$ с начальным условием (69) можно записать в виде

$$P_1z(\zeta) = \Phi(\zeta)\Phi^{-1}(0)P_1z(0) + \Phi(\zeta)\int_0^\zeta \Phi^{-1}(s)p_1(s,\varepsilon)ds,$$

где

$$\Phi(\zeta) = \frac{dP_0z}{d\zeta}(\zeta) = -h(0,y^0)\left[(P_0z(\zeta))^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\sigma(0)P_0z(\zeta)\right].$$

Нетрудно доказать, так же, как это сделано в лемме в работе [3], что для $P_1z(\zeta)$ имеет место оценка вида (59):

$$|P_1z(\zeta)| \le cP_\kappa(\zeta), \quad \zeta \ge 0.$$

На следующих шагах алгоритма (втором, третьем и т.д.) определяются пограничные функции с номерами $2,3,\ldots$. С помощью метода математической индукции можно доказать, что функции $\Pi_iz(\xi)$, $\Pi_iy(\xi)$ и $P_iz(\zeta)$, $P_iy(\zeta)$ $(i \ge 2)$ имеют оценки типа (68) и (59).

Отметим, что частичные суммы

$$\overset{(n)}{\Pi} z(\xi,\varepsilon) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^{\frac{i}{2}}\Pi_iz(\xi) \quad \text{и} \quad \overset{(n)}{\Pi} y(\xi,\varepsilon) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^{\frac{i}{2}}\Pi_iy(\xi)$$

рядов (12) при подстановке их в равенства (17) вместо Πz и Πy удовлетворяют первому равенству в (17) с точностью порядка $O\left(\varepsilon^{\frac{n+2}{2}}\right)$, а второму — с точностью порядка $O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right)$, т.е.

$$\varepsilon\frac{d\overset{(n)}{\Pi} z}{d\xi}-\overset{(n)}{\Pi} F=O\left(\varepsilon^{\frac{n+2}{2}}\right),\quad \frac{d\overset{(n)}{\Pi} y}{d\xi}-\overset{(n)}{\Pi} f=O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \tag{70}$$

а частичные суммы

$$\overset{(n)}{P} z(\zeta,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{\frac{i}{2}}P_i z(\zeta)\quad \text{и}\quad \overset{(n)}{P} y(\zeta,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{\frac{i}{2}}P_i y(\zeta)$$

рядов (13) при постановке их в равенства (18) вместо Pz и Py удовлетворяют первому равенству с точностью порядка $O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right)$, а второму — с точностью порядка $O\left(\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right)$, т.е.

$$\frac{d\overset{(n)}{P} z}{d\zeta}-\overset{(n)}{P} F=O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right),\quad \frac{1}{\varepsilon}\frac{d\overset{(n)}{P} y}{d\zeta}-\overset{(n)}{P} f=O\left(\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right). \tag{71}$$

3. ОБОСНОВАНИЕ АСИМПТОТИКИ

3.1. Теорема о существовании решения задачи (1), (2) *с построенной асимптотикой*

Для доказательства существования решения задачи (1), (2) с построенным асимптотическим разложением понадобится еще одно требование.

Условие А9. Пусть

$$\bar{\varphi}_y(x)>0,\quad \bar{f}_z(x)>0\quad \text{при}\quad 0\le x\le X.$$

Напомним, что

$$\bar{\varphi}_y(x)=\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,\bar{y}_0(x)),\quad \bar{f}_z(x):=\frac{\partial f}{\partial z}(x,\bar{y}_0(x),\bar{z}_0(x),x).$$

Роль этого условия выяснится ниже.

Обозначим через $Z_n(x,\varepsilon)$, $Y_n(x,\varepsilon)$ частичные суммы построенных разложений (5):

$$\begin{gathered}Z_n(x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{\frac{i}{2}}\left(\bar{z}_i(x)+\Pi_i z\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)+P_i z\left(\frac{x}{\varepsilon^2}\right)\right),\\ Y_n(x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{\frac{i}{2}}\left(\bar{y}_i(x)+\Pi_i y\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)+P_i y\left(\frac{x}{\varepsilon^2}\right)\right).\end{gathered} \tag{72}$$

Теорема. *Если выполнены условия* А1–А9*, то для достаточно малых* ε *задача* (1), (2) *имеет решение* $z(x,\varepsilon)$, $y(x,\varepsilon)$*, и для любого* $n=0,1,2,\ldots$ *справедливы асимптотические* (*при* $\varepsilon\to+0$) *равенства*

$$z(x,\varepsilon)=Z_n(x,\varepsilon)+O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right),\quad y(x,\varepsilon)=Y_n(x,\varepsilon)+O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right),\quad 0\le x\le X. \tag{73}$$

Доказательство. Доказательство теоремы проведем с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств, т.е. путем построения (с использованием частичных сумм (72)) нижнего и верхнего решений задачи (1), (2) (см. [5]). В связи с этим напомним понятия нижнего и верхнего решений применительно к задаче (1), (2).

Определение 1. Две пары функций $\underline{Z}(x,\varepsilon)$, $\underline{Y}(x,\varepsilon)$ и $\overline{Z}(x,\varepsilon)$, $\overline{Y}(x,\varepsilon)$ называются *нижним* и *верхним* решениями задачи (1), (2), если они удовлетворяют условиям:

$$1^0.\quad L_\varepsilon(\underline{Z},y):=\varepsilon^2\frac{d\underline{Z}}{dx}-F(x,y,\underline{Z},\varepsilon)\le 0\le L_\varepsilon(\overline{Z},y)$$

$$\text{при} \quad 0 \le x \le X, \quad \underline{Y}(x,\varepsilon) \le y \le \overline{Y}(x,\varepsilon);$$

$$M_\varepsilon(\underline{Y}, x) := \varepsilon \frac{dY}{dx} - f(x, \underline{Y}, z, \varepsilon) \le 0 \le M_\varepsilon(\overline{Y}, z)$$

$$\text{при} \quad 0 \le x \le X, \quad \underline{Z}(x,\varepsilon) \le z \le \overline{Z}(x,\varepsilon);$$

$$2^0. \quad \underline{Z}(0,\varepsilon) \le z^0 \le \overline{Z}(0,\varepsilon), \quad \underline{Y}(0,\varepsilon) \le y^0 \le \overline{Y}(0,\varepsilon).$$

Известно, что если существуют нижнее и верхнее решения задачи (1), (2), то существует решение $z(x,\varepsilon)$, $y(x,\varepsilon)$ этой задачи, удовлетворяющее неравенствам

$$\underline{Z}(x,\varepsilon) \le z(x,\varepsilon) \le \overline{Z}(x,\varepsilon), \quad \underline{Y}(x,\varepsilon) \le y(x,\varepsilon) \le \overline{Y}(x,\varepsilon), \quad 0 \le x \le X. \tag{74}$$

Мы рассмотрим систему (1) последовательно на двух отрезках: в п. 3.3 на отрезке $0 \le x \le \varepsilon\xi_0$ с начальными условиями (2), где выбор числа ξ_0 (не зависящего от ε) уточним ниже, и в п. 3.4 на отрезке $\varepsilon\xi_0 \le x \le X$ с соответствующими начальными условиями в точке $\varepsilon\xi_0$, обеспечивающими гладкое продолжение решения за точку $\varepsilon\xi_0$. На каждом отрезке будут построены подходящие нижнее и верхнее решения, удовлетворяющие условиям 1^0 и 2^0 определения 1 с учетом того, что отрезок $0 \le x \le X$, фигурирующий в определении 1, заменяется в первом случае на отрезок $0 \le x \le \varepsilon\xi_0$, а во втором случае – на отрезок $\varepsilon\xi_0 \le x \le X$.

Предварительно в п. 3.2 будут получены некоторые вспомогательные оценки.

3.2. Вспомогательные оценки

а) Из (29), (70) и (71) следуют асимптотические равенства

$$\begin{aligned} L_\varepsilon(Z_n, Y_n) &:= \varepsilon^2 \frac{dZ_n}{dx} - F(x, Y_n, Z_n, \varepsilon) = O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \quad 0 \le x \le X, \\ M_\varepsilon(Z_n, Y_n) &:= \varepsilon \frac{dY_n}{dx} - f(x, Y_n, Z_n, \varepsilon) = O\left(\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right), \quad 0 \le x \le X. \end{aligned} \tag{75}$$

Отметим также, что

$$Z_n(0,\varepsilon) = z^0, \quad Y_n(0,\varepsilon) = y^0. \tag{76}$$

б) Введем функцию

$$k_0(x,\varepsilon) = Z_1(x,\varepsilon) - \varphi(x, Y_1(x,\varepsilon)), \tag{77}$$

где $Z_1(x,\varepsilon)$ и $Y_1(x,\varepsilon)$ определены формулами (72) при $n = 1$, и рассмотрим ее сначала на отрезке $0 \le x \le A\varepsilon^\gamma$, где A и γ – положительные числа:

$$\begin{aligned} k_0(x,\varepsilon) &= \bar{z}_0(x) + \sqrt{\varepsilon}\bar{z}_1(x) + \Pi_0 z(\xi) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 z(\xi) + P_0 z(\zeta) + \sqrt{\varepsilon}P_1 z(\zeta) - \\ &- \left[\varphi(x, \bar{y}_0(x) + \Pi_0 y(\xi)) + \varphi_y(x, \bar{y}_0(x) + \Pi_0 y(\xi))\sqrt{\varepsilon}(\bar{y}_1(x) + \Pi_1 y(\xi) + P_1 y(\zeta)) + \right. \\ &+ \left. O(\varepsilon)\right] = \bar{z}_0(0) + O(\varepsilon^\gamma) + \sqrt{\varepsilon}\bar{z}_1(0) + \Pi_0 z(\xi) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 z(\xi) + P_0 z(\zeta) + \sqrt{\varepsilon}P_1 z(\zeta) - \\ &- \left[\varphi(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi)) + O(\varepsilon^\gamma) + \sqrt{\varepsilon}\varphi_y(0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\xi))(\bar{y}_1(0) + \Pi_1 y(\xi) + \right. \\ &+ \left. P_1 y(\zeta)) + O(\varepsilon)\right] = O(\varepsilon^\gamma) + \sqrt{\varepsilon}\sigma(\xi) + P_0 z(\zeta) + \sqrt{\varepsilon}\left(P_1 z(\zeta) - \varphi_y(\xi) P_1 y(\zeta)\right) + \\ &+ O(\varepsilon) \quad \text{при} \quad 0 \le x \le A\varepsilon^\gamma. \end{aligned} \tag{78}$$

Последнее равенство в (78) получено с учетом (37) и (50). Из (78) следует: если $0 \le x \le A\varepsilon^2$, т.е. $0 \le \zeta \le A$, то $P_0 z(\zeta) > \dfrac{c}{A}$, где $c > 0$ – некоторое число (см. (57)), и, следовательно, для достаточно малых ε

$$k_0(x,\varepsilon) \ge \frac{c}{A} \quad \text{при} \quad 0 \le x \le A\varepsilon^2; \tag{79}$$

если $A\varepsilon^2 \le x \le \varepsilon^{\frac{1}{2}+\delta}$, где $0 < \delta < \dfrac{1}{2}$, то, учитывая, что $\sigma(\xi) \ge 2c_1 > 0$, где c_1 – некоторое число (см. (49)), $P_0 z(\zeta) > 0$ и $\left|P_1 z(\zeta) - \varphi_y(\xi) P_1 y(\zeta)\right| \le c_1$ при достаточно большом A, получаем для достаточно малых ε неравенство

$$k_0(x,\varepsilon) \ge c_1\sqrt{\varepsilon} \quad \text{при} \quad A\varepsilon^2 \le x \le \varepsilon^{\frac{1}{2}+\delta}. \tag{80}$$

Если $\varepsilon^{\frac{1}{2}+\delta} \le x \le X$, где $0 < \delta < \dfrac{1}{2}$, то все пограничные функции являются величинами порядка $o(\varepsilon^N)$ для любого N, поэтому из (77) следует (принимаем во внимание (24) и (26)):

$$\begin{gathered} k_0(x,\varepsilon) = \bar{z}_0(x) + \sqrt{\varepsilon}\bar{z}_1(x) - \varphi(x, \bar{y}_0(x) + \sqrt{\varepsilon}\bar{y}_1(x)) + o(\varepsilon^N) = \\ = \left[\bar{z}_0(x) - \varphi(x, \bar{y}_0(x)\right] + \sqrt{\varepsilon}\left[\bar{z}_1(x) - \varphi_y(x, \bar{y}_0(x))\bar{y}_1(x)\right] + O(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}a(x) + O(\varepsilon), \end{gathered} \tag{81}$$

и, значит,

$$k_0(x,\varepsilon) \ge c_2\sqrt{\varepsilon} \quad \text{при} \quad \varepsilon^{\frac{1}{2}+\delta} \le x \le X, \tag{82}$$

где $c_2 > 0$ – некоторое число.

Из (79), (80) и (82) получаем

$$k_0(x,\varepsilon) \ge c_0\sqrt{\varepsilon} \quad \text{при} \quad 0 \le x \le X, \tag{83}$$

где c_0 – некоторое число, не зависящее от ε.

в) Получим теперь оценки для производных

$$F_z(x,\varepsilon) := \frac{\partial F}{\partial z}(x, Z_n(x,\varepsilon), Y_n(x,\varepsilon), \varepsilon)$$

и

$$F_y(x,\varepsilon) := \frac{\partial F}{\partial y}(x, Z_n(x\varepsilon), Y_n(x,\varepsilon), \varepsilon),$$

где $Z_n(x,\varepsilon)$ и $Y_n(x,\varepsilon)$ определены формулами (72) и $n \ge 1$. Для $F_z(x,\varepsilon)$ имеем:

$$\begin{gathered} F_z(x,\varepsilon) = -2h(x,Y_n)(Z_n - \varphi(x,Y_n)) + \varepsilon F_{1z}(x,\varepsilon)) = -2h(x,Y_1) \times \\ \times (Z_1(x,\varepsilon) - \varphi(x, Y_1(x,\varepsilon)) + O(\varepsilon)) = -2h(x,Y_1)k_0(x,\varepsilon) + O(\varepsilon). \end{gathered} \tag{84}$$

В силу условий A4 и A7 справедливо неравенство

$$h(x, Y_1(x,\varepsilon)) \ge c > 0, \quad 0 \le x \le X.$$

Учитывая также (83), из (84) получаем для достаточно малых ε:

$$F_z(x,\varepsilon) \le -A_0 k_0(x,\varepsilon), \quad 0 \le x \le X, \tag{85}$$

где число $A_0 > 0$ не зависит от ε.

Для $F_y(x,\varepsilon)$ аналогично получаем

$$F_y(x,\varepsilon) = \left[-h_y(x,Y_1)k_0(x,\varepsilon) + 2h(x,Y_1)\varphi_y(x,Y_1)\right]k_0(x,\varepsilon) + O(\varepsilon), \tag{86}$$

откуда следует, что для достаточно малых ε

$$\left|F_y(x,\varepsilon)\right| \le A_1 k_0(x,\varepsilon), \quad 0 \le x \le X, \tag{87}$$

где число $A_1 > 0$ также не зависит от ε.

Наряду с оценками (85) и (87) нам понадобятся представления производных $F_z(x,\varepsilon)$, $F_y(x,\varepsilon)$, $f_z(x,\varepsilon) := f_z(x, Z_n, Y_n, \varepsilon)$ и $f_y(x,\varepsilon) := f_y(x, Z_n, Y_n, \varepsilon)$ на отрезке $\varepsilon\xi_0 \le x \le X$ для достаточно большого ξ_0. На отрезке $\varepsilon\xi_0 \le x \le X$ функции $P_i z(\zeta)$ и $P_i y(\zeta)$ имеют порядок $o(\varepsilon^N)$ для любого N, $k_0(x,\varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon})$ (это следует из (78) и (81)),

$$h(x, Y_1) = h(x, \bar{y}_0(x)) + O(\Pi_0 y + \sqrt{\varepsilon}) = \bar{h}(x) + O(\exp(-\kappa\xi) + \sqrt{\varepsilon}),$$
$$\varphi_y(x, Y_1) = \bar{\varphi}_y(x) + O(\exp(-\kappa\xi) + \sqrt{\varepsilon}).$$

Учитывая эти равенства и обозначая (для краткости записи) величины $O(\exp(-\kappa\xi) + \sqrt{\varepsilon})$ через $\omega(x,\varepsilon)$, из (84) и (86) получаем

$$F_z(x,\varepsilon) = -\left[2\bar{h}(x) + \omega(x,\varepsilon)\right] k_0(x,\varepsilon), \quad \varepsilon\xi_0 \le x \le X, \tag{88}$$

$$F_y(x,\varepsilon) = \left[2\bar{h}(x)\bar{\varphi}_y(x) + \omega(x,\varepsilon)\right] k_0(x,\varepsilon), \quad \varepsilon\xi_0 \le x \le X. \tag{89}$$

Отметим, что величины $\omega(x,\varepsilon)$ сколь угодно малы на отрезке $\varepsilon\xi_0 \le x \le X$ при достаточно большом ξ_0 и достаточно малых ε, а для их производных справедливо равенство

$$\omega'(x,\varepsilon) := \frac{d\omega}{dx}(x,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\kappa\xi_0) + 1\right), \quad \varepsilon\xi_0 \le x \le X.$$

Для $f_z(x,\varepsilon)$ и $f_y(x,\varepsilon)$ имеют место очевидные асимптотические равенства

$$f_z(x,\varepsilon) = \bar{f}_z(x) + \omega(x,\varepsilon), \quad f_y(x,\varepsilon) = \bar{f}_y(x) + \omega(x,\varepsilon), \quad \varepsilon\xi_0 \le x \le X. \tag{90}$$

Перейдем к рассмотрению системы уравнений (1) последовательно на отрезках $0 \le x \le \varepsilon\xi_0$ и $\varepsilon\xi_0 \le x \le X$.

3.3. Система уравнений (1) *на отрезке* $0 \le x \le \varepsilon\xi_0$

На этом отрезке, где $\xi_0 > 0$ – фиксированное число, выбор которого уточним ниже, сделаем в системе (1) замену переменных $x = \varepsilon\xi$. Получим уравнения

$$\varepsilon\frac{dz}{d\xi} = F(\varepsilon\xi, y, z, \varepsilon), \quad \frac{dy}{d\xi} = f(\varepsilon\xi, y, z, \varepsilon), \quad 0 \le \xi \le \xi_0. \tag{91}$$

Нижнее и верхнее решения задачи (91), (2) возьмем в виде

$$\begin{aligned} &\underline{Z}(\xi,\varepsilon) = Z_n(\varepsilon\xi,\varepsilon) - M\exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}}, \quad \underline{Y}(\xi,\varepsilon) = Y_n(\varepsilon\xi,\varepsilon) - \exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}}, \\ &\overline{Z}(\xi,\varepsilon) = Z_n(\varepsilon\xi,\varepsilon) + M\exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}}, \quad \overline{Y}(\xi,\varepsilon) = Y_n(\varepsilon\xi,\varepsilon) + \exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}}, \end{aligned} \tag{92}$$

где $n \ge 2$, M и λ – не зависящие от ε положительные числа, выбор которых сделаем ниже.

Очевидно, что $\underline{Z}$, $\underline{Y}$ и $\overline{Z}$, $\overline{Y}$ при любых M и λ удовлетворяют условиям 2^0 из определения 1, поскольку $Z_n(0,\varepsilon) = z^0$, $Y_n(0,\varepsilon) = y^0$ (см. (76)). Покажем, что числа M и λ можно выбрать так, что для достаточно малых ε будет выполнено условие 1^0 из определения 1 на отрезке $0 \le \xi \le \xi_0$ (для любого фиксированного $\xi_0 > 0$). Начнем с условия 1^0 для $\underline{Z}(\xi,\varepsilon)$, учитывая, что если $\underline{Y}(\xi,\varepsilon) \le y \le \overline{Y}(\xi,\varepsilon)$, то y можно представить в виде

$$y = Y_n(\varepsilon\xi) + \Theta\exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}}, \quad -1 \le \Theta \le 1:$$

$$L_\varepsilon(\underline{Z}, y) := \varepsilon\frac{d\underline{Z}}{d\xi} - F(\varepsilon\xi, y, \underline{Z}, \varepsilon) = \varepsilon\frac{dZ_n}{d\xi} - M\lambda\exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}+1} -$$
$$-\left[F(\varepsilon\xi, Y_n, Z_n, \varepsilon) + F_y(\varepsilon\xi,\varepsilon)\Theta\exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}} - F_z(\varepsilon\xi,\varepsilon)M\exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}} + O(M^2\exp(2\lambda\xi))\varepsilon^n\right], \quad 0 \le \xi \le \xi_0.$$

Отсюда с учетом оценок (75), (85), (87), (83) получаем

$$
\begin{aligned}
L_\varepsilon(\underline{Z}, y) &\le \left[\varepsilon^2 \frac{dZ_n}{dx} - F(x, Y_n, Z_n, \varepsilon)\right] - M\lambda \exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n+2}{2}} + \\
&+ A_1 k_0(\varepsilon\xi, \varepsilon)\exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}} - A_0 k_0(\varepsilon\xi, \varepsilon) M \exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}} + O(M^2 \exp(2\lambda\xi))\varepsilon^n \le \\
&\le O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right) - (A_0 M - A_1)c_0\sqrt{\varepsilon}\exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}} + O(M^2\exp(2\lambda\xi))\varepsilon^n.
\end{aligned}
\tag{93}
$$

Так как $\varepsilon^n = o\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right)$, поскольку $n \ge 2$, то для достаточно большого M и достаточно малых ε второе (отрицательное) слагаемое в правой части (93) обеспечит выполнение неравенства

$$
L_\varepsilon(\underline{Z}, y) < 0 \quad \text{при} \quad 0 \le \xi \le \xi_0, \quad \underline{Y}(\xi, \varepsilon) \le y \le \overline{Y}(\xi, \varepsilon),
$$

т.е. на отрезке $0 \le \xi \le \xi_0$ будет выполнено условие 1^0 для $L_\varepsilon(\underline{Z}, y)$ из определения 1.

Аналогично проверяется выполнение условия 1^0 для $L_\varepsilon(\overline{Z}, y)$ при достаточно большом M и достаточно малых ε.

Перейдем к условию 1^0 для $\underline{Y}(\xi, \varepsilon)$. Записывая z, изменяющееся в промежутке $\underline{Z}(\xi, \varepsilon) \le z \le \overline{Z}(\xi, \varepsilon)$, в виде $z = Z_n(\varepsilon\xi, \varepsilon) + \Theta M \exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}}$, где $-1 \le \Theta \le 1$, получаем

$$
\begin{aligned}
&M_\varepsilon(\underline{Y}, z) := \frac{d\underline{Y}}{d\xi} - f(\varepsilon\xi, \underline{Y}, z, \varepsilon)\frac{dY_n}{d\xi} - \lambda\exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}} - \\
&-\left[f(\varepsilon\xi, Y_n, Z_n, \varepsilon) - f_y(\varepsilon\xi, \varepsilon)\exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}} + f_z(\varepsilon\xi, \varepsilon)\Theta M\exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}} + O(M^2\exp(2\lambda\xi))\varepsilon^n\right] = \\
&= \left[\varepsilon\frac{dY_n}{dx} - f(x, Y_n, Z_n, \varepsilon)\right] - \left(\lambda - f_y(\varepsilon\xi, \varepsilon) + f_z(\varepsilon\xi, \varepsilon)\Theta M\right)\exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}} + O(M^2\exp(2\lambda\xi))\varepsilon^n = \\
&= O\left(\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right) - \left[\lambda - f_y(\varepsilon\xi, \varepsilon) + f_z(\varepsilon\xi, \varepsilon)\Theta M + O(M^2\exp(\lambda\xi))\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right]\exp(\lambda\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}}.
\end{aligned}
$$

При достаточно большом λ и достаточно малых ε выражение в последних квадратных скобках положительно, и, следовательно, для достаточно большого λ и достаточно малых ε справедливо неравенство

$$
M_\varepsilon(\underline{Y}, z) < 0 \quad \text{при} \quad 0 \le \xi \le \xi_0, \quad \underline{Z}(\xi, \varepsilon) \le z \le \overline{Z}(\xi, \varepsilon).
$$

Аналогично устанавливается справедливость неравенства

$$
M_\varepsilon(\overline{Y}, z) > 0 \quad \text{при} \quad 0 \le \xi \le \xi_0, \quad \underline{Z}(\xi, \varepsilon) \le z \le \overline{Z}(\xi, \varepsilon).
$$

Таким образом, для любого фиксированного $\xi_0 > 0$ функции $\underline{Z}$, $\underline{Y}$ и $\overline{Z}$, $\overline{Y}$, определенные равенствами (92), являются при достаточно больших M и λ и достаточно малых ε нижним и верхним решениями задачи (91), (2). Следовательно, существует решение этой задачи (обозначим его $\tilde{z}(\xi, \varepsilon), \tilde{y}(\xi, \varepsilon)$), удовлетворяющее неравенствам

$$
\underline{Z}(\xi, \varepsilon) \le \tilde{z}(\xi, \varepsilon) \le \overline{Z}(\xi, \varepsilon), \quad \underline{Y}(\xi, \varepsilon) \le \tilde{y}(\xi, \varepsilon) \le \overline{Y}(\xi, \varepsilon), \quad 0 \le \xi \le \xi_0.
$$

Отсюда, учитывая вид функций (92), получаем асимптотические равенства для решения $z(x, \varepsilon)$, $y(x, \varepsilon)$ задачи (1), (2) на отрезке $0 \le x \le \varepsilon\xi_0$:

$$
z(x, \varepsilon) = \tilde{z}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon\right) = Z_n(x, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right), \quad y(x, \varepsilon) = \tilde{y}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon\right) = Y_n(x, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right), \quad 0 \le x \le \varepsilon\xi_0.
$$

Запишем эти равенства, заменив n на $n+1$:

$$z(x,\varepsilon) = Z_{n+1}(x,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \quad y(x,\varepsilon) = Y_{n+1}(x,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right). \tag{94}$$

Так как $Z_{n+1} = Z_n + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right)$, $Y_{n+1} = Y_n + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right)$, то из (94) получаем

$$z(x,\varepsilon) = Z_n(x,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \quad y(x,\varepsilon) = Y_n(x,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \quad 0 \le x \le \varepsilon\xi_0, \tag{95}$$

т.е. справедливы равенства (73) на отрезке $0 \le x \le \varepsilon\xi_0$ для $n \ge 2$.

При $n = 2$ равенства (95) принимают вид

$$z = Z_2 + O(\varepsilon^{3/2}), \quad y = Y_2 + O(\varepsilon^{3/2}),$$

а поскольку

$$Z_2 = Z_1 + O(\varepsilon) = Z_0 + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad Y_2 = Y_1 + O(\varepsilon) = Y_0 + O(\sqrt{\varepsilon}),$$

то

$$z = Z_1 + O(\varepsilon), \quad y = Y_1 + O(\varepsilon), \quad 0 \le x \le \varepsilon\xi_0,$$

$$z = Z_0 + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad y = Y_0 + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad 0 \le x \le \varepsilon\xi_0,$$

т.е. равенства (73) справедливы на отрезке $0 \le x \le \varepsilon\xi_0$ также для $n = 1$ и для $n = 0$.

3.4. Система уравнений (1) *на отрезке* $\varepsilon\xi_0 \le x \le X$

Рассмотрим теперь систему уравнений (1) на отрезке $\varepsilon\xi_0 \le x \le X$ с начальными условиями, обеспечивающими гладкое продолжение решения за точку $\varepsilon\xi_0$:

$$z(\varepsilon\xi_0,\varepsilon) = \tilde{z}(\xi_0,\varepsilon), \quad y(\varepsilon\xi_0,\varepsilon) = \tilde{y}(\xi_0,\varepsilon). \tag{96}$$

Для доказательства существования решения этой задачи снова применим метод дифференциальных неравенств. В связи с этим отметим одно очевидное утверждение: если $F(x,y,z,\varepsilon)$ является неубывающей функцией аргумента y, а $f(x,y,z,\varepsilon)$ – неубывающей функцией аргумента z в области

$$G = \left\{(x,y,z,\varepsilon) : \varepsilon\xi_0 \le x \le X,\ \underline{Y}(x,\varepsilon) \le y \le \overline{Y}(x,\varepsilon),\ \underline{Z}(x,\varepsilon) \le z \le \overline{Z}(x,\varepsilon),\ 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0\right\} \tag{97}$$

(в таком случае говорят, что функции F и f удовлетворяют условию квазимонотонности в области G), то для выполнения на отрезке $\varepsilon\xi_0 \le x \le X$ условия 1^0 из определения 1 достаточно, чтобы были выполнены неравенства

$$L_\varepsilon(\underline{Z},\underline{Y}) \le 0 \le L_\varepsilon(\overline{Z},\overline{Y}), \quad M_\varepsilon(\underline{Y},\underline{Z}) \le 0 \le M_\varepsilon(\overline{Y},\overline{Z}) \quad \text{при} \quad \varepsilon\xi_0 \le x \le X. \tag{98}$$

Ниже мы воспользуемся этим утверждением.

Предварительно рассмотрим систему двух линейных алгебраических уравнений относительно $\alpha(x,\varepsilon)$ и $\beta(x,\varepsilon)$:

$$\begin{gathered} F_y(x,\varepsilon)\alpha + F_z(x,\varepsilon)\beta = -2A\overline{h}(x)k_0(x,\varepsilon), \\ f_y(x,\varepsilon)\alpha + f_z(x,\varepsilon)\beta = -B, \end{gathered} \tag{99}$$

где A и B – произвольные положительные числа, обозначения $F_y(x,\varepsilon)$, $F_z(x,\varepsilon)$, $f_y(x,\varepsilon)$, $f_z(x,\varepsilon)$ имеют тот же смысл, что и ранее, т.е. $F_y(x,\varepsilon) = F_y(x,Y_n(x,\varepsilon),Z_n(x,\varepsilon),\varepsilon)$ и т.д., $n \ge 2$.

Используя представления (88)–(90) для производных F_y, F_z, f_y, f_z при $\varepsilon\xi_0 \le x \le X$ и деля обе части первого уравнения в (99) на $2\overline{h}(x)k_0(x,\varepsilon)$, приходим к системе уравнений

$$\begin{gathered}\left[\overline{\varphi}_y(x) + \omega(x,\varepsilon)\right]\alpha - \left[1 + \omega(x,\varepsilon)\right]\beta = -A,\\ \left[\overline{f}_y(x) + \omega(x,\varepsilon)\right]\alpha + \left[\overline{f}_z(x) + \omega(x,\varepsilon)\right]\beta = -B.\end{gathered} \tag{100}$$

Отбросив слагаемые $\omega(x,\varepsilon)$, которые являются сколь угодно малыми при достаточно большом ξ_0 и достаточно малых ε, получим систему уравнений

$$\overline{\varphi}_y(x)\alpha_0 - \beta_0 = -A, \quad \overline{f}_y(x)\alpha_0 + \overline{f}_z(x)\beta_0 = -B.$$

Ее решение имеет вид

$$\alpha_0(x) = -\overline{g}_y^{-1}(x)\left(\overline{f}_z(x)A + B\right), \quad \beta_0(x) = -\overline{g}_y^{-1}(x)\left(-\overline{f}_y(x)A + \overline{\varphi}_y(x)B\right).$$

Так как $\overline{g}_y(x) < 0$ (см. (10)), $\overline{\varphi}_y(x) > 0$ и $\overline{f}_z(x) > 0$ (в силу условия A9) и $\overline{f}_y(x) < 0$ (это следует из равенства $\overline{f}_y(x) = \overline{g}_y(x) - \overline{f}_z(x)\overline{\varphi}_y(x)$), то

$$\alpha_0(x) > 0 \quad \text{и} \quad \beta_0(x) > 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\xi_0 \le x \le X.$$

Решение $\alpha(x,\varepsilon)$, $\beta(x,\varepsilon)$ системы (99) отличается от $\alpha_0(x)$, $\beta_0(x)$ на величины порядка $O(A + B)\omega(x,\varepsilon)$, и, следовательно, при любых фиксированных A и B для достаточно большого ξ_0 и достаточно малых ε справедливы неравенства

$$\alpha(x,\varepsilon) > 0, \quad \beta(x,\varepsilon) > 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\xi_0 \le x \le X,$$

причем α и β можно сделать сколь угодно большими, если взять достаточно большие A и B. Отметим также, что так как

$$\omega'(x,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\kappa\xi_0) + 1\right) \text{ на отрезке } \varepsilon\xi_0 \le x \le X,$$

то

$$\begin{gathered}\alpha'(x,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\kappa\xi_0) + 1\right)(A + B),\\ \beta'(x,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\kappa\xi_0) + 1\right)(A + B), \quad \varepsilon\xi_0 \le x \le X.\end{gathered} \tag{101}$$

Нижнее и верхнее решения задачи (1), (96), рассматриваемой на отрезке $\varepsilon\xi_0 \le x \le X$, возьмем в виде ($n \ge 2$):

$$\begin{gathered}\underline{Z}(x,\varepsilon) = Z_n(x,\varepsilon) - \beta(x,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{n}{2}}, \quad \underline{Y}(x,\varepsilon) = Y_n(x,\varepsilon) - \alpha(x,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{n}{2}},\\ \overline{Z}(x,\varepsilon) = Z_n(x,\varepsilon) + \beta(x,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{n}{2}}, \quad \overline{Y}(x,\varepsilon) = Y_n(x,\varepsilon) + \alpha(x,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{n}{2}},\end{gathered} \tag{102}$$

где $\alpha(x,\varepsilon)$, $\beta(x,\varepsilon)$ – решение системы уравнений (99) с числами A и B, выбор которых уточним ниже. Из представлений (89) и (90) для $F_y(x,\varepsilon)$ и $f_z(x,\varepsilon)$ и вида (102) функций $\underline{Z}$, $\underline{Y}$ и $\overline{Z}$, $\overline{Y}$ следует, что для достаточно большого ξ_0 и достаточно малых ε в области G (см. (97)) выполняются неравенства

$$F_y(x,y,z,\varepsilon) > 0, \quad f_z(x,y,z,\varepsilon) > 0,$$

и, следовательно, функции F и f удовлетворяют в области G условию квазимонотонности. Поэтому условие 1^0 из определения нижнего и верхнего решений будет выполнено на отрезке $\varepsilon\xi_0 \le x \le X$, если выполняются неравенства (98).

Для $L_\varepsilon(\underline{Z},\underline{Y})$, используя (75), (101) и (99), получаем

$$L_\varepsilon(\underline{Z},\underline{Y}) = \varepsilon^2\frac{d\underline{Z}}{dx} - F(x,\underline{Y},\underline{Z},\varepsilon) = \left[\varepsilon^2\frac{dZ_n}{dx} - F(x,Y_n,Z_n,\varepsilon)\right] -$$
$$- \varepsilon^2\beta'(x,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{n}{2}} + \left[F_y(x,\varepsilon)\alpha(x,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{n}{2}} + F_z(x,\varepsilon)\beta(x,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right] + O((A^2+B^2)\varepsilon^n) = \tag{103}$$
$$= O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right) + O(A+B)\varepsilon^{\frac{n+2}{2}} - 2A\bar{h}(x)k_0(x,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{n}{2}} + O(A^2+B^2)\varepsilon^n,$$

где первое слагаемое в правой части (103) не зависит от A и B.

Так как $k_0(x,\varepsilon) \ge c_0\sqrt{\varepsilon}$ (см. (83)), то для достаточно большого A и достаточно малых ε третье (отрицательное) слагаемое в правой части (103) является доминирующим и обеспечивает выполнение неравенства

$$L_\varepsilon(\underline{Z},\underline{Y}) < 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\xi_0 \le x \le X.$$

Аналогично доказывается, что для достаточно большого A и достаточно малых ε выполняется неравенство

$$L_\varepsilon(\overline{Z},\overline{Y}) > 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\xi_0 \le x \le X.$$

Рассмотрим выражение для $M_\varepsilon(\underline{Y},\underline{Z})$. Используя (75), (101) и (99), получаем

$$M_\varepsilon(\underline{Y},\underline{Z}) = \varepsilon\frac{d\underline{Y}}{dx} - f(x,\underline{Y},\underline{Z},\varepsilon) = \left[\varepsilon\frac{dY_n}{dx} - f(x,Y_n,Z_n,\varepsilon)\right] - \varepsilon\alpha'(x,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{n}{2}} +$$
$$+\left[f_y(x,\varepsilon)\alpha(x,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{n}{2}} + f_z(x,\varepsilon)\beta(x,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right] + O\left((A^2+B^2)\varepsilon^n\right) = \tag{104}$$
$$= O\left(\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right) + O\left((A+B)(\exp(-\kappa\xi_0)+\varepsilon)\right)\varepsilon^{n/2} - B\varepsilon^{\frac{n}{2}} + O(A^2+B^2)\varepsilon^n,$$

где первое слагаемое в правой части (104) не зависит от A и B.

Очевидно, что для достаточно большого ξ_0, достаточно большого B и достаточно малых ε доминирующим слагаемым в правой части (104) является третье (отрицательное) слагаемое, которое обеспечивает выполнение неравенства

$$M_\varepsilon(\underline{Y},\underline{Z}) < 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\xi_0 \le x \le X.$$

Аналогично доказывается, что для достаточно большого B и достаточно малых ε выполняется неравенство

$$M_\varepsilon(\overline{Y},\overline{Z} > 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\xi_0 \le x \le X.$$

Итак, для достаточно большого ξ_0, достаточно больших A и B и достаточно малых ε функции $\underline{Z}$, $\underline{Y}$ и $\overline{Z}$, $\overline{Y}$, удовлетворяют на отрезке $\varepsilon\xi_0 \le x \le X$ условию 1^0 из определения 1.

Убедимся в том, что для достаточно малых ε эти функции удовлетворяют также условию 2^0 из определения 1.

В силу (95) $z(\varepsilon\xi_0,\varepsilon) = Z_n(\varepsilon\xi_0,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right)$, а в силу (102) $\underline{Z}(\varepsilon\xi_0,\varepsilon) = Z_n(\varepsilon\xi_0,\varepsilon) - \beta(\varepsilon\xi_0,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{n}{2}}$. Сравнивая эти два выражения и учитывая, что $\beta(\varepsilon\xi_0,\varepsilon) \ge c > 0$, приходим к неравенству $\underline{Z}(\varepsilon\xi_0,\varepsilon) < z(\varepsilon\xi_0,\varepsilon)$ для достаточно малых ε.

Аналогично проверяется выполнение остальных неравенств из условия 2^0.

Таким образом, функции $\underline{Z}$, $\underline{Y}$ и $\overline{Z}$, $\overline{Y}$, определенные равенствами (102), где $\alpha(x,\varepsilon), \beta(x,\varepsilon)$ – решение системы уравнений (99), являются для достаточно большого ξ_0, достаточно больших A и

B и достаточно малых ε нижним и верхним решениями системы (1), рассматриваемой на отрезке $\varepsilon\xi_0 \le x \le X$ с начальными условиями (96).

Следовательно, существует решение $z(x,\varepsilon)$, $y(x,\varepsilon)$ этой системы, удовлетворяющее на отрезке $\varepsilon\xi_0 \le x \le X$ неравенствам (74), откуда, учитывая вид (102) функций $\underline{Z}$, $\underline{Y}$ и $\overline{Z}$, $\overline{Y}$, получаем асимптотические равенства для $n \ge 2$:

$$z(x,\varepsilon) = Z_n(x,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right), \quad y(x,\varepsilon) = Y_n(x,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right), \quad \varepsilon\xi_0 \le x \le X.$$

Таким же образом, как это было сделано в п. 3.3, величины $O\left(\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right)$ в этих равенствах можно заменить на $O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right)$, а затем доказать справедливость полученных равенств также для $n = 1$ и $n = 0$.

Учитывая, что решение $z(x,\varepsilon)$, $y(x,\varepsilon)$ системы (1) на отрезке $\varepsilon\xi_0 \le x \le X$ с начальными условиями (96) является гладким продолжением решения этой системы на отрезке $0 \le x \le \varepsilon\xi_0$ с начальными условиями (2), приходим к заключению: для достаточно малых ε задача (1), (2) имеет решение $z(x,\varepsilon)$, $y(x,\varepsilon)$, для которого справедливы асимптотические равенства (73).

Тем самым теорема, сформулированная в п. 3.1, полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры // Матем. сборник. 1952. Т. 31(73). № 3. С. 147–156.
2. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Высш. школа, 1990.
3. *Бутузова М.В.* Задача Коши для тихоновской системы в случае кратного корня вырожденного уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 1. С. 34–45.
4. *Бутузов В.Ф.* Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущенных задачах с кратным корнем вырожденного уравнения // Матем. заметки. 2013. Т. 94. Вып. 1. С. 68–80.
5. *Бутузов В.Ф., Бычков А.И.* Асимптотика решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения в случае двукратного корня вырожденного уравнения // Дифференц. ур-ния. 2013. Т. 49. № 10. С. 1295–1307.
6. *Butuzov V.F., Nefedov N.N., Recke L., Schnieder K.R.* On a singularly perturbed initial value problem in the case of a double root of the degenerate equation // Nonlinear Anal. Theory, Meth. and Appl. 2013. V. 83. P. 1–11.
7. *Butuzov V.F.* Asymptotics of the solution of a system of singularly perturbed equations in the case of a multiple root of the degenerate equation // Differential Equations. 2014. № 2. P. 177–188.
8. *Бутузов В.Ф.* Асимптотика решения сингулярно возмущенной частично диссипативной системы с кратным корнем вырожденного уравнения // Матем. сборник. 2016. Т. 207. № 8. С. 73–100.
9. *Бутузов В.Ф.* Асимптотика и устойчивость решения сингулярно возмущенной эллиптической задачи с трехкратным корнем вырожденного уравнения // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81. № 3. С. 21–44.
10. *Бутузов В.Ф.* Об асимптотике решения сингулярно возмущенной параболической задачи с многозонным внутренним переходным слоем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 6. С. 961–987.
11. *Бутузов В.Ф.* Асимптотика решения частично диссипативной системы уравнений с многозонным пограничным слоем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 10. С. 91–112.
12. *Бутузов В.Ф.* Асимптотика погранслойного решения стационарной частично диссипативной системы с кратным корнем вырожденного уравнения // Матем. сборник. 2019. Т. 210. № 11. С. 76–102.
13. *Бутузов В.Ф.* О сингулярно возмущенных системах ОДУ с кратным корнем вырожденного уравнения // Изв. РАН. Сер. матем. 2020. Т. 84. № 2. С. 60–89.
14. *Нефедов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых сингулярно возмущенных задач в частных производных // Дифференц. ур-ния. 1995. Т. 31. №4. С. 719–722.