ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 6, с. 951–964

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.957

О РЕШЕНИЯХ МАТРИЧНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА[1)]

© 2022 г. А. В. Домрин[1,*]

[1] 119992 Москва, Воробьевы горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова
450008 Уфа, ул. Чернышевского, 112, ИМ с ВЦ УФИЦ РАН
119992 Москва, Воробьевы горы, 1, ЦФПМ МГУ, Россия

*e-mail: domrin@mi-ras.ru

Поступила в редакцию 15.11.2021 г.
Переработанный вариант 15.11.2021 г.
Принята к публикации 11.02.2022 г.

Показано, что любое вещественно-аналитическое решение продолжается до глобально-мероморфной функции от пространственной переменной x при каждом фиксированном значении временной переменной t. Во вполне фокусирующем случае показано также, что любое локальное вещественно-аналитическое решение продолжается вещественно-аналитически в некоторую (зависящую от решения) максимальную полосу, параллельную оси x. Библ. 25.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шрёдингера, вещественно-аналитические решения, аналитическое продолжение.

DOI: 10.31857/S0044466922060072

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКИ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для любых натуральных чисел n и k обозначим через M_{nk} множество всех комплексных $n\times k$-матриц или, эквивалентно, множество всех линейных операторов $\mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^n$. Нас интересуют свойства вещественно-аналитических (= $\mathbf{C}^\omega$) решений $u:\Omega\to M_{nk}$ матричного нелинейного уравнения Шрёдингера

$$iu_t = u_{xx} + uAu^*Bu, \tag{1.1}$$

где x,t — вещественные переменные, нижние индексы x и t означают частные производные по этим переменным, через $A = A^* \in M_{kk}$ и $B = B^* \in M_{nn}$ обозначены заданные (произвольные) невырожденные эрмитовы матрицы, $\Omega \subset \mathbb{R}^2_{xt}$ — открытое множество, а $u^*:\Omega\to M_{kn}$ означает отображение, эрмитово сопряженное к u.

Заметим, что базисы в пространствах $\mathbb{C}^k$ и $\mathbb{C}^n$ можно выбрать состоящими из собственных векторов матриц A и B, что делает сами эти матрицы диагональными: $A = \mathrm{diag}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$, $B = \mathrm{diag}(\beta_1,\ldots,\beta_n)$, где $\alpha_i,\beta_j \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. В частности, при $n = k = 1$, полагая $\lambda := \alpha_1\beta_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, можно записать (1.1) в виде одного скалярного уравнения на функцию $u:\Omega\to\mathbb{C}$,

$$iu_t = u_{xx} + \lambda|u|^2u. \tag{1.2}$$

Это уравнение было впервые изучено методом обратной задачи теории рассеяния в [1]. Различают его фокусирующий случай $\lambda > 0$ (отвечающий притягивающей нелинейности) и дефокусирующий случай $\lambda < 0$ (отталкивающая нелинейность). При $n = 2$ и $k = 1$, полагая $\lambda_j := \alpha_1\beta_j$,

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 19-01-00474).

$j = 1,2$, получаем (1.1) в виде системы двух уравнений на компоненты $u_j : \Omega \to \mathbb{C}$ вектора $u = (u_1, u_2)^{\mathrm{T}} : \Omega \to \mathbb{C}^2$,

$$\begin{aligned} iu_{1t} &= u_{1xx} + (\lambda_1|u_1|^2 + \lambda_2|u_2|^2)u_1, \\ iu_{2t} &= u_{2xx} + (\lambda_1|u_1|^2 + \lambda_2|u_2|^2)u_2, \end{aligned} \tag{1.3}$$

известной как система Манакова [2] или векторное нелинейное уравнение Шрёдингера. Случай $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ называется вполне фокусирующим, а случай $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ – вполне дефокусирующим.

Изучению матричного нелинейного уравнения Шрёдингера (1.1), а особенно его частных случаев (1.2) и (1.3), и свойств его решений различных классов посвящена обильная литература. О физических приложениях и об анализе специальных решений см. [3]–[5] и ссылки там. Метод обратной задачи теории рассеяния применительно к (1.2) занимает половину классической книги [6], а его распространение на общее уравнение (1.1) с быстроубывающими граничными условиями описано в [7], [8]. Наконец, различные классы решений уравнения (1.2) и его обобщения на случай многих пространственных переменных изучаются с точки зрения уравнений с частными производными в [9], [10], хотя для общего уравнения (1.1) результатов этого направления известно мало.

Нетрудно заметить, что большинство физически интересных решений являются вещественно-аналитическими по x и t (таковы, в частности, многосолитонные решения, аномальные волны, бризеры, конечнозонные решения) и у них нет особенностей, кроме полюсов, даже при комплексных значениях x и t. Но следующая теорема влечет, что класс вещественно-аналитических решений еще намного богаче.

Теорема 1. *Для любых чисел $x_0, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ и произвольных $\mathbf{C}^\omega$-функций $\varphi_0, \varphi_1 : (t_1, t_2) \to M_{nk}$, на некотором открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, содержащем $\{x_0\} \times (t_1, t_2)$, существует единственное $\mathbf{C}^\omega$-решение $u : \Omega \to M_{nk}$ уравнения* (1.1) *такое, что $u(x_0, t) = \varphi_0(t)$ и $u_x(x_0, t) = \varphi_1(t)$ для всех $t \in (t_1, t_2)$.*

Доказательство теоремы 1 дано в разд. 2 ниже и состоит по существу в применении теоремы Коши–Ковалевской с x в качестве временнóй переменной. Взять t в качестве временнóй переменной нельзя, так как ни условия, ни заключение теоремы Коши–Ковалевской в этом случае не будут выполнены, что было известно еще С.В. Ковалевской на примере уравнения теплопроводности. Приведем ее классический результат (см. [11, с. 22–24], [12]), служащий парадигмой для наших теорем 2 и 3. Задача Коши $u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = u_0(x)$ с заданной $\mathbf{C}^\omega$-функцией $u_0 : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{C}$ в качестве начального условия имеет $\mathbf{C}^\omega$-решение $u(x,t)$ в окрестности начала координат $(0,0) \in \mathbb{R}^2_{xt}$ тогда и только тогда, когда существует целая функция $U_0 \in \mathbb{O}(\mathbb{C})$, удовлетворяющая оценке $|U_0(z)| \leq Ae^{B|z|^2}$ при некоторых $A, B > 0$ и всех $z \in \mathbb{C}$ и такая, что $U_0(x) = u_0(x)$ при $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Поскольку столь сильное ограничение на начальное условие может показаться неожиданным, дадим набросок доказательства необходимости. Так как $\partial_t^m u = \partial_x^{2m} u$ для всех $m \in \mathbb{N}$, то $u(0,t) = \sum_{m=0}^{\infty}((2m)!/m!)c_{2m}t^m$, если $u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. По неравенствам Коши для $u(0,t)$, $|c_{2m}| \leq M(\delta)(m!/(2m)!)\delta^{-m}$ при некотором $\delta > 0$ и всех $m \in \mathbb{N}$. Но тогда радиус сходимости ряда $\sum_{m=0}^{\infty} c_{2m}x^{2m}$ по формуле Коши–Адамара равен ∞ (а требуемая оценка для модуля суммы этого ряда вытекает из формул для порядка и типа целой функции; см., например, [13, § 15, п. 47]). Заменяя u на u_x, получаем то же заключение и для нечетной части $\sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1}x^{2m+1}$ начального условия. В частности, мы видим, что всякое локальное $\mathbf{C}^\omega$-решение уравнения $u_t = u_{xx}$ (а также $iu_t = u_{xx}$, с тем же доказательством) аналитически продолжается до $\mathbf{C}^\omega$-решения в некоторую горизонтальную полосу на $\mathbb{R}^2_{xt}$, параллельную оси x.

На примере уравнения теплопроводности хорошо иллюстрируется также эффект аналитического сглаживания, которым обладает уравнение (1.2). А именно, решение задачи Коши $u_t = u_{xx}$,

$u(x,0) = u_0(x)$ с периодическими граничными условиями обычным методом разделения переменных имеет вид

$$u_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad \Rightarrow \quad u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} e^{inx}.$$

Даже при небольшой регулярности начального условия, скажем, при $u_0 \in L^1(0,2\pi)$, последовательность его коэффициентов Фурье равномерно ограничена, $|c_n| < M$, и тогда ряд для $u(x,t)$ сходится равномерно на компактах в полупространстве $\{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, \mathrm{Re}\, t > 0\}$. Значит, его сумма голоморфна в этом полупространстве и, в частности, решение $u(x,t)$ вещественно-аналитично на открытой полуплоскости $\Pi := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, t > 0\}$. То же самое верно и для решения на $\mathbb{R}^1_x$, заданного формулой Пуассона

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) \exp\left(-\frac{(\xi - x)^2}{4t}\right) d\xi,$$

если только начальное условие $u_0(x)$ принадлежит $L^1(e^{\alpha x^2}dx)$ при некотором $\alpha > 0$. Этот факт был отмечен Вейерштрассом в 1874 г. (в связи с упомянутым выше результатом Ковалевской) и использован им в 1881 г. для доказательства знаменитой теоремы о равномерном приближении полиномами на отрезке.

Указанный факт полностью справедлив для линейного уравнения Шрёдингера $iu_t = u_{xx}$ (см., например, [9, лемма 2.2.4 и § 2.5]) и частично для нелинейного уравнения Шрёдингера (1.2) (см. [14, теорема 1.1]; см. также [9, замечание 5.7.6]): если $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^1_x) \cap L^2(e^{x^2}dx)$, то при каждом $R > 0$ найдется такое $T > 0$, что классическое решение $u(x,t)$ задачи Коши $u(x,0) = u_0(x)$ для уравнения (1.2) вещественно-аналитично по x и t на прямоугольнике $(-R,R) \times (0,T) \subset \mathbb{R}^2_{xt}$. Здесь H^2 означает соболевское пространство. Таким образом, если начальное условие достаточно гладкое (примерно C^1) и убывает достаточно быстро при $x \to \pm\infty$, то решение задачи Коши для (1.2) мгновенно становится вещественно-аналитическим. (Это еще одна причина для изучения класса вещественно-аналитических решений: в него попадает решение любой задачи Коши, как только время сдвинулось с начального момента.) Для уравнения (1.1) с любыми n, k этот факт пока не установлен, хотя в [15] проведена подготовка для некоторого класса систем, содержащего (1.3).

Наши результаты о свойствах вещественно-аналитических решений уравнения (1.1) с любыми натуральными n и k содержатся в следующих двух теоремах. Они не вытекают из результатов об аналитическом сглаживающем эффекте, но и не влекут их.

Теорема 2. *Для любого* $\mathbf{C}^\omega$*-решения* $u(x,t)$ *уравнения* (1.1) *в окрестности точки* $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^2$ *можно указать такое число* $\delta > 0$ *и такое мероморфное* M_{nk}*-значное отображение* $U(x,t)$ *на области* $\{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |t - t_0| < \delta\}$*, что* $U(x,t) = u(x,t)$ *в окрестности точки* (x_0,t_0) *в* $\mathbb{R}^2$.

Теорема 3. *Пусть все собственные значения матриц* A *и* B *одного знака. Тогда для любого* $\mathbf{C}^\omega$*-решения* $u(x,t)$ *уравнения* (1.1) *в окрестности точки* $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^2$ *существует единственная максимальная полоса* $\Pi(u) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a(u) < t < b(u)\}$*, где* $-\infty \leqslant a(u) < t_0 < b(u) \leqslant +\infty$*, и* $\mathbf{C}^\omega$*-решение* $U(x,t)$ *уравнения* (1.1) *на полосе* $\Pi(u)$ *такое, что* $U(x,t) = u(x,t)$ *в окрестности точки* (x_0,t_0) *в* $\mathbb{R}^2$.

Таким образом, по теореме 2 все $\mathbf{C}^\omega$-решения уравнения (1.1) аналитически продолжаются в область комплексных значений x и t, причем глобально мероморфно по x. О характере продолжения по t в общем случае ничего сказать нельзя, т.к. за счет выбора функций φ_0, φ_1 в теореме 1 можно построить $\mathbf{C}^\omega$-решение, продолжение которого на комплексные значения x и t имеет любую наперед заданную особенность по t при данном x. Во вполне фокусирующем случае теорема 3 гарантирует продолжение любого $\mathbf{C}^\omega$-решения до $\mathbf{C}^\omega$-решения в некоторой полосе, параллельной оси x, совсем как для уравнения теплопроводности в упомянутом выше результате

С.В. Ковалевской. Для остальных случаев уравнения (1.1) (вполне дефокусирующего и смешанных) это утверждение также будет верно, но только если допустить полюсы у продолженного в полосу решения (это вытекает из теоремы 2).

Отметим еще, что утверждение теоремы 3 неулучшаемо в следующем смысле. Для любых a, b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, существует $\mathbf{C}^{\omega}$-решение $u(x,t)$ вполне фокусирующего уравнения (1.1) на полосе $\Pi = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a < t < b\}$, не допускающее $\mathbf{C}^{\omega}$-продолжения ни через одну граничную точку этой полосы. Такое решение можно построить с помощью теоремы 1 (для этого, согласно теореме 2, достаточно, чтобы хотя бы одна из функций $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$ на интервале $a < t < b$ не допускала даже мероморфного продолжения в окрестности точек $t = a$ и $t = b$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}^1_t$).

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Полагая $u(x,t) = p(x,t) + iq(x,t)$, перепишем (1.1) в виде следующей системы на вещественные $n \times k$-матричнозначные функции p и q:

$$p_{xx} = -q_t + R(p, q, p^{\mathrm{T}}, q^{\mathrm{T}}),$$
$$q_{xx} = p_t + S(p, q, p^{\mathrm{T}}, q^{\mathrm{T}}),$$

где R и S – полиномы с вещественными матричными коэффициентами. К этой системе применима теорема Коши–Ковалевской (см. [16, гл. I, § 7]), согласно которой для любой точки $t_0 \in (t_1, t_2)$ и любых вещественно-аналитических M_{nk}-значных функций $p_0(t)$, $p_1(t)$, $q_0(t)$, $q_1(t)$, заданных в окрестности точки t_0, единственное решение указанной системы с начальными условиями

$$p(x_0,t) = p_0(t), \quad \partial_x p(x_0,t) = p_1(t),$$
$$q(x_0,t) = q_0(t), \quad \partial_x q(x_0,t) = q_1(t),$$

задаваемое формальными степенными рядами с M_{nk}-значными коэффициентами от $x - x_0$ и $t - t_0$, является сходящимся в некоторой окрестности точки (x_0, t_0). Если при этом начальные условия – вещественные матрицы, то все коэффициенты указанных степенных рядов также вещественные матрицы, а значит, $p(x,t)$ и $q(x,t)$ – вещественные M_{nk}-значные функции при всех вещественных значениях x и t вблизи точки (x_0, t_0). Применив эти соображения к начальным функциям $p_j(t) = \operatorname{Re} \varphi_j(t)$ и $q_j(t) = \operatorname{Im} \varphi_j(t)$, $j = 1, 2$, во всех точках t_0 интервала (t_1, t_2) и взяв объединение полученных окрестностей точек (x_0, t_0) в качестве Ω, приходим к требуемому заключению.

3. ПОДГОТОВКА К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМЫ 2

3.1. Представление нулевой кривизны

Хорошо известен следующий факт (см., например, [17, п. 1.61]). Пусть U и V – гладкие $\mathrm{gl}(N, \mathbb{C})$-значные функции на односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2_{xt}$ (или голоморфные функции на односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}^2_{xt}$). Тогда система

$$E_x = UE, \quad E_t = VE \tag{3.1}$$

имеет гладкое (или голоморфное) обратимое решение $E : \Omega \to \mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$ в том и только том случае, когда всюду на Ω выполнено условие совместности

$$U_t - V_x + [U, V] = 0. \tag{3.2}$$

Здесь и далее через $[U, V] := UV - VU$ обозначается коммутатор матриц. В дальнейшем мы полагаем $N = n + k$ и записываем элементы из $gl(N, \mathbb{C})$ в виде блочных матриц:

$$\mathrm{gl}(N, \mathbb{C}) = M_{NN} = \begin{pmatrix} M_{nn} & M_{nk} \\ M_{kn} & M_{kk} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Вводя дополнительный *спектральный параметр* $z \in \mathbb{C}$, рассмотрим в качестве $U(x,t,z)$ и $V(x,t,z)$ следующие полиномы степеней 1 и 2 по z:

$$U(x,t,z) = az + q(x,t) \quad \text{и} \quad V(x,t,z) = bz^2 + F_1q(x,t)z + F_2q(x,t) \tag{3.4}$$

с постоянными диагональными матрицами a,b и блочно-внедиагональной относительно разложения (3.3) матрицей $q(x,t)$ вида

$$a = b = \begin{pmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_k \end{pmatrix}, \quad q(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & u(x,t) \\ v(x,t) & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

причем матричнозначные полиномы

$$F_1q = \frac{q}{2i}, \quad F_2q = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} uv & -u_x \\ v_x & -vu \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

от q и q_x подобраны так, чтобы левая часть уравнения (3.2) не зависела от z. Тогда условие совместности (3.2) вспомогательной линейной системы (3.1) записывается в виде следующей системы из двух матричнозначных уравнений на компоненты u,v матрицы q:

$$\begin{aligned} iu_t + u_{xx} - 2uvu &= 0 \in M_{nk}, \\ iv_t - v_{xx} + 2vuv &= 0 \in M_{kn}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Если мы дополнительно наложим на эти компоненты условие (в котором переменные x и t считаются комплексными, отсюда сопряжение в правой части)

$$-2v(x,t) := Au^*(\bar{x},\bar{t})B \tag{3.8}$$

и заменим t на $-t$, то каждое из двух уравнений системы (3.7) принимает вид (1.1) (здесь важны эрмитовость и обратимость матриц A и B). Таким образом, уравнение (1.1) представлено как условие совместности вспомогательной линейной системы (3.1), заданной равенствами (3.4)–(3.6), (3.8). Это представление (или его аналоги) используется во всех работах, изучающих матричное нелинейное уравнение Шрёдингера (1.1) и его частные случаи (1.2), (1.3) методом обратной задачи теории рассеяния (см. [1]–[8]).

3.2. Условие невырожденности

Одним из результатов локального голоморфного варианта метода обратной задачи теории рассеяния [18], [19] является следующий факт. Все локальные голоморфные решения $q(x,t)$ условия совместности (3.2) вспомогательной линейной системы (3.1), заданной равенствами (3.4) с произвольными постоянными диагональными матрицами $a,b \in \mathrm{gl}(N,\mathbb{C})$ и внедиагональной $\mathrm{gl}(N,\mathbb{C})$-значной функцией $q(x,t)$, а также надлежащим обобщением равенств (3.6) на этот случай, допускают аналитическое продолжение до глобально мероморфных функций от $x \in \mathbb{C}$, если выполнено условие невырожденности:

$$\text{диагональные матрицы } a \text{ и } b \text{ имеют простой спектр.} \tag{3.9}$$

(Напомним, что матрица имеет простой спектр, если все ее собственные значения различны.) В случае невыполнения условия (3.9), к приведенному выше утверждению имеются контрпримеры, например, система Дринфельда–Соколова [20], [21], ассоциированная с уравнениями Лакса $L_t = [P,L]$, где $L = \partial^4 + u_2(x,t)\partial^2 + u_1(x,t)\partial + u_0(x,t)$ и $P = L_+^{1/2}$. Для этой системы $a = \mathrm{diag}(1,-1,i,-i)$ и $b = a^2 = \mathrm{diag}(1,1,-1,-1)$.

В нашем случае матриц $a = b$, заданных равенством (3.5), условие невырожденности (3.9) выполнено тогда и только тогда, когда $n = k = 1$. Поэтому теорема 2 была до сих пор доказана [22] только в скалярном случае $n = k = 1$.

3.3. Ключевое алгебраическое свойство

Несмотря на невыполнение условия невырожденности (3.9) для интересующих нас матриц (3.5), рассуждения из [18], [19] могут быть проведены с надлежащими модификациями, если вместо всех внедиагональных голоморфных $\mathrm{gl}(N,\mathbb{C})$-значных функций $q(x,t)$ рассматривать только блочно-внедиагональные (как и указано в (3.5)) и воспользоваться следующим алгебраическим свойством (3.10) матрицы a из (3.5).

Обозначим через $D := M_{nn} \oplus M_{kk}$ и $W := M_{nk} \oplus M_{kn}$ векторные пространства всех блочно-диагональных и блочно-внедиагональных $N \times N$-матриц относительно разложения (3.3). Они являются инвариантными подпространствами линейного оператора $\mathscr{A} : \mathrm{gl}(N,\mathbb{C}) \to \mathrm{gl}(N,\mathbb{C})$, заданного формулой $\mathscr{A}(X) := [a, X]$, причем $\mathcal{A} \equiv 0$ на подпространстве D и

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{pmatrix} = 2i\begin{pmatrix} 0 & u \\ -v & 0 \end{pmatrix}$$

на подпространстве W. В частности,

$$\text{линейный оператор } \mathscr{A} : W \to W \text{ обратим.} \tag{3.10}$$

Это свойство многократно применяется в следующем пункте и еще дважды — в следующем разделе для проверки выполнения условий леммы 3.

3.4. Формальные калибровочные преобразования

Пусть $\mathbb{O}(x_0)$ есть множество всех $\mathrm{gl}(N,\mathbb{C})$-значных голоморфных ростков в точке $x_0 \in \mathbb{C}$, а $\mathfrak{D}(x_0)$ и $\mathcal{N}(x_0)$ — его подмножества, состоящие из всех D-значных (т.е. блочно-диагональных) и W-значных (т.е. блочно-внедиагональных) ростков соответственно. Для любой матрицы $X \in \mathrm{gl}(N,\mathbb{C})$ обозначим через X_d ее блочно-диагональную часть (проекцию на D в разложении $\mathrm{gl}(N,\mathbb{C}) = D \oplus W$), а через $X_{od} := X - X_d$ ее блочно-внедиагональную часть.

Обсудим вопрос о приведении первого уравнения $E_x = UE$ системы (3.1) к блочно-диагональному виду с помощью замены неизвестной функции E на новую неизвестную функцию $F = \Phi E$ для некоторой $\mathrm{GL}(N,\mathbb{C})$-значной функции $\Phi(x,z)$. В этом случае новое уравнение принимает вид $F_x = VF$, где $V = \Phi_x\Phi^{-1} + \Phi U\Phi^{-1}$. Нам будет удобно считать зависимость от спектрального параметра z формальной, введя следующую терминологию.

Назовем *связностью* любой формальный ряд Лорана вида $U(x,z) = az + \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)z^{-k}$, где матрица a задана формулой (3.5) и $u_k \in \mathbb{O}(x_0)$ для всех k. *Калибровочным преобразованием* называется любой ряд вида

$$\Phi(x,z) = I + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)z^{-(k+1)},$$

где $\varphi_k \in \mathbb{O}(x_0)$ для всех $k \geq 0$. Такие преобразования образуют группу относительно обычного умножения формальных степенных рядов от $1/z$. По определению, действие элемента Φ этой группы переводит связность U в связность $V := \Phi_x\Phi^{-1} + \Phi U\Phi^{-1}$. Это определение равносильно дифференциальному уравнению $\Phi_x = V\Phi - \Phi U$ или равенству $\partial_x - V = \Phi(\partial_x - U)\Phi^{-1}$ дифференциальных операторов первого порядка. Из последнего равенства легко вывести групповое свойство: если Φ переводит U в V, а Ψ переводит V в W, то действие ряда $\Psi\Phi$ переводит U в W, а действие обратного ряда Φ^{-1} переводит V в U.

Лемма 1. *Пусть $q \in \mathcal{N}(x_0)$. Тогда для любого набора блочно-диагональных ростков $\varkappa_j \in \mathfrak{D}(x_0)$ $(j = 1,2,\ldots)$ и любого набора блочно-диагональных матриц $C_j \in D$ $(j = 1,2,\ldots)$ существует единственный формальный степенной ряд вида*

$$\Phi(x,z) = I + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x)z^{-j} \text{ с } \varphi_j \in \mathbb{O}(x_0)\ (j = 1,2,\ldots),$$

удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$\partial_x\Phi(x,z) = (az + q(x))\Phi(x,z) - \Phi(x,z)\left(az + \sum_{k=1}^{\infty} \varkappa_k(x)z^{-k}\right) \tag{3.11}$$

и нормировочному условию $\{\varphi_j(x_0)\}_d = C_j$ при $j = 1,2,\ldots$.

Доказательство. Сравнение коэффициентов при степенях z в левой и правой частях уравнения (3.11) дает равенства $0 = [a, \varphi_1] + q$ (при z^0) и $\varphi'_j = [a, \varphi_{j+1}] + q\varphi_j - \sum_{k=1}^{j-1} \varphi_k \varkappa_{j-k} - \varkappa_j$ (при z^{-j}, $j \geq 1$). Полагая $D_j := (\varphi_j)_d$ и $N_j := (\varphi_j)_{od}$, запишем эти равенства в виде

$$0 = [a, N_1] + q, \tag{E_{od}^0}$$

$$D'_j = (qN_j)_d - \sum_{k=1}^{j-1} D_k \varkappa_{j-k} - \varkappa_j, \tag{E_d^j}$$

$$N'_j = [a, N_{j+1}] + qD_j + (qN_j)_{od} - \sum_{k=1}^{j-1} N_k \varkappa_{j-k}. \tag{E_{od}^j}$$

Свойство (3.10) позволяет нам последовательно найти (т.е. выразить через q, $\varkappa_j$ и C_j) ростки $N_1(x) = -\mathcal{A}^{-1} q(x)$ из (E_{od}^0), $D_1(x) = C_1 + \int_{x_0}^x ((q(s)N_1(s))_d - \varkappa_1(s))ds$ из (E_d^1), $N_2 = \mathcal{A}^{-1}(N'_1 - qD_1 - (qN_1)_{od})$ из (E_{od}^1), D_2 из (E_d^2), N_3 из (E_{od}^2) и т.д.

Лемма 2. *Всякое калибровочное преобразование связности $U_0(x, z) \equiv az$ в себя блочно-диагонально и не зависит от x.*

Доказательство. Уравнения (E_{od}^0), (E_d^j) и (E_{od}^j) с $q \equiv 0$ и $\varkappa_j \equiv 0$ принимают вид

$$0 = [a, N_1], \quad D'_j = 0, \quad N'_j = [a, N_{j+1}].$$

Отсюда в силу (3.10) по индукции вытекает, что $N_j \equiv 0$ для всех $j = 1, 2, \ldots$. Так как $D'_j = 0$, то оставшиеся матрицы D_j не зависят от x.

3.5. Классы Жевре

Построенные в п. 3.4 калибровочные преобразования, как правило, расходятся (имеют нулевой радиус сходимости) как степенные пяды от $1/z$. Удобный способ количественно измерять скорость этой расходимости доставляется понятием класса Жевре.

Для каждого $\alpha \geq 0$ будем обозначать через Gev_α и называть классом Жевре α множество всех формальных степенных рядов вида $\varphi(z) = \sum_{k=0}^\infty \varphi_k z^{-(k+1)}$ с $\varphi_k \in \mathrm{gl}(N, \mathbb{C})$ таких, что ряд $\sum_{k=0}^\infty (k!)^{-\alpha} |\varphi_k| x^k$ имеет ненулевой радиус сходимости. Здесь $|\cdot|$ означает любую норму на $\mathrm{gl}(N, \mathbb{C})$, обладающую свойством $|AB| \leq |A||B|$. Обозначим через Gev_α^{od} множество всех блочно-внедиагональных $\varphi \in \mathrm{Gev}_\alpha$, т.е. таких, что $\varphi_k \in W$ для всех $k \geq 0$. Кроме того, при $\alpha \geq 0$ и $A > 0$ обозначим через $G_\alpha(A)$ множество всех формальных степенных рядов $\varphi(z) = \sum_{k=0}^\infty \varphi_k z^{-(k+1)}$ с $\varphi_k \in \mathrm{gl}(N, \mathbb{C})$ таких, что $\|\varphi\|_{\alpha,A} := \sum_{k=0}^\infty (k!)^{-\alpha} |\varphi_k| A^k < \infty$. Тогда ясно, что $G_\alpha(A)$ есть банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{\alpha,A}$, изометрически изоморфное пространству l_1, и что для всех $\alpha \geq 0$ выполнено равенство

$$\mathrm{Gev}_\alpha = \bigcup_{A>0} G_\alpha(A).$$

Устанавливать принадлежность формальных степенных рядов тем или иным классам Жевре мы будем с помощью следующей леммы.

Лемма 3. *Пусть даны целые числа $m, \nu \geq 1$ и зависящее от параметра $z \in \mathbb{C}$ дифференциальное уравнение*

$$\frac{dy}{dx} = z^m Ay + \sum_{k=0}^{m-1} z^k B_k(x, y) \tag{3.12}$$

на $\mathbb{C}^\nu$-значную голоморфную функцию $y(x)$ в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{C}$, где $A : \mathbb{C}^\nu \to \mathbb{C}^\nu$ есть обратимый линейный оператор, а каждое $B_k(x, y)$ есть полином от компонент вектора y с $\mathbb{C}^\nu$-значными *коэффициентами, голоморфными в точке x_0. Тогда это уравнение имеет единственное формальное решение вида*

$$y(x,z) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} a_k(x) z^{-k}$$

с $\mathbb{C}^{\nu}$-значными коэффициентами, голоморфными в точке x_0. При этом все $\mathbb{C}^{\nu}$-значные ростки $a_k(x)$ голоморфны в некоторой общей для них окрестности точки x_0, $a_0(x) \equiv 0$, и формальный ряд $y(x_0,\cdot)$ принадлежит классу Жевре $\mathrm{Gev}_{1/m}$.

Эта лемма является частным случаем результата Я. Сибуя об асимптотике решений сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [23, теорема A.5.4.1] или [24, теорема XII-5-2]). Ее короткое прямое доказательство приведено в [19, § 5.2].

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Применяя лемму 1 с $\varkappa_j \equiv 0$ и $C_j = 0$ при всех $j \in \mathbb{N}$, мы видим, что для любого ростка $q \in \mathcal{N}(x_0)$ существует единственное формальное решение

$$\mu(x,z) = I + \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} m_k(x) z^{-(k+1)}, \quad m_k \in \mathbb{O}(x_0),$$

дифференциального уравнения $\mu_x = (az + q(x))\mu - \mu az$ такое, что все коэффициенты $m_k(x_0)$ формального степенного ряда

$$Lq(z) := \mu(x_0, z) - I \tag{4.1}$$

блочно-внедиагональны (т.е. принадлежат W). Ряд $Lq(z)$ называется локальными данными рассеяния голоморфного блочно-внедиагонального ростка $q(x)$ в точке x_0. Наше доказательство теоремы 2 устроено как серия лемм о свойствах отображения $q \mapsto Lq$ и обратного к нему.

Лемма 4. $Lq \in \mathrm{Gev}_1^{od}$ *для всех* $q \in \mathcal{N}(x_0)$.

Доказательство. Полагая в равенствах (E_{od}^0), (E_d^j) и (E_{od}^j), эквивалентных уравнению (3.11), $D_j \equiv 0$ для всех целых $j \geq 1$, можно последовательно найти $N_1 = -\mathcal{A}^{-1}q$ из (E_{od}^0), $\varkappa_1 = (qN_1)_d$ из (E_d^1), $N_2 = \mathcal{A}^{-1}(N_1' - (qN_1)_{od})$ из (E_{od}^1), $\varkappa_2 = (qN_2)_d$ из (E_d^2), N_3 из (E_{od}^2) и т.д. Это означает, что для любого $q \in \mathcal{N}(x_0)$ существует единственное калибровочное преобразование $M(x,z)$ некоторой блочно-диагональной связности (в наших обозначениях равной $az + \varkappa(x,z)$, где $\varkappa(x,z) := \sum\nolimits_{j=1}^{\infty} \varkappa_j(x) z^{-j}$) в связность $az + q(x)$ такое, что формальный степенной ряд $M(x,z) - I$ блочно-внедиагонален для всех x из той окрестности точки x_0, в которой определен росток q. Покажем, что

$$Lq(z) = M(x_0, z) - I. \tag{4.2}$$

Действительно, существует блочно-диагональное калибровочное преобразование $\delta(x,z)$ связности $U_0(x,z) \equiv az$ в связность $az + \varkappa(x,z)$ (оно строится отдельно на каждом блоке). Тогда $\Delta(x,z) := \delta^{-1}(x,z) M^{-1}(x,z) \mu(x,z)$ есть калибровочное преобразование связности $U_0(x,z) \equiv az$ в себя, а все такие преобразования блочно-диагональны и не зависят от x по лемме 2. Из равенства $\mu = M\delta\Delta = \delta\Delta + (M - I)\delta\Delta$ в силу блочной диагональности $\delta\Delta$ и блочной внедиагональности $M - I$ вытекает, что $\mu_d = \delta\Delta$ и $\mu_{od} = (M - I)\delta\Delta$. Отсюда получаем равенство $\mu_{od} = (M - I)\mu_d$, которое при $x = x_0$ превращается в (4.2).

Покажем теперь, что $M(x_0,\cdot) - I \in \mathrm{Gev}_1$. Рассмотрим блочно-внедиагональный степенной ряд $N(x,z) := M(x,z) - I$. Уравнение (3.11) для $M(x,z)$, имеющее вид $M_x = (az + q)M - M(az + \varkappa)$, переписывается в терминах $N(x,z)$ так: $N_x = z\mathcal{A}N + q(I + N) - (I + N)\varkappa$. Взяв блочно-диагональные части, получим $0 = (qN)_d - \varkappa$. Подставляя теперь $\varkappa = (qN)_d$ в блочно-внедиагональные части, получаем уравнение вида (3.12), которому удовлетворяет N:

$$N_x = z\mathcal{A}N + q + (qN)_{od} - N(qN)_d,$$

где $\mathcal{A}N = [a, N]$, как в п. 3.3. Применив лемму 3 с $m = 1$ (для чего надо записать все компоненты матрицы N в один вектор $y \in \mathbb{C}^\nu$ и воспользоваться свойством (3.10) оператора $\mathcal{A}$), получим, что $N(x_0, \cdot) \in \mathrm{Gev}_1$.

Лемма 5. *Отображение* $L : \mathcal{N}(x_0) \to \mathrm{Gev}_1^{od}$ *инъективно.*

Доказательство. Зададим матрицы $q_j, m_{jk} \in \mathrm{gl}(N, \mathbb{C})$ формулами $q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j (x - x_0)^j$ и $\mu(x, z) = I + \sum_{j,k=0}^{\infty} m_{jk} (x - x_0)^j z^{-(k+1)}$. Сравнение коэффициентов при $(x - x_0)^j z^0$ в равенстве $\mu_x = [az, \mu] + q\mu$ дает набор уравнений

$$[a, m_{j0}] + q_j = 0, \quad j \geq 0, \tag{4.3}$$

а сравнение коэффициентов при $(x - x_0)^j z^{-(k+1)}$ в том же равенстве дает

$$(j+1) m_{j+1,k} = [a, m_{j,k+1}] + \sum_{s=0}^{j} q_s m_{j-s,k}, \quad j, k \geq 0. \tag{4.4}$$

Пусть нам известны коэффициенты $m_{0k} \in \mathrm{gl}(N, \mathbb{C})$ формального ряда $Lq(z) = \sum_{k=0}^{\infty} m_{0k} z^{-(k+1)}$. Задача состоит в том, чтобы выразить через них матрицы $m_{j0} \in \mathrm{gl}(N, \mathbb{C})$, в терминах которых можно найти $q_j = [m_{j0}, a]$ согласно (4.3). На шаге 1 мы находим $q_0 = [m_{00}, a]$ из (4.3) и замечаем, что равенства (4.4) с $j = 0$ выражают набор всех m_{1k} через набор всех m_{0k} и q_0. Это позволяет нам на шаге 2 найти $q_1 = [m_{10}, a]$ из (4.3) и выразить все m_{2k} через уже известные матрицы m_{1k}, m_{0k}, q_0, q_1 посредством равенств (4.4) с $j = 1$. Продолжая таким образом, получаем явные формулы для всех коэффициентов q_j ростка $q(x)$ через коэффициенты m_{0k} формального ряда $Lq(z)$, чем и доказана инъективность отображения L.

Для формулировки следующей леммы определим отображение $B : \mathrm{Gev}_1 \to \mathcal{N}(x_0)$ по формуле

$$B\varphi(x) := \operatorname{res}[\gamma_-(x, z), a], \quad \text{где} \quad \operatorname{res}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k\right\} := c_{-1} \tag{4.5}$$

означает вычет формального ряда Лорана, а через $\gamma_-(x, \cdot) \in I + \mathrm{Gev}_1$ обозначено единственное решение задачи Римана

$$e^{a(x-x_0)z} (I + \varphi(z))^{-1} = \gamma_-^{-1}(x, z) \gamma_+(x, z) \tag{4.6}$$

(см. [18, § 5] или [19, § 4, особенно п. 4.3 и равенство (4.8)]). Указанное решение существует для всех x в некоторой окрестности точки x_0, имеет вид $\gamma_-(x, z) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(x) z^{-(j+1)}$ для некоторых ростков $g_j \in \mathcal{O}(x_0)$ и является (согласно лемме 4.9 работы [19]) калибровочным преобразованием связности $U_0(x, z) = az$ в связность $U(x, z) = az + B\varphi(x)$, причем $\gamma_-(x_0, z) = I + \varphi(z)$.

Лемма 6. *Имеем* $LB\varphi = \varphi$ *для всех* $\varphi \in \mathrm{Gev}_1^{od}$. *В частности, отображение* $L : \mathcal{N}(x_0) \to \mathrm{Gev}_1^{od}$ *биективно и обратным к нему является сужение отображения* $B : \mathrm{Gev}_1 \to \mathcal{N}(x_0)$ *на* Gev_1^{od}.

Доказательство. Положим $q(x) := B\varphi(x)$. Тогда $\gamma_-(x, z)$ является калибровочным преобразованием связности $U_0(x, z) := az$ в связность $U(x, z) := az + q(x)$. Обозначая через $\mu(x, z)$ калибровочное преобразование из определения (4.1) формального степенного ряда $Lq(z)$, мы видим из группового свойства, что $\Delta(x, z) := \gamma_-^{-1}(x, z)\mu(x, z)$ является калибровочным преобразованием связности $U_0(x, z)$ в себя. Но все такие преобразования по лемме 2 блочно-диагональны и не зависят от x. В частности, при $x = x_0$ равенство $\gamma_-^{-1}(x, z)\mu(x, z) = \Delta(x, z)$ принимает вид

$$I + Lq(z) = (I + \varphi(z))\Delta(z)$$

для блочно-диагонального степенного ряда $\Delta(z) := \Delta(x_0, z)$. Отделяя здесь блочно-диагональные и внедиагональные части и пользуясь (впервые в этом рассуждении) блочной внедиагональностью $\varphi(z)$, мы получаем равенства $I = \Delta(z)$ и $Lq(z) = \varphi(z)\Delta(z)$, влекущие требуемое равенство $Lq(z) = \varphi(z)$.

Тем самым доказана сюръективность L как отображения $\mathcal{N}(x_0) \to \mathrm{Gev}_1^{od}$. Вместе с леммой 5 это влечет, что указанное отображение биективно, причем L и B суть обратные друг к другу биекции между множествами $\mathcal{N}(x_0)$ и Gev_1^{od}.

Лемма 7. *Пусть $q \in \mathcal{N}(x_0)$ и $Lq \in \mathrm{Gev}_\alpha$ при некотором $\alpha < 1$. Тогда существует такая глобально-мероморфная функция $Q : \mathbb{C}_x^1 \to W$, что $Q(x) = q(x)$ для всех x в некоторой окрестности точки x_0.*

Доказательство. Если росток $q \in \mathcal{N}(x_0)$ таков, что формальный ряд $\varphi := Lq$ принадлежит Gev_α при каком-то $\alpha < 1$, то задача Римана (4.6) из определения ростка $B\varphi$ подпадает под условия теоремы 3(B) из [18] (или теоремы 4(B) из [19]) с $m = 1$ и $\Omega = \mathbb{C}_x^1$. По указанной теореме, $\gamma_-(x,z)$ является глобально-мероморфной функцией от $x \in \mathbb{C}$ со значениями в банаховом пространстве $G_1(A)$ для любого $A > 0$. Отсюда вытекает глобальная мероморфность всех коэффициентов $g_j(x)$ разложения $\gamma_-(x,z) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(x) z^{-(j+1)}$, а значит, и глобальная мероморфность $\mathrm{gl}(N,\mathbb{C})$-значной функции $B\varphi(x) = [g_0(x), a]$, определенной равенством (4.5). Но так как по лемме 6 имеем $BLq = q$ для всех $q \in \mathcal{N}(x_0)$, то росток построенной функции $Q(x) := B\varphi(x) = BLq(x) \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_x^1)$ в точке x_0 совпадает с исходным ростком $q(x)$.

Лемма 8. *Пусть $q_0 \in \mathcal{N}(x_0)$ и задача Коши $q(x,t_0) = q_0(x)$ для уравнения* (3.2) *с полиномами U,V вида* (3.4)–(3.6) *или, что то же самое, для системы* (3.7) *на компоненты u, v матрицы q имеет локальное голоморфное решение $q(x,t)$ в окрестности точки $(x_0,t_0) \in \mathbb{C}^2$. Тогда $Lq_0 \in \mathrm{Gev}_{1/2}$.*

Доказательство. Будем обозначать через $\mathbb{O}(x_0,t_0)$ множество всех голоморфных $\mathrm{gl}(N,\mathbb{C})$-значных ростков в точке $(x_0,t_0) \in \mathbb{C}^2$, а через $\mathcal{N}(x_0,t_0)$ подмножество всех блочно-внедиагональных ростков. Сначала рассмотрим произвольный росток $q \in \mathcal{N}(x_0,t_0)$. По лемме 1, при каждом фиксированном t, близком к t_0, существует единственный формальный степенной ряд $\mu(x,t,z) = I + \mu_1(x,t)z^{-1} + \mu_2(x,t)z^{-2} + \ldots$ с коэффициентами из $\mathbb{O}(x_0,t_0)$ такой, что $\mu_x = (az+q)\mu - \mu az$ и ряд $\mu(x_0,t,z) - I$ блочно-внедиагонален. (Отметим, что голоморфность всех $\mu_k(x,t)$ по t ясна из доказательства леммы 1 и что формальный ряд $\mu(x_0,t_0,z) - I$ по определению совпадает с данными рассеяния $Lq_0(z)$ ростка $q_0(x) := q(x,t_0) \in \mathcal{N}(x_0)$.) Положим

$$V(x,t,z) := bz^2 + F_1(q)(x,t)z + F_2(q)(x,t). \tag{4.7}$$

Это полином степени 2 от z с коэффициентами из $\mathbb{O}(x_0,t_0)$.

Покажем, что если росток $q \in \mathcal{N}(x_0,t_0)$ удовлетворяет уравнению (3.2) как в условии леммы, то формальный ряд Лорана $\widetilde{V} := -\mu^{-1}\mu_t + \mu^{-1}V\mu$ имеет вид

$$\widetilde{V}(x,t,z) = bz^2 + \sum_{k=-\infty}^{1} \varphi_k(t) z^k \tag{4.8}$$

для некоторых *блочно-диагональных* ростков $\varphi_k \in \mathbb{O}(t_0)$. Действительно, вводя в рассмотрение полиномы $U(x,t,z) := az + q(x,t)$ и $\widetilde{U}(x,t,z) := az$ степени 1 от z с коэффициентами из $\mathbb{O}(x_0,t_0)$, мы можем переформулировать определение ряда $\mu(x,t,z)$ так: $\mu(x,t,z)$ есть калибровочное преобразование связности $\widetilde{U}(x,t,z)dx + \widetilde{V}(x,t,z)dt$ в связность $U(x,t,z)dx + V(x,t,z)dt$ в том же смысле, что и в п. 3.4. С другой стороны, выполнение уравнения (3.2) для ростка $q \in \mathcal{N}(x_0,t_0)$ эквивалентно тому, что связность $U\,dx + V\,dt$ плоская:

$$U_t - V_x + [U,V] = 0 \quad \text{в окрестности точки} \quad (x_0,t_0) \in \mathbb{C}^2.$$

Так как кривизна связности меняется ковариантным образом при калибровочных преобразованиях (в том числе и формальных), то получаем отсюда равенство $\widetilde{U}_t - \widetilde{V}_x + [\widetilde{U},\widetilde{V}] = 0$, т.е. $\widetilde{V}_x = [az,\widetilde{V}]$. Подставляя разложение $\widetilde{V}(x,t,z) = \sum_{k=-\infty}^{2} \varphi_k(x,t) z^k$ в равенство $\widetilde{V}_x = [az,\widetilde{V}]$, приходим к системе

$$(\partial_x \varphi_k)_d = 0, \quad (\partial_x \varphi_k)_{od} = [a, (\varphi_{k-1})_{od}] \quad \text{для всех целых} \quad k \le 2,$$

откуда убывающей индукцией по k, начиная с уже известного коэффициента $\varphi_2(x,t) \equiv b$, убеждаемся, что все матрицы $\varphi_k(x,t)$ блочно-диагональны и не зависят от x, чем и доказано утверждение (4.8).

По самому определению ряда $\widetilde{V}$, блочно-внедиагональный ряд $N(t,z) := \mu(x_0,t,z) - I$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $N_t = V(I+N) - (I+N)\widetilde{V}$. Отделяя в этом равенстве блочно-диагональные части, имеем $0 = V_d + (V_{od}N)_d - \widetilde{V}$. Подставляя теперь $\widetilde{V} = V_d + (V_{od}N)_d$ в блочно-внедиагональные части, получаем уравнение вида (3.12), которому удовлетворяет $N(t,z)$:

$$N_t = VN - NV_d + V_{od} - (I+N)(V_{od}N)_d.$$

Чтобы проверить, что это уравнение действительно имеет вид (3.12) (с переменной t вместо x и после записи всех матричных элементов N в один вектор $y \in \mathbb{C}^\nu$), заметим следующее. Во-первых, как разность между $VN - NV_d$ и $[bz^2, N]$, так и выражение V_{od} являются полиномами степени не выше 1 от z, коэффициенты которых зависят голоморфно от t и полиномиально от N. Во-вторых, линейный оператор $\mathcal{A}N = [b,N]$ на пространстве W обратим согласно (3.10). Поэтому выполнены условия леммы 3 с $m = 2$, которая и дает, что формальный ряд $Lq_0(z) = N(t_0,z)$ принадлежит классу $\mathrm{Gev}_{1/2}$.

Теорема 2 вытекает из лемм 7 и 8. Действительно, пусть $u(x,t)$ – любое $\mathbf{C}^\omega$-решение уравнения (1.1) в окрестности точки $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^2$. Подставляя в степенные ряды для всех компонент отображения $u(x,t)$ комплексные значения переменных x и t, можно считать $u(x,t)$ голоморфной M_{nk}-значной функцией в окрестности точки (x_0,t_0) в $\mathbb{C}^2$. Тогда, согласно (3.8), блочно-внедиагональная функция

$$q(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & u(x,-t) \\ v(x,-t) & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad -2v(x,-t) = Au^*(\bar{x},-\bar{t})B, \tag{4.9}$$

является голоморфным решением системы (3.7) в окрестности $(x_0,-t_0)$ в $\mathbb{C}$. По лемме 8 имеем $Lq(z,-t) \in \mathrm{Gev}_{1/2}$ для всех $t \in \mathbb{C}$, близких к t_0. Тогда по лемме 7 функция $Q(x,-t) = BLq(x,-t)$ глобально мероморфна по $x \in \mathbb{C}^1$ при каждом $t \in \mathbb{C}$ вблизи t_0 и совпадает с $q(x,-t)$ в окрестности точки (x_0,t_0). Из определения (4.5) отображения B видно, что функция $Q(x,-t)$ мероморфна на $\{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |t - t_0| < \delta\}$ как функция двух переменных. Записав теперь

$$Q(x,-t) = \begin{pmatrix} 0 & U(x,t) \\ V(x,t) & 0 \end{pmatrix},$$

получаем искомое мероморфное продолжение $U(x,t)$ исходной функции $u(x,t)$.

5. ПОДГОТОВКА К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМЫ 3

Фиксируем точку $x_0 \in \mathbb{R}$. Будем называть голоморфный блочно-внедиагональный росток $q \in \mathcal{N}(x_0)$ *симметричным*, если матрица $q(x)$ косоэрмитова для всех $x \in \mathbb{R}$, близких к x_0. Это эквивалентно тому, что $q(\bar{x})^* = -q(x)$ для всех $x \in \mathbb{C}$, близких к x_0.

Лемма 9. *Если росток $q \in \mathcal{N}(x_0)$ симметричен, то формальный степенной ряд $(I + Lq(\bar{z}))^*(I + Lq(z)) \in I + \mathrm{Gev}_1$ блочно-диагонален.*

Доказательство. Применим к дифференциальному уравнению $\mu_x = (az + q(x))\mu - \mu az$, входящему в определение (4.1) ряда $Lq(z) = \mu(x_0,z) - I$, операцию эрмитова сопряжения и заменим в полученном равенстве переменные x, z на $\bar{x}, \bar{z}$ соответственно. В силу косоэрмитовости матрицы a и симметричности $q(x)$ полученное равенство можно переписать в виде $\nu_x = az\nu - (az + q(x))\nu$, означающем, что ряд $\nu(x,z) := \mu(\bar{x},\bar{z})^*$ является калибровочным преобразованием связности $U(x,z) := az + q(x)$ в связность $U_0(x,z) := az$. Тогда калибровочное преобразование $\nu(x,z)\mu(x,z)$ переводит U_0 в себя. По лемме 2 оно блочно-диагонально. При $x = x_0$ получаем, что ряд $\nu(x_0,z)\mu(x_0,z) = (I + Lq(\bar{z}))^*(I + Lq(z))$ блочно-диагонален. Принадлежность этого ряда множеству $I + \mathrm{Gev}_1$ вытекает из леммы 4 и замкнутости $I + \mathrm{Gev}_1$ относительно умножения (см. [18, лемма 2] или [19, лемма 4.2]).

Лемма 10. *Пусть росток* $q \in \mathcal{N}(x_0)$ *симметричен и* $Lq \in \mathrm{Gev}_\alpha$ *для некоторого* $\alpha < 1$. *Тогда найдется блочно-диагональный ряд* $r \in I + \mathrm{Gev}_1$ *такой, что ряд* $f(z) := (I + Lq(z))r^{-1}(z) \in I + \mathrm{Gev}_1$ *удовлетворяет равенству* $f(\overline{z})^* f(z) = I$.

Доказательство. Ясно, что ряд $\delta(z) := (I + Lq(\overline{z}))^*(I + Lq(z))$ удовлетворяет равенству $\delta(\overline{z})^* = \delta(z)$, т.е. оба блока блочно-диагональной (по лемме 9) матрицы $\delta(z)$ суть формальные степенные ряды от z^{-1} с эрмитовыми коэффициентами и со свободным членом I. По лемме 2 работы [18] (или лемме 4.2 работы [19]) векторное пространство $\mathbb{C}I + G_1(A)$ является при каждом $A > 0$ банаховой алгеброй относительно нормы $\|\lambda I + \varphi\| := |\lambda| + A\|\varphi\|_{1,A}$ и обычного умножения формальных степенных рядов. Выберем $A > 0$ столь малым, что $\|\delta - I\|_{1,A} < 1$ (это возможно в силу условия $Lq \in \mathrm{Gev}_\alpha$, $\alpha < 1$, и леммы 4 работы [18]) и, пользуясь голоморфным функциональным исчислением в банаховых алгебрах (см., например, [25, теорема 10.27]), применим отдельно к каждому из двух диагональных блоков матрицы $\delta(z) - I$ голоморфную функцию $F(w) = (1 + w)^{1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{1/2}^k w^k$, где $|w| < 1$ и $C_\beta^k := \beta(\beta - 1)\ldots(\beta - k + 1)/k!$ для любого $\beta \in \mathbb{C}$ (при подстановке $\delta(z) - I$ вместо w ряд сойдется по норме пространства $\mathbb{C}I + G_1(A)$). Получим блочно-диагональный ряд $r \in I + \mathrm{Gev}_1$ со свойствами $r(\overline{z})^* = r(z)$ и $r(z)^2 = \delta(z)$. Перепишем последнее равенство в виде $\delta(z) = r(\overline{z})^* r(z)$. Тогда формула $(I + Lq(\overline{z}))^*(I + Lq(z)) = \delta(z)$ принимает вид $f(\overline{z})^* f(z) = I$ для $f := (I + Lq)r^{-1} \in I + \mathrm{Gev}_1$, что и требовалось.

Лемма 11. *Пусть росток* $q \in \mathcal{N}(x_0)$ *симметричен и* $Lq \in \mathrm{Gev}_\alpha$ *для некоторого* $\alpha < 1$. *Тогда глобальное мероморфное продолжение* $Q : \mathbb{C}_x^1 \to W$ *ростка* q, *существующее по лемме* 7, *не имеет полюсов на вещественной оси* $\mathbb{R}_x^1$.

Доказательство. Согласно формуле $Q = BLq$ из доказательства леммы 7 и определению (4.5) отображения B, функция $Q(x)$ голоморфна в каждой точке $x \in \mathbb{C}$, для которой задача Римана (4.6) разрешима. С другой стороны, разрешимость (4.6) при заданном значении $x \in \mathbb{C}$ вытекает из разрешимости при том же x задачи Римана

$$e^{a(x-x_0)z} f^{-1}(z) = \tilde{\gamma}_-^{-1}(x, z)\tilde{\gamma}_+(x, z), \tag{5.1}$$

полученной из (4.6) заменой ряда $I + Lq(z)$ в левой части на ряд $f(z) := (I + Lq(z))r^{-1}(z)$ из леммы 10. (Действительно, так как блочно-диагональный ряд $r^{-1}(z)$ коммутирует с диагональной матрицей $e^{a(x-x_0)z}$, то (5.1) можно записать в виде $r(z)e^{a(x-x_0)z}(I + Lq(z))^{-1} = \tilde{\gamma}_-^{-1}(x, z)\tilde{\gamma}_+(x, z)$, откуда после умножения слева на $r^{-1}(z)$ ясно, что ряды $\gamma_- := \tilde{\gamma}_- r$ и $\gamma_+ := \tilde{\gamma}_+$ образуют решение (4.6).) Поэтому достаточно доказать разрегимость задачи Римана (4.6) для всех $x \in \mathbb{R}^1$. Это и делается далее.

Будем обозначать через $\{\cdot\}_+$ и $\{\cdot\}_-$ положительную и отрицательную части ряда Лорана:

$$\left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n\right\}_+ := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n\right\}_- := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$$

и введем обозначение $E_0(x, z) := e^{a(x-x_0)z}$. Согласно сказанному в [18, § 5], для разрешимости изучаемой нами задачи Римана (5.1) достаточно, чтобы был обратим оператор $X := I + T^{-1}M^{-1}K$, стоящий в левой части равенства (11) работы [18], где $T\varphi := \{\varphi E_0\}_-$, $M\varphi := \varphi f^{-1}$, $K\varphi := \{\{\varphi E_0\}_+ f^{-1}\}_-$. Отметим, что в силу леммы 6 работы [18], X есть фредгольмов оператор индекса 0 на банаховом пространстве $G_1(A)$ для надлежащего $A > 0$ (где можно считать $2B_0 < A < A_0$, см. выбор B, A_1, A_2 сразу после доказательства леммы 7 работы [18]). Согласно альтернативе Фредгольма (см., например, [25, теорема 4.25]), этот оператор обратим тогда и только тогда, когда имеет нулевое ядро. Поэтому достаточно проверить, что если $\varphi \in G_1(A)$ и $X\varphi = 0$, то $\varphi = 0$.

Для этой проверки заметим, что из равенства $(I + T^{-1}M^{-1}K)\varphi = 0$ вытекает $(MT + K)\varphi = 0$. Но выражение $(MT + K)\varphi = \{\varphi E_0\}_- f^{-1} + \{\{\varphi E_0\}_+ f^{-1}\}_-$ совпадает с $\{\varphi E_0 f^{-1}\}_-$. Поэтому равенство $(MT + K)\varphi = 0$ означает, что формальный ряд Лорана $E(z) := \varphi(z)E_0(z)f^{-1}(z)$ (корректно определеный в силу указанного выше выбора A) содержит только неотрицательные степени z. Значит, это верно и для сопряженного ряда $E(\bar{z})^* = f^{-1}(\bar{z})^* E_0(\bar{z})^* \varphi(\bar{z})^*$ и для их произведения

$$E(z)E(\bar{z})^* = \varphi(z)E_0(z)\{f(\bar{z})^* f(z)\}^{-1} E_0(\bar{z})^* \varphi(\bar{z})^*,$$

которое в силу свойств $f(\bar{z})^* f(z) = I$ и $E_0(\bar{z})^* E_0(z) = I$ равно $\varphi(z)\varphi(\bar{z})^*$ и, тем самым, содержит только отрицательные степени z. Следовательно, $\varphi(z)\varphi(\bar{z})^* \equiv 0$. Подставляя $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^{-k-1}$, $\varphi_k \in \mathrm{gl}(N, \mathbb{C})$, и приравнивая коэффициент при z^{-2} нулю, получаем $\varphi_0\varphi_0^* = 0$, откуда $\varphi_0 = 0$. Тем же рассуждением по индукции выводим, что все матрицы φ_k равны 0, что и требовалось.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Сделаем замену неизвестной функции в уравнении (1.1) по формуле $u(x,t) = B_1\tilde{u}(x,t)A_1$, где $A_1 \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$, $B_1 \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Подставляя это выражение для $u(x,t)$ в (1.1) и сокращая на B_1 слева и на A_1 справа, получим для $\tilde{u}(x,t)$ опять уравнение вида (1.1), но с новыми матрицами $\tilde{A} = A_1 A A_1^*$ и $\tilde{B} = B_1^* B B_1$. Во вполне фокусирующем случае, когда все собственные значения эрмитовых матриц A и B можно считать положительными, легко подобрать эрмитовы матрицы A_1, B_1 так, что $\tilde{A} = 2I_k$ и $\tilde{B} = I_n$. Тогда, обозначая новую неизвестную функцию опять через $u(x,t)$, мы получаем, что матрица $q(x,t)$, заданная равенством (4.9), косоэрмитова для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ в окрестности точки $(x_0, -t_0)$. В частности, росток $q_0(x) := q(x, -t_1) \in \mathcal{N}(x_0)$ симметричен при любом выборе $t_1 \in \mathbb{R}$ вблизи t_0. Применяя к этому ростку лемму 11, видим, что (существующее по теореме 2) глобальное мероморфное продолжение $U(x,t)$ исходного решения $u(x,t)$ не имеет полюсов на $\mathbb{R}_x^1$ при любом выборе $t \in \mathbb{R}$ вблизи t_0. Тем самым получено продолжение исходного ростка $u(x,t)$ до $\mathbf{C}^\omega$-решения $U(x,t)$ уравнения (1.1) на некоторой полосе $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a_0 < t < b_0\}$. Остается взять в качестве $a(u)$ точную нижнюю грань всех возможных a_0, а в качестве $b(u)$ – точную верхнюю грань всех возможных b_0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Захаров В.Е., Шабат А.Б.* Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // Ж. эксперим. и теор. физ. 1971. Т. 61. С. 118–134.
2. *Манаков С.В.* К теории двумерной стационарной самофокусировки электромагнитных волн // Ж. эксперим. и теор. физ. 1973. Т. 65. С. 505–516.
3. *Makhankov V.G.* Soliton phenomenology. Dordrecht: Kluwer, 1990.
4. *Наянов В.И.* Многополевые солитоны. М.: Физматлит/Наука, 2006.
5. *Liu W.M., Kengne E.* Schrödinger equations in nonlinear systems. Singapore: Springer, 2019.
6. *Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
7. *Ablowitz M.J., Prinari B., Trubatch A.D.* Discrete and continuous nonlinear Schrödinger systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
8. *Yang J.* Nonlinear waves in integrable and non-integrable systems. Philadelphia: SIAM, 2010.
9. *Cazenave T.* Semilinear Schrödinger equations. Providence: AMS, 2003.
10. *Tao T.* Nonlinear dispersive equations. Providence: AMS, 2006.
11. *von Kowalevsky S.* Zur Theorie der partiellen Differentialgleihcungen // J. reine angew. Math. 1875. B. 80. S. 1–32.
12. *Le Roux J.* Sur les intégrales analytiques de l'équation $\partial^2 z/\partial x^2 = \partial z/\partial x$ // Bull. Sci. Math. 1895. V. 19. P. 127–128.
13. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Часть I. Функции одного переменного. М.: Наука, 1985.
14. *Hayashi N., Kato K.* Analyticity in time and smoothing effect of solutions to nonlinear Schrödinger equations // Commun. Math. Phys. 1997. V. 184. P. 273–300.

15. *Hoshino G.* Space-time analytic smoothing effect for a system of nonlinear Schrödinger equations with non pseudo-conformally invariant interactions // Commun. PDE. 2017. V. 42. P. 802–819.
16. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
17. *Уорнер Ф.* Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М.: Мир, 1987.
18. *Домрин А.В.* Мероморфное продолжение решений солитонных уравнений // Изв. АН Сер. матем. 2010. Т. 74. вып. 3. С. 23–44.
19. *Домрин А.В.* Голоморфные решения солитонных уравнений // Труды Моск. матем. общ. 2021. Т. 82. С. 227–312.
20. *Дринфельд В.Г., Соколов В.В.* Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега–де Фриза // Итоги науки техн. Соврем. пробл. мат. Т. 24. С. 81–180. М.: ВИНИТИ, 1984.
21. *Домрин А.В.* О голоморфных решениях уравнений типа Кортевега–де Фриза // Труды Моск. матем. общ. 2012. Т. 73. С. 241–257.
22. *Домрин А.В.* О вещественно-аналитических решениях нелинейного уравнения Шрёдингера // Труды Моск. матем. общ. 2014. Т. 75. С. 205–218.
23. *Sibuya Y.* Linear differential equations in the complex domain: problems of analytic continuation. Providence: AMS, 1990.
24. *Hsieh P.-F., Sibuya Y.* Basic theory of ordinary differential equations. Berlin: Springer, 1999.
25. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1976.