ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 6, с. 965–976

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

О НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ[1)]

© 2022 г. А. В. Калинин[1,2,*], А. А. Тюхтина[1,**]

[1] 603022 Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23, ННГУ, Россия

[2] 603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46, ИПФ РАН, Россия

*e-mail: avk@mm.unn.ru

**e-mail: kalinmm@yandex.ru

Поступила в редакцию 12.12.2021 г.
Переработанный вариант 20.01.2022 г.
Принята к публикации 11.02.2022 г.

Рассматривается начально-краевая задача для системы нелинейных интегродифференциальных уравнений теории переноса излучения. Доказывается теорема о существовании и единственности решения поставленной задачи. На основании свойств полугрупп изотонных операторов, действующих в условно-полных решетках, устанавливается стабилизация решения задачи при $t \to \infty$. Библ. 17.

Ключевые слова: система уравнений переноса излучения, нелинейные интегродифференциальные уравнения, полугруппы изотонных операторов.

DOI: 10.31857/S0044466922060102

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование нелинейных процессов переноса излучения приводит к необходимости изучения краевых и начально-краевых задач для нелинейных интегродифференциальных уравнений с частными производными. Вопросы физического, математического и численного моделирования процессов переноса излучения рассматриваются, в частности, в [1]–[7].

В работе [8] изучается нелинейная стационарная система, включающая кинетическое уравнение переноса излучения и уравнения статистического равновесия, возникающие при исследовании модели двухуровневого атома в предположении полного перераспределения излучения по частоте [1]–[3]. Получены строгие результаты о существовании и единственности решения краевой задачи, предложен и обоснован линеаризирующий итерационный алгоритм ее решения.

Соответствующая нестационарная нелинейная система интегродифференциальных уравнений переноса излучения изучалась в работах [9]–[13]. Обсуждались вопросы корректности постановки смешанной задачи для рассматриваемой системы, была установлена стабилизация при $t \to \infty$ решения задачи при произвольных начальных условиях.

В соответствии с физическим смыслом, решения уравнений теории переноса излучения должны быть неотрицательными функциями. В этом случае естественно возникают упорядоченные функциональные пространства, определяемые конусом неотрицательных функций, и при изучении задач возможно применение теории порядковых структур. Как показано в работе [13], вопросы порядковой и метрической стабилизации решений нестационарных задач могут исследоваться на основе общих подходов, связанных со свойствами полугрупп изотонных операторов, действующих в полных и условно полных решетках [14]–[17].

В настоящей работе развиваются результаты работ [9]–[13]. Рассматривается система интегродифференциальных уравнений, содержащая нестационарное уравнение переноса излучения и систему стационарности для модели двухуровнего атома. Изучается корректность постановки

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке научно-образовательным математическим центром “Математика технологий будущего” (Соглашение № 075-02-2022-883).

начально-краевой задачи для этой системы, исследуется поведение решения задачи при $t \to \infty$ с использованием методов теории упорядоченных пространств.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим следующую систему нелинейных интегродифференциальных уравнений теории переноса излучения, соответствующую модели двухуровнего атома [3], [4]:

$$\begin{gathered}\frac{1}{c}\frac{\partial\psi(x,\nu,\omega,t)}{\partial t}+(\omega,\nabla)\psi(x,\nu,\omega,t)+\\+h\nu_{12}\frac{\kappa(\nu)}{4\pi}\big(B_{12}C_1(x,t)-B_{21}C_2(x,t)\big)\psi(x,\nu,\omega,t)=h\nu_{12}\frac{\kappa(\nu)}{4\pi}A_{21}C_2(x,t),\end{gathered}\tag{2.1}$$

$$\begin{gathered}\left(C_{12}n_e(x)+B_{12}\int\limits_I\int\limits_\Omega\frac{\kappa(\nu)}{4\pi}\psi(x,\nu,\omega,t)d\omega d\nu\right)C_1(x,t)=\\=C_2(x,t)\left(A_{21}+C_{21}n_e(x)+B_{21}\int\limits_I\int\limits_\Omega\frac{\kappa(\nu)}{4\pi}\psi(x,\nu,\omega,t)d\omega d\nu\right),\end{gathered}\tag{2.2}$$

$$C_1(x,t)+C_2(x,t)=f(x).\tag{2.3}$$

Здесь $x=\{x_1,x_2,x_3\}\in G\subset\mathbb{R}^3$, $\omega\in\Omega=\{\omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}\in\mathbb{R}^3:\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2=1\}$; $\nu\in I=[0,\nu_0]$; $t\in[0,T]$, $T>0$.

Функция ψ – удельная интенсивность излучения, C_1 и C_2 – пространственные плотности атомов среды, находящихся в основном и в возбужденном состоянии соответственно. Подробная информация о физическом смысле функций и коэффициентов приводится в работах [3], [4].

Пусть G – выпуклое ограниченное множество с гладкой границей ∂G, имеющей всюду внешнюю нормаль $n(x)$ $(x\in\partial G)$, и диаметром $d>0$. Система (2.1)–(2.3) дополняется граничным условием

$$\psi(x,\nu,\omega,t)=0,\quad x\in\partial G,\ (\omega,n(x))<0,\quad \omega\in\Omega,\quad \nu\in I,\quad t\in[0,T],\tag{2.4}$$

соответствующим отсутствию внешнего потока частиц, падающего на границу области, и начальным условием

$$\psi(x,\nu,\omega,0)=\psi^0(x,\nu,\omega).\tag{2.5}$$

Предполагается, что h, ν_{12}, B_{12}, B_{21}, C_{12}, C_{21}, A_{21}, ν_0, c – заданные положительные числа, удовлетворяющие условию

$$B_{12}C_{21}-B_{21}C_{12}>0;\tag{2.6}$$

$n_e(x)$, $f(x)$, $x\in G$, $\kappa(\nu)$, $\nu\in I$ – заданные функции, измеримые и неотрицательные почти всюду в своих областях определения, удовлетворяющие условиям

$$\operatorname{esssup} n_e=n_e^*<\infty,\quad \operatorname{esssup} f=f^*<\infty,\quad \operatorname{esssup}\kappa(\nu)=\kappa^*<\infty,\quad \int\limits_I\kappa(\nu)d\nu=1.\tag{2.7}$$

Определим характеристику $\{l_\omega\}$ дифференциального оператора $\partial/c\partial t+(\omega,\nabla)$ системой уравнений

$$cdt=\frac{dx_1}{\omega_1}=\frac{dx_2}{\omega_2}=\frac{dx_3}{\omega_3}=\frac{d\omega_1}{0}=\frac{d\omega_2}{0}=\frac{d\omega_3}{0}=\frac{d\nu}{0}$$

и обозначим через $1/c\,(d/d\tau)_\omega$ оператор дифференцирования вдоль характеристики $\{l_\omega\}$:

$$\frac{1}{c}\left(\frac{d}{d\tau}\right)_\omega\psi(\xi,\nu,\omega,t)=\frac{1}{c}\frac{d\psi(x+c\omega(\tau-t),\nu,\omega,\tau)}{d\tau}\bigg|_{\tau=t}.$$

Пусть $\mathcal{D}=G\times I\times\Omega$. Для произвольного измеримого подмножества Π евклидова пространства через $K_\infty(\Pi)$ обозначим конус неотрицательных функций в $L_\infty(\Pi)$; $D_\infty(\mathcal{D}\times[0,T])$ – класс функций $\psi \in L_\infty(\mathcal{D}\times[0,T])$, абсолютно непрерывных вдоль почти каждой характеристики $\{l_\omega\}$ в $D_\infty(\mathcal{D}\times[0,T])$ и таких, что

$$\frac{1}{c}\left(\frac{d}{d\tau}\right)_\omega \psi \in L_\infty(\mathcal{D}\times[0,T]),$$

$$\mathfrak{M}_T = D_\infty(\mathcal{D}\times[0,T])\times L_\infty(G\times[0,T])\times L_\infty(G\times[0,T])),$$

$$\mathcal{K}_T = K_\infty(\mathcal{D}\times[0,T])\times K_\infty(G\times[0,T])\times K_\infty(G\times[0,T]).$$

Аналогичные классы впервые были введены в работе В.С. Владимирова [6] для стационарных задач теории переноса и использовались при изучении нестационарных задач в [9], [13].

Предполагается, что начальная функция $\psi_0(x,\nu,\omega)$ принадлежит классу $K_\infty(\mathcal{D})$.

Решением задачи (2.1)–(2.5) называется функция $\Phi = \{\psi, C_1, C_2\} \in \mathfrak{M}_T$, удовлетворяющая системе (2.1)–(2.3) и начальным и краевым условиям (2.4), (2.5) почти всюду, дифференциальный оператор $d/cdt + (\omega,\nabla)$ в (2.1) понимается как оператор $1/c\left(d/d\tau\right)_\omega$ дифференцирования вдоль характеристики $\{l_\omega\}$.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты системы удовлетворяют условиям* (2.6), (2.7). *Тогда при любой начальной функции* $\psi_0 \in K_\infty(\mathcal{D})$ *и любом* $T > 0$ *решение* $\Phi \in \mathfrak{M}_T$ *задачи* (2.1)–(2.5) *существует, единственно и непрерывно зависит от начальной функции* ψ_0. *Кроме того, имеет место включение* $\Phi \in \mathfrak{M}_T \cap \mathcal{K}_T$.

Введем следующие обозначения:

$$\mathcal{R}_{12}(\psi)(x,t) = C_{12}n_e(x) + B_{12}J(\psi)(x,t), \quad \mathcal{R}_{21}(\psi)(x,t) = A_{21} + C_{21}n_e(x) + B_{21}J(\psi)(x,t), \tag{2.8}$$

$$J(\psi)(x,t) = \int_I\int_\Omega \frac{\kappa(\nu)}{4\pi}\psi(x,\nu,\omega,t)d\omega d\nu, \quad \mathcal{R}(\psi) = \mathcal{R}_{12}(\psi)(x,t) + \mathcal{R}_{21}(\psi)(x,t), \tag{2.9}$$

$$\mathcal{F}(C)(x,\nu,t) = h\nu_{12}\frac{\kappa(\nu)}{4\pi}(B_{12}C_1(x,t) - B_{21}C_2(x,t)), \tag{2.10}$$

$$\mathcal{P}(C)(x,\nu,t) = h\nu_{12}\frac{\kappa(\nu)}{4\pi}A_{21}C_2(x,t). \tag{2.11}$$

В работах [9], [13] подобные обозначения использовались для исследования других классов нестационарных задач теории переноса излучения. Систему (2.1)–(2.3) можно переписать в виде

$$\frac{1}{c}\left(\frac{d}{d\tau}\right)_\omega \psi(x,\nu,\omega,t) + \mathcal{F}(C)(x,\nu,t)\psi(x,\nu,\omega,t) = \mathcal{P}(C)(x,\nu,t), \tag{2.12}$$

$$C_1(x,t) = f(x)\frac{\mathcal{R}_{21}(\psi)(x,t)}{\mathcal{R}(\psi)(x,t)}, \quad C_2(x,t) = f(x)\frac{\mathcal{R}_{12}(\psi)(x,t)}{\mathcal{R}(\psi)(x,t)}. \tag{2.13}$$

Функция $\Phi = \{\psi, C_1, C_2\} \in \mathfrak{M}_T$ является решением задачи (2.1)–(2.5) тогда и только тогда, когда $\psi \in D_\infty(\mathcal{D}\times[0,T])$ – решение задачи (2.12), (2.4), (2.5), где C_1, C_2 в (2.12) определяются по формулам (2.13).

Дифференциальные свойства функционального класса $D_\infty(\mathcal{D}\times[0,T])$ позволяют определить для любого $T > 0$ однопараметрические семейства операторов

$$\gamma_t : D_\infty(\mathcal{D}\times[0,T]) \to L_\infty(\mathcal{D}), \quad t \in [0,T],$$

имеющие смысл “следа” функции $\psi \in D_\infty(\mathcal{D}\times[0,T])$ на множестве $\mathcal{D}\times\{t\}$.

Если ψ – решение задачи (2.12), (2.4), (2.5) из класса $D_\infty(\mathcal{D}\times[0,T]) \cap K_\infty(\mathcal{D}\times[0,T])$, то значение следа $\gamma_t\psi$ не зависит от $T \geq t$ и лежит в $K_\infty(\mathcal{D})$ при всех $t \in [0,T]$.

Определим семейство $\{U_t\}$, $0 \leq t \leq \infty$, операторов $U_t : K_\infty(\mathcal{D}) \to K_\infty(\mathcal{D})$ соотношением $U_t\psi_0 = \gamma_t\psi$ для всех $\psi_0 \in K_\infty(\mathcal{D})$, где $\Phi = \{\psi, C_1, C_2\} \in \mathfrak{M}_T \cap \mathcal{K}_T$ – решение задачи (2.1), (2.2)–(2.5) с начальным условием $\psi_0 \in K_\infty(\mathcal{D})$. Введенное семейство операторов в силу независимости коэффициентов системы (2.1), (2.2), (2.3) от времени обладает полугрупповыми свойствами и называется *разрешающей полугруппой задачи* (2.1)–(2.5).

Множество $K_\infty(\mathcal{D})$ является условно полной решеткой [14] с отношением частичного порядка $\succ$, где $\psi_1 \succ \psi_2$ тогда и только тогда, когда $\psi_1(x,\nu,\omega) \geq \psi_2(x,\nu,\omega)$ почти всюду в $\mathcal{D}$. Формула

$$E[\psi] = \frac{1}{c}\int_I\int_\Omega\int_G \psi(x,\nu,\omega)dxd\omega d\nu, \quad \psi \in K_\infty(\mathcal{D}), \tag{2.14}$$

определяет функционал $E : K_\infty(\mathcal{D}) \to \mathbb{R}^1$, удовлетворяющий условиям

$$E[\psi_1] + E[\psi_2] = E[\psi_1 \vee \psi_2] + E[\psi_1 \wedge \psi_2];$$

$E[\psi_1] > E[\psi_2]$ при $\Phi_1 \succ \Phi_2$, $\Phi_1 \neq \Phi_2$, и является, поэтому, положительной оценкой на $K_\infty(\mathcal{D})$ (см. [14]), превращающей $K_\infty(D)$ в метрическое пространство с функцией расстояния

$$\rho(\psi_1,\psi_2) = E[\psi_1 \vee \psi_2] - E[\psi_1 \wedge \psi_2] = \frac{1}{c}\|\psi_1 - \psi_2\|_{L_1(\mathcal{D})}.$$

Справедлива

Теорема 2. *Пусть коэффициенты системы* (2.1), (2.2), (2.3) *удовлетворяют условиям* (2.6), (2.7). *Тогда существует единственная стационарная траектория* $\psi_\infty(t) = \psi_\infty \in K_\infty(\mathcal{D})$, $0 \leq t < \infty$, *относительно разрешающей полугруппы операторов* $\{U_t\}$ *задачи* (2.1), (2.2)–(2.5). *Для любых* $\psi \in K_\infty(\mathcal{D})$ *справедлива оценка*

$$\rho(U_t\psi, \psi_\infty) \leq \gamma\exp\{-\mu t\}$$

при $t \geq T_0$, *где положительные постоянные* γ, μ, T_0 *не зависят от выбора* $\psi \in K_\infty(\mathcal{D})$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Положим $\varphi_0(x,\nu,\omega,t) = e^{-\alpha t}\psi(x,\nu,\omega,t)$, где $\alpha > 0$, $\varphi = \{\varphi_0, C_1, C_2\}$.

Система (2.12), (2.13) примет вид

$$\frac{1}{c}\left(\frac{d}{d\tau}\right)_\omega \varphi_0(x,\nu,\omega,t) + (\alpha + \mathcal{F}(C)(x,\nu,t))\varphi_0(x,\nu,\omega,t) = e^{-\alpha t}\mathcal{P}(C)(x,\nu,t), \tag{3.1}$$

$$C_1(x,t) = f(x)\frac{\mathcal{R}_{21}(e^{\alpha t}\varphi_0)(x,t)}{\mathcal{R}(e^{\alpha t}\varphi_0)(x,t)}, \quad C_2(x,t) = f(x)\frac{\mathcal{R}_{12}(e^{\alpha t}\varphi_0)(x,t)}{\mathcal{R}(e^{\alpha t}\varphi_0)(x,t)}. \tag{3.2}$$

Система (3.1), (3.2) рассматривается при начальных и граничных условиях

$$\varphi_0(x,\nu,\omega,0) = \psi^0(x,\nu,\omega), \quad \varphi_0(x,\nu,\omega,t) = 0, \quad x \in \partial G, \quad (\omega, n(x)) < 0. \tag{3.3}$$

Пусть $\{l_\omega\} = \{(x + c\omega(\tau - t), \nu, \omega, \tau), \tau \in \mathbb{R}\}$ – характеристика, проходящая в момент времени $\tau = t$ через точку (x,ν,ω). Обозначим через $t_\omega^-(x,t)$ момент пересечения характеристикой границы области $\mathcal{D}\times[0,T]$ такой, что либо $t_\omega^-(x,t) = 0$, либо $t_\omega^-(x,t)$ соответствует пересечению той части $\partial G \times I \times \Omega \times [0,T]$, где $(\omega, n(x)) < 0$. Тогда

$$g_0(x,\nu,\omega,t) = \varphi_0(x + c\omega(t_\omega^-(x,t) - t), \nu, \omega, t_\omega^-(x,t)) \equiv \begin{cases} 0, & t_\omega^-(x,t) > 0, \\ \psi_0(x - c\omega t, \nu, \omega), & t_\omega^-(x,t) = 0. \end{cases}$$

Разрешая уравнение (3.1) как линейное относительно $\varphi_0(x,\nu,\omega,t)$, получаем

$$\begin{gathered}\varphi_0(x,\nu,\omega,t) = g_0(x,\nu,\omega,t)\exp\left\{-\int_{t_\omega^-(x,t)}^{t}\left(\alpha + c\mathcal{F}(C)(x + c\omega(s-t),\nu,s)\right)ds\right\} + \\ + \int_{t_\omega^-(x,t)}^{t} e^{-\alpha\tau}c\mathcal{P}(C)(x + c\omega(\tau - t),\nu,\tau)\exp\left\{\int_t^\tau\left(\alpha + c\mathcal{F}(C)(x + c\omega(s-t),\nu,s)\right)ds\right\}d\tau.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Система уравнений (3.2), (3.4) эквивалентна при заданных условиях на коэффициенты и на рассматриваемом классе функций $\varphi \in \mathfrak{M}_T$ системе с начальными и граничными условиями (3.1)–(3.3).

Пусть $\mathcal{L}_T = L_\infty(\mathcal{D}\times[0,T])\times L_\infty(G\times[0,T])\times L_\infty(G\times[0,T])$. Введем операторы

$$\begin{gathered} A_0 : \mathcal{L}_T \to D_\infty(\mathcal{D}\times[0,T]), \quad A_i : \mathcal{L}_T \to \mathcal{L}_\infty(G\times[0,T]), \quad i = 1,\ 2, \\ A : \mathcal{L}_T \to \mathfrak{M}_T \subset \mathcal{L}_T, \quad \mathcal{L}\varphi = \{A_0\varphi, A_1\varphi, A_2\varphi\}, \end{gathered} \tag{3.5}$$

операторы $A_0\varphi$, $A_i\varphi$ ($i = 1$, 2) совпадают с правыми частями уравнений (3.4), (3.2) соответственно.

Положим

$$M = \max\left\{\|\psi_0\|_{L_\infty(\mathcal{D})}, \|f\|_{L_\infty(G)}\right\}, \quad \alpha = 2c(b + Ma),$$

где $b = h\nu_{12}\kappa^* A_{21}(4\pi)^{-1}$, $a = h\nu_{12}\kappa^*(B_{12} + B_{21})(4\pi)^{-1}$.

Лемма 1. *Пусть A_B – сужение оператора A на замкнутое множество $B(\mathcal{D}\times[0,T])$,*

$$B(\mathcal{D}\times[0,T]) = \left\{\varphi = \{\xi, \eta_1, \eta_2\} \in \mathcal{K}_T : \|\xi\|_{L_\infty(\mathcal{D}\times[0,T])} \le M,\ \eta_1 + \eta_2 = f\right\},$$

$R(A_B)$ – множество значений оператора A_B. Тогда $R(A_B) \subset B(\mathcal{D}\times[0,T])$.

Доказательство. Пусть $\varphi = \{\varphi_0, C_1, C_2\} \in B(\mathcal{D}\times[0,T])$.

Так как

$$\mathcal{F}(C)(x,\nu,t) = h\nu_{12}\frac{\kappa(\nu)}{4\pi}\frac{A_{21}B_{12} + (B_{12}C_{21} - B_{21}C_{12})n_e(x)}{\mathcal{R}(e^{\alpha t}\varphi_0)(x,t)} \ge 0,$$

из (3.2), (3.4) вытекает неотрицательность вектора $A\varphi$. Из (3.2) следует, что $A_1\varphi + A_2\varphi = f$. Далее, ввиду (3.4) и явного вида $\mathcal{F}(C)$, $\mathcal{P}(C)$ имеем

$$A_0\varphi_0(x,\nu,\omega,t) \le \max\left\{M, \left\|\frac{ce^{-\alpha t}\mathcal{P}(C)}{\alpha + c\mathcal{F}(C)}\right\|_{L_\infty(G\times I\times[0,T])}\right\} \le \max\left\{M, \frac{cb}{\alpha}M\right\},$$

т.е. $A_0\varphi_0(x,\nu,\omega,t) \le M$ почти всюду.

Лемма 2. *Существует единственное решение задачи*

$$\varphi(x,\nu,\omega,t) = A_B\varphi(x,\nu,\omega,t), \quad \varphi \in B(\mathcal{D}\times[0,T]). \tag{3.6}$$

Доказательство. Покажем, что при достаточно больших k отображение $A_B^k = \underbrace{A_B \cdot \ldots \cdot A_B}_{B}$ будет сжимающим на $B(\mathcal{D}\times[0,T])$. Пусть

$$\varphi^{(i)} = \left\{\varphi_0^{(i)}, C_1^{(i)}, C_2^{(i)}\right\} \in B(\mathcal{D}\times[0,T]), \quad i = 1,\ 2,$$

и пусть $J_i = J\left(e^{\alpha t}\varphi_0^{(i)}\right)$, $\mathcal{R}_i = \mathcal{R}(\varphi_0^{(i)})$, $i = 1$, 2. Используя (3.4) и явный вид $\mathcal{R}_{12}$, $\mathcal{R}_{21}$, получаем

$$A_1\varphi^{(1)} - A_1\varphi^{(2)} = f\frac{(A_{21}B_{12} + (B_{12}C_{21} - B_{21}C_{12})n_e)(J_2 - J_1)}{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2},$$

$$\left|A_1\varphi^{(1)} - A_1\varphi^{(2)}\right| \le Mpe^{\alpha t}\left|\varphi_0^{(1)} - \varphi_0^{(2)}\right|,$$

где $p = (A_{21}B_{12} + (B_{12}C_{21} - B_{21}C_{12})n_e^*)A_{21}^{-2}$,

$$A_2\varphi^{(1)} - A_2\varphi^{(2)} = A_1\varphi^{(2)} - A_1\varphi^{(1)}, \quad \left|A_2\varphi^{(1)} - A_2\varphi^{(2)}\right| \le Mpe^{\alpha t}\left|\varphi_0^{(1)} - \varphi_0^{(2)}\right|.$$

Пусть, далее, $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}(C^{(i)})$, $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}(C^{(i)})$. Из (3.4) вытекает справедливость равенства [15]

$$A_0\varphi^{(1)}(x,\nu,\omega,t) - A_0\varphi^{(2)}(x,\nu,\omega,t) = \int\limits_{t_\omega^-(x,t)}^{t} (ce^{-\alpha\tau}(\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2)(x + c\omega(\tau - t),\nu,\omega,\tau) +$$

$$+ cA_0\varphi^{(2)}(x + c\omega(\tau - t),\nu,\omega,\tau)(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2)(x + c\omega(\tau - t),\nu,\omega,\tau))\times$$

$$\times \exp\left\{\int\limits_t^\tau (\alpha + c\mathcal{F}_1(x + c\omega(s - t),\nu,s))ds\right\}d\tau.$$

Следовательно,

$$\left|A_0\varphi^{(1)}(x,\nu,\omega,t) - A_0\varphi^{(2)}(x,\nu,\omega,t\right| \le$$

$$\le \left\|\frac{ce^{-\alpha t}(\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2) + cA_0\varphi^{(2)}(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2)}{\alpha + c\mathcal{F}_1}\right\|_{L_\infty(G\times I\times[0,T])} \le c\frac{b + Ma}{\alpha}\left\|C_2^{(1)} - C_2^{(2)}\right\|_{L_\infty(G\times[0,T])}.$$

Таким образом,

$$\left\|A_0\varphi^{(1)} - A_0\varphi^{(2)}\right\|_{L_\infty(\mathcal{D}\times[0,T])} \le \frac{1}{2}\left\|C_2^{(1)} - C_2^{(2)}\right\|_{L_\infty(G\times[0,T])} \le \frac{1}{2}\left\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\right\|_{\mathcal{L}_T},$$

$$\left\|A_0^k\varphi^{(1)} - A_0^k\varphi^{(2)}\right\|_{L_\infty(\mathcal{D}\times[0,T])} \le \frac{1}{2^k}\parallel \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)} \parallel_{\mathcal{L}_T},$$

$$\left\|A_i^k\varphi^{(1)} - A_i^k\varphi^{(2)}\right\|_{L_\infty(G\times[0,T])} \le Mpe^{\alpha T}\left\|A_0^{k-1}\varphi^{(1)} - A_0^{k-1}\varphi^{(2)}\right\|_{L_\infty(\mathcal{D}\times[0,T])} \le \frac{Mpe^{\alpha T}}{2^{k-1}}\left\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\right\|_{\mathcal{L}_T},$$

$$\left\|A^k\varphi^{(1)} - A^k\varphi^{(2)}\right\|_{L_\infty(\mathcal{D}\times[0,T])} \le \frac{1}{2^k}(1 + 4Mpe^{\alpha T})\left\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\right\|_{\mathcal{L}_T}.$$

Согласно принципу сжимающих отображений, уравнение (3.6) имеет единственное решение $\varphi \in B(\mathcal{D}\times[0,T])$.

Поскольку $A : \mathcal{L}_T \to \mathfrak{M}_T$, решение задачи (3.6) лежит в $\mathfrak{M}_T$ и является решением задачи (3.1)–(3.3). Следовательно, решение задачи (2.1)–(2.5) существует.

Лемма 3. *Решение задачи* (2.1)–(2.5) *единственное и непрерывно зависит от начальных условий.*

Доказательство. Пусть $\Phi^{(i)} = \left\{\psi^{(i)}, C_1^{(i)}, C_2^{(i)}\right\} \in \mathfrak{M}_T$, $i = 1, 2$ – решения задачи (2.1)–(2.5) с начальными условиями

$$\psi^{(i)}(x,\nu,\omega,0) = \psi_0^{(i)}(x,\nu,\omega), \quad i = 1, 2,$$

причем $\Phi^{(1)} \in \mathcal{K}_T$. Положим $\psi = \psi^{(1)} - \psi^{(2)}$, $C = C_2^{(1)} - C_2^{(2)} = C_1^{(2)} - C_1^{(1)}$, $\psi_0 = \psi_0^{(1)} - \psi_0^{(2)}$.

Тогда справедливы равенства

$$\frac{1}{c}\left(\frac{d}{d\tau}\right)_\omega \psi(x,\nu,\omega,t) + \mathcal{F}(C^1)(x,\nu,t)\psi(x,\nu,\omega,t) = K(x,\nu,\omega,t)C(x,t), \tag{3.7}$$

$$C(x,t) = H(x,t)\int\limits_I\int\limits_\Omega \frac{\kappa(\nu)}{4\pi}\psi(x,\nu,\omega,t)d\omega d\nu, \tag{3.8}$$

где

$$K(x,\nu,\omega,t) = h\nu_{12}\frac{\kappa(\nu)}{4\pi}(A_{21} + (B_{12} + B_{21})\psi^{(2)}(x,\nu,\omega,t)),$$

$$H(x,t) = \frac{B_{12}f(x) - (B_{12} + B_{21})C_2^{(2)}(x,t)}{\mathcal{R}(C^{(1)})(x,t)}.$$

Проинтегрировав равенство (3.7), получим

$$\psi(x,\nu,\omega,t)-\psi_0(x,\nu,\omega)+c\int\limits_{t_\omega^-(x,t)}^{t}\mathcal{F}(C^{(1)})(x+c\omega(\tau-t),\nu,\tau)\psi(x+c\omega(\tau-t),\nu,\omega,\tau)d\tau=$$

$$=c\int\limits_{t_\omega^-(x,t)}^{t}K(x+c\omega(\tau-t),\tau)C(x+c\omega(\tau-t),\tau)d\tau.$$

Пусть $\Delta(t)=\|\psi(x,\nu,\omega,t)\|_{L_\infty(\mathcal{D})}$. Тогда

$$\Delta(t)\le\Delta(0)+\beta\int\limits_{t_\omega^-(x,t)}^{t}\Delta(\tau)d\tau,$$

где

$$\beta=c\left(\left\|\mathcal{F}(C^1)\right\|_{L_\infty(\mathcal{D}\times[0,T])}+\|H\|_{L_\infty(G\times[0,T])}\|K\|_{L_\infty(G\times[0,T])}\right).$$

По лемме Гроноулла заключаем, что

$$\left\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\right\|_{L_\infty(\mathcal{D}\times[0,T])}\le e^{\beta T}\left\|\psi_0^{(1)}-\psi_0^{(2)}\right\|_{L_\infty(\mathcal{D})},\tag{3.9}$$

$$\left\|C_2^{(1)}-C_2^{(2)}\right\|_{L_\infty(G\times[0,T])}=\left\|C_2^{(1)}-C_2^{(2)}\right\|_{L_\infty(G\times[0,T])}\le e^{\beta T}\left\|\psi_0^{(1)}-\psi_0^{(2)}\right\|_{L_\infty(\mathcal{D})}\|H\|_{L_\infty(G\times[0,T])}.\tag{3.10}$$

Из (3.9), (3.10) вытекает, в частности, единственность решения задачи (2.1)–(2.5). Кроме того, из (3.7) получаем

$$\left\|\left(\frac{d}{d\tau}\right)_\omega(\psi^{(1)}-\psi^{(2)})\right\|_{L_\infty(\mathcal{D})}\le\beta e^{\beta T}\left\|\psi_0^{(1)}-\psi_0^{(2)}\right\|_{L_\infty(\mathcal{D})}.$$

Таким образом, решение задачи (2.1)–(2.5) непрерывно зависит от начальных данных.

4. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ПОЛУГРУПП ИЗОТОННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Доказательство теоремы о стабилизации решений рассматриваемой смешанной задачи основано на свойствах полугрупп изотонных операторов, действующих в условно полных решетках. Приведем без доказательств необходимые в дальнейшем результаты. Подробное изложение рассматриваемых вопросов содержится в [12], [13].

Пусть $\mathfrak{M}$ — непустое частично упорядоченное множество с отношением порядка $\prec$, являющееся полной решеткой [14]; $U=\{U_t\}$, $t\ge 0$ — однопараметрическое семейство изотонных операторов, обладающее полугрупповыми свойствами:

$$U_0\equiv E - \text{тождественный оператор},$$

$$U_{t+s}=U_tU_s,$$

$$U_tu\prec U_tv\quad\text{при}\quad u\prec v\quad\text{для всех}\quad t,s\ge 0,\quad u,v\in\mathfrak{M};$$

здесь U-*траекторией* называется функция $u:[0,\infty)\to\mathfrak{M}$ такая, что $u(t+s)=U_tu(s)$, $t,s\ge 0$; U-траектория называется *стационарной*, если

$$u(t)=u(0),\quad t\ge 0.\tag{4.1}$$

Элемент $u(0)\in\mathfrak{M}$, удовлетворяющий (4.1) при всех $t\ge 0$, называется *стационарной точкой полугруппы* U.

Теорема 3. *Пусть* $U=\{U_t\}$, $t\ge 0$, *— полугруппа изотонных операторов* $U_t:\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$. *Тогда множество стационарных траекторий* $u:[0,\infty)\to\mathfrak{M}$ *и множество* $P=\{\xi\in\mathfrak{M}:U_t\xi=\xi,\ t\ge 0\}$ *соответствующих стационарных точек полугруппы* U *непусто и* $\inf P\in P$, $\sup P\in P$.

Теорема является прямым следствием следующего утверждения [17].

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{M}$ — полная решетка, $\mathfrak{U}$ — семейство изотонных коммутирующих операторов $A : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$. Тогда множество P общих неподвижных точек семейства операторов $\mathfrak{U}$ непусто и является полной подрешеткой решетки $\mathfrak{M}$.*

Изотонный оператор $A : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ будем называть *оператором класса* $C(\mathfrak{M}, \prec)$, если для любых последовательностей

$$\xi_1 \prec \xi_2 \prec \ldots \prec \xi_n \prec \ldots \; \eta_1 \succ \eta_2 \succ \ldots \succ \eta_n \succ \ldots \tag{4.2}$$

элементов из $\mathfrak{M}$ выполняются равенства

$$\sup_{n\in N}\{A\xi_n\} = A\sup_{n\in N}\{\xi_n\}, \quad \inf_{n\in N}\{A\eta_n\} = A\inf_{n\in N}\{\eta_n\}.$$

Полугруппа $U = \{U_t\}$, $t \geq 0$, изотонных операторов $U_t : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ называется *полугруппой класса* $\zeta(\mathfrak{M}, \prec)$, если $U_t \in C(\mathfrak{M}, \prec)$ при всех $t \geq 0$.

Теорема 5. *Пусть $U = \{U_t\}$, $t \geq 0$, — полугруппа класса $\zeta(\mathfrak{M}, \prec)$; $P \in \mathfrak{M}$ — множество стационарных точек. Тогда порядковый интервал*

$$\langle \inf P, \sup P \rangle = \{\xi \in \mathfrak{M} : \inf P \prec \xi \prec \sup P\}$$

является притягивающим множеством для всех траекторий, т.е.

$$\inf P \prec \lim_{t\to\infty} \inf\{U_t\xi\} \prec \lim_{t\to\infty} \sup\{U_t\xi\} \prec \sup P$$

при всех $\xi \in \mathfrak{M}$, в частности, если множество P стационарных точек полугруппы U состоит из одного элемента $u_\infty = \inf P = \sup P$, то при $t \to \infty$ имеет место порядковая стабилизация всех траекторий:

$$\lim_{t\to\infty}\{U_t\xi\} = \lim_{t\to\infty} \sup\{U_t\xi\} = \lim_{t\to\infty} \inf\{U_t\xi\} = u_\infty \quad \text{при всех} \quad \xi \in \mathfrak{M}.$$

Положительной оценкой на полной решетке $\mathfrak{M}$ называется функционал $l : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^1$, удовлетворяющий при всех $\xi, \eta \in \mathfrak{M}$ условиям

$$l(\xi) + l(\eta) = l(\sup\{\xi,\eta\}) + l(\inf\{\xi,\eta\}), \quad l(\xi) < l(\eta) \quad \text{при} \quad \xi \prec \eta, \quad \xi \neq \eta.$$

Положительный функционал $l : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^1$ превращает решетку $\mathfrak{M}$ в метрическую решетку с функцией расстояния $d(\xi,\eta) = l(\sup\{\xi,\eta\}) - l(\inf\{\xi,\eta\})$ [17].

Если положительная оценка $l : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^1$ удовлетворяет следующему условию непрерывности: для любых последовательностей $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$, $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$ элементов из $\mathfrak{M}$, удовлетворяющих (4.2), выполняются равенства

$$\lim_{t\to\infty} l(\xi_n) = l\left(\sup_{n\in N}\{\xi_n\}\right), \quad \lim_{t\to\infty} l(\eta_n) = l\left(\inf_{n\in N}\{\eta_n\}\right), \tag{4.3}$$

то метрическая решетка $\mathfrak{M}$ является метрически полной.

Оператор $A : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ является оператором класса $C(\mathfrak{M}, \prec)$ тогда и только тогда, когда A метрически непрерывен.

Теорема 6. *Пусть $U = \{U_t\}$, $t \geq 0$, — полугруппа изотонных операторов, $P \subset \mathfrak{M}$ — множество стационарных точек полугруппы, $l : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^1$ — положительная оценка, удовлетворяющая условию непрерывности* (4.3)*, и для каждого $t \geq 0$ оператор $U_t : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ метрически непрерывен. Тогда порядковый интервал, т.е. $\langle \inf P, \sup P \rangle$ является метрически притягивающим множеством для всех траекторий, т.е.*

$$\lim_{t\to\infty} d\left(U_t\xi, \langle \inf P, \sup P \rangle\right) = 0$$

при всех $\xi \in \mathfrak{M}$, в частности, если множество стационарных точек полугруппы U состоит из одного элемента $u_\infty = \inf P = \sup P$, то при $t \to \infty$ имеет место метрическая стабилизация всех траекторий: $\lim_{t\to\infty} d(U_t\xi, u_\infty) = 0$ при всех $\xi \in \mathfrak{M}$.

Теорема 7. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *— условно полная решетка,* $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}$ *— полная подрешетка в* $\mathfrak{M}$*;* $l : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ *— положительная оценка на* $\mathfrak{M}$*,* $U = \{U_t\}$*,* $t \geq 0$*, — полугруппа операторов, удовлетворяющая следующим условиям*:

1) *существует* $T_1 > 0$ *такое, что* $U_t\xi \in \mathfrak{M}_0$ *при всех* $\xi \in \mathfrak{M}$, $t \geq T_1$;

2) *при любых* $\xi, \eta \in \mathfrak{M}_0$ *таких, что* $\xi \prec \eta$ *при всех* $t \geq 0$*, выполнено* $U_t\xi \prec U_t\eta$;

3) *существуют постоянные* $T_2 > 0$*,* $\gamma \in (0,1)$ *такие, что при любых* $\xi, \eta \in \mathfrak{M}_0$, $\xi \prec \eta$

$$l(U_{T_2}\eta) - l(U_{T_2}\xi) \leq \gamma(l(\eta) - l(\xi)).$$

Тогда существует единственная стационарная траектория $u_\infty(t) = u_\infty \in \mathfrak{M}_0$, $t \geq 0$*, а также существуют постоянные* $\mu > 0$*,* $T_0 > 0$*,* $M > 0$ *такие, что*

$$d(U_t\xi, u_\infty) \leq M \exp\{-\mu t\} \quad \text{при} \quad t \geq T_0.$$

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Пусть $\{U_t\}$, $U_t : K_\infty(\mathcal{D}) \to K_\infty(\mathcal{D})$, $U_t\psi_0 = \gamma_t\psi$ — разрешающая полугруппа операторов задачи (2.1)–(2.5). Докажем, что для нее выполнены условия теоремы 7.

Будет использоваться следующее утверждение [13].

Лемма 4. *Пусть* E *— банахова решетка с нормой* $\|\cdot\|$*, монотонной относительно упорядоченности* $\prec$*, и конусом* E^+ *положительных элементов,* $\||\cdot|\| = \|\cdot\|$*. Пусть* $A : E \to E$ *— оператор и* $\{B_\lambda\} \in \mathfrak{L}^+(E)$*,* $\lambda \in (0, \infty)$*, — однопараметрическое семейство операторов со спектральными радиусами* $\rho(B_\lambda)$*, удовлетворяющими условию* $\sup \rho(B_\lambda) = \beta < 1$*. Тогда если* $|A(y_1) - A(y_2)| \prec B_\lambda(|y_1 - y_2|)$ *для всех* $y_i \in E$ *таких, что* $\|y_i\| \leq \lambda$*,* $i = 1, 2$*, то уравнение*

$$y = A(y) \tag{5.1}$$

имеет не более одного решения $y \in E$*. Если, кроме того,* $A : E \to E$ *оставляет инвариантным некоторое замкнутое множество* $Y \in E$*, то решение уравнения* (5.1) *существует и лежит в* Y*.*

Пусть $M_1 = h\nu_{12}\kappa^* f^* A_{21}(4\pi^{-1})$, $\tau_0 = dc^{-1}$. Определим полную подрешетку

$$K_0 = \{\psi \subset K_\infty(\mathcal{D}) : \psi \prec M_1\}.$$

Лемма 5. *При любых* $\psi_0 \in K_\infty(\mathcal{D})$ *имеет место включение*

$$U_t\psi \in K_0, \quad t > \tau_0.$$

Доказательство. Пусть $\Phi = \{\psi, C_1, C_2\} \in \mathfrak{M}_T \cap \mathcal{K}_T$ — решение задачи (2.1)–(2.5). Тогда верно

$$\begin{aligned}\psi(x,\nu,\omega,t) = g_0(x,\nu,\omega,t)\exp\left\{-\int\limits_{t_\omega^-(x,t)}^{t} c\mathcal{F}(C)(x + c\omega(s-t),\nu,s)ds\right\} + \\ + \int\limits_{t_\omega^-(x,t)}^{t} c\mathcal{P}(C)(x + c\omega(\tau - t),\nu,\tau)\exp\left\{\int\limits_{t}^{\tau} c\mathcal{F}(C)(x + c\omega(s-t),\nu,s)ds\right\}d\tau,\end{aligned} \tag{5.2}$$

при этом имеем

$$0 \leq \mathcal{F}(C)(x,\nu,t) \leq bpf^*, \quad 0 \leq \mathcal{P}(C)(x,\nu,t) \leq bf^*, \quad x \in G, \quad \nu \in I, \quad t \geq 0.$$

Так как $|t - t_\omega^-(x,t)| \leq dc^{-1} = \tau_0$, то $t_\omega^-(x,t) > 0$ при $t > \tau_0$. Следовательно, справедливо неравенство

$$\psi(x,\nu,\omega,t) \leq M_1, \quad t > \tau_0,$$

что и следовало доказать.

Пусть $\psi_0^1,\ \psi_0^2 \in K_0,\ \psi_0^1 \succ \psi_0^2,\ \Phi^{(i)} = \left\{\psi^{(i)}, C_1^{(i)}, C_2^{(i)}\right\} \in \mathfrak{M}_T \cap \mathcal{K}_T,\ i = 1, 2$ – решения задачи (2.1)–(2.5) с начальными условиями

$$\psi^{(i)}(x,\nu,\omega,0) = \psi_0^i(x,\nu,\omega), \quad i = 1, 2.$$

Положим $\psi = \psi^{(1)} - \psi^{(2)}$, $C = C_1^{(1)} - C_1^{(2)}$, $\psi_0 = \psi_0^1 - \psi_0^2$. Тогда справедливы равенства

$$\frac{1}{c}\left(\frac{d}{d\tau}\right)_\omega \psi(x,\nu,\omega,t) + \mathcal{F}(C^{(1)})(x,\nu,t)\psi(x,\nu,\omega,t) = K(x,\nu,\omega,t)C(x,t), \tag{5.3}$$

$$C(x,t) = H(x,t)\int_I\int_\Omega \frac{\kappa(\nu)}{4\pi}\psi(x,\nu,\omega,t)d\omega d\nu, \tag{5.4}$$

где

$$K(x,\nu,\omega,t) = h\nu_{12}\frac{\kappa(\nu)}{4\pi}\Big(A_{21} + (B_{12} + B_{21})\psi^{(2)}(x,\nu,\omega,t)\Big),$$

$$H(x,t) = f(x)\frac{A_{21}B_{21} + (B_{12}C_{21} - B_{21}C_{12})n_e(x)}{\mathcal{R}(C^{(1)})(x,t)\mathcal{R}(C^{(2)})(x,t)},$$

$$0 \le K \le q = h\nu_{12}\frac{\kappa(\nu)}{4\pi}(A_{21} + (B_{12} + B_{21})M_1), \quad 0 \le \mathcal{F}(C^{(1)}) \le bp, \quad 0 \le H \le f^*p.$$

Лемма 6. *При любых* $\psi_0^1, \psi_0^2 \in K_0$ *таких, что* $\psi_0^1 \succ \psi_0^2$, *выполнено соотношение*

$$U_t\psi_0^1 \succ U_t\psi_0^2, \quad t \ge 0. \tag{5.5}$$

Доказательство. Пусть $\xi = e^{-\alpha t}\psi$, $\eta = e^{-\alpha t}C$, где $\alpha = cqpf^*$. Тогда

$$\frac{1}{c}\left(\frac{d}{d\tau}\right)_\omega \xi(x,\nu,\omega,t) + (\alpha + \mathcal{F}(C^{(1)})(x,\nu,t))\xi(x,\nu,\omega,t) = G(x,\nu,\omega,t)\eta(x,t), \tag{5.6}$$

$$\eta(x,t) = H(x,t)\int_I\int_\Omega \frac{\kappa(\nu)}{4\pi}\xi(x,\nu,\omega,t)d\omega d\nu. \tag{5.7}$$

Уравнение (5.6) эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned}\xi(x,\nu,\omega,t) = g_0(x,\nu,\omega,t)\exp\left\{-\int_{t_\omega^-(x,t)}^{t}\Big(\alpha + c\mathcal{F}(C^{(1)})(x + c\omega(s-t),\nu,s)\Big)ds\right\} + \\ + \int_{t_\omega^-(x,t)}^{t} cK(x + c\omega(\tau - t),\nu,\omega,\tau)\eta(x + c\omega(\tau - t),\tau)\times \\ \times\exp\left\{\int_t^{\tau}\Big(\alpha + c\mathcal{F}(C^{(1)})(x + c\omega(s-t),\nu,s)\Big)ds\right\}d\tau.\end{aligned} \tag{5.8}$$

Пусть $\Phi = \{\xi,\eta\}$. Систему (5.7), (5.8) можно представить в виде

$$A\Phi = \Phi, \tag{5.9}$$

где оператор $A : L_\infty(\mathcal{D}\times[0,T])\times L_\infty(G\times[0,T]) \to L_\infty(\mathcal{D}\times[0,T])\times L_\infty(G\times[0,T])$ ставит в соответствие вектору Φ вектор из правых частей уравнений (5.8) и (5.7).

Пространство $L_\infty(\mathcal{D}\times[0,T])\times L_\infty(G\times[0,T])$ является банаховой решеткой относительно порядка, порожденного конусом $K_\infty(\mathcal{D}\times[0,T])\times K_\infty(G\times[0,T])$.

Положим

$$B(\Phi) = \left\{\int_{t_\omega^-(x,t)}^{t}\eta(x + c\omega(\tau - t),\tau)d\tau, \int_I\int_\Omega \frac{\kappa(\nu)}{4\pi}\xi(x,\nu,\omega,t)d\omega d\nu\right\}.$$

Оператор $B : L_\infty(\mathcal{D}\times[0,T])\times L_\infty(G\times[0,T]) \to L_\infty(\mathcal{D}\times[0,T])\times L_\infty(G\times[0,T])$ оставляет инвариантным конус $K_\infty(\mathcal{D}\times[0,T])\times K_\infty(G\times[0,T])$ и справедливы оценки

$$\left\|B^{2k-1}\right\| \le \frac{\tau_0^{k-1}}{(k-1)!}\max\left\{1,\frac{\tau_0}{k}\right\}, \quad \left\|B^{2k}\right\| \le \frac{\tau_0^k}{k!} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Поэтому спектральный радиус $\rho(B) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left\|B^n\right\|}$ равен нулю.

Для любых $\Phi_1, \Phi_2 \in L_\infty(\mathcal{D}\times[0,T])\times L_\infty(G\times[0,T])$ выполняется неравенство

$$\left|A(\Phi_1) - A(\Phi_2)\right| \prec \beta B(\left|\Phi_1 - \Phi_2\right|), \quad \beta = \max\{q, f^*p\}.$$

Кроме того, оператор A оставляет инвариантным замкнутое множество

$$S = \{\{\xi,\eta\}\in K_\infty(\mathcal{D}\times[0,T])\times K_\infty(G\times[0,T]) : \|\xi\|_{L_\infty(\mathcal{D}\times[0,T])} \le \|\psi_0\|_{L_\infty(\mathcal{D}\times[0,T])}\}.$$

Таким образом, для операторов A и $B_\lambda = \beta B$, $\lambda \ge 0$ выполнены условия леммы 4 и $\psi \ge 0$, $C \ge 0$, т.е. $\psi^{(1)} \succ \psi^{(2)}$.

Лемма 7. *Пусть* $\psi_0^i \in K_0$, $i = 1, 2$, $\psi_0^1 \succ \psi_0^2$, $\psi_0^1 \ne \psi_0^2$. *Тогда*

$$\rho(U_{2\tau_0}\psi_0^1, U_{2\tau_0}\psi_0^2) \le \gamma\rho(\psi_0^1, \psi_0^2), \tag{5.10}$$

где $\gamma\in(0, 1)$ — *некоторая постоянная, не зависящая от* ψ_0^1, ψ_0^2.

Доказательство. Из уравнения (5.3) вытекает справедливость неравенства [13]

$$\begin{gathered}\int_0^{2\tau_0}\int_{\mathcal{D}}\left(\frac{d}{dt}\right)_\omega \psi(x,\nu,\omega,t)dxd\nu d\omega dt \ge \int_{\mathcal{D}}(\psi(x,\nu,\omega,2\tau_0) - \psi(x,\nu,\omega,0))dxd\nu d\omega + \\ + \varepsilon\int_{\mathcal{D}}\psi_0(x,\nu,\omega)dxd\nu d\omega + c\varepsilon\int_0^{2\tau_0} K(x,\nu,\omega,t)C(x,t)dxd\nu d\omega dt,\end{gathered} \tag{5.11}$$

где $\varepsilon = \exp(-\kappa^* f^* B_{12}h\nu_{12}d(4\pi)^{-1})$. С другой стороны,

$$\frac{1}{c}\int_0^{2\tau_0}\int_{\mathcal{D}}\left(\frac{d}{dt}\right)_\omega \psi(x,\nu,\omega,t)dxd\nu d\omega dt =$$

$$= \int_0^{2\tau_0}\int_{\mathcal{D}} K(x,\nu,\omega,t)C(x,t)dxd\nu d\omega dt - \int_0^{2\tau_0}\int_{\mathcal{D}}\mathcal{F}(C^{(1)})(x,\nu,t)\psi(x,\nu,\omega,t)dxd\nu d\omega dt.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{c}\int_{\mathcal{D}}(\psi(x,\nu,\omega,2\tau_0)dxd\nu d\omega \le \frac{1-\varepsilon}{c}\int_{\mathcal{D}}\psi_0(x,\nu,\omega)dxd\nu d\omega +$$

$$+ \int_0^{2\tau_0}\int_{\mathcal{D}} K(x,\nu,\omega,t)C(x,t)dxd\nu d\omega dt - \int_0^{2\tau_0}\int_{\mathcal{D}}\mathcal{F}(C^{(1)})(x,\nu,t)\psi(x,\nu,\omega,t)dxd\nu d\omega dt.$$

Используя явный вид $\mathcal{F}(C^{(1)})$, K и C, получаем

$$\begin{gathered}\int_0^{2\tau_0}\int_{\mathcal{D}} K(x,\nu,\omega,t)C(x,t)dxd\nu d\omega dt = h\nu_{12}\int_0^{2\tau_0}\int_G\frac{g(x)f(x)}{\mathcal{R}_1(x,t)\mathcal{R}_2(x,t)}J(\psi)(x,t)\times \\ \times\int_I\int_\Omega\frac{\kappa(\nu)}{4\pi}(A_{21} + (B_{12} + B_{21})\psi^{(2)}(x,\nu,\omega,t))d\omega d\nu dxdt = \\ = h\nu_{12}\int_0^{2\tau_0}\int_G\frac{g(x)f(x)}{\mathcal{R}_1(x,t)\mathcal{R}_2(x,t)}J(\psi)(x,t)(A_{21} + (B_{12} + B_{21})J(\psi^{(2)})(x,t))dxdt, \\ g(x) = A_{21}B_{12} + (B_{12}C_{21} - B_{21}C_{12})n_e(x),\end{gathered}$$

$$\int_0^{2\tau_0}\int_{\mathcal{D}} \mathcal{F}(C^{(1)})(x,\nu,t)\psi(x,\nu,\omega,t)dxd\nu d\omega dt = h\nu_{12}\int_0^{2\tau_0}\int_G \frac{g(x)f(x)}{\mathcal{R}_1(x,t)}J(\psi)(x,t)dxdt.$$

Таким образом,

$$\int_0^{2\tau_0}\int_{\mathcal{D}} K(x,\nu,\omega,t)C(x,t)dxd\nu d\omega dt - \int_0^{2\tau_0}\int_{\mathcal{D}} \mathcal{F}(C^{(1)})(x,\nu,t)\psi(x,\nu,\omega,t)dxd\nu d\omega dt =$$

$$= h\nu_{12}\int_0^{2\tau_0}\int_G \frac{g(x)f(x)J(\psi)(x,t)}{\mathcal{R}_1(x,t)\mathcal{R}_2(x,t)}(-(B_{12}+B_{21})J(\psi)(x,t)-(C_{12}+C_{21})n_e(x))dxdt \le 0,$$

$$\frac{1}{c}\int_{\mathcal{D}}\psi(x,\nu,\omega,2\tau_0)dxd\nu d\omega \le \frac{1-\varepsilon}{c}\int_{\mathcal{D}}\psi_0(x,\nu,\omega)dxd\nu d\omega.$$

Последнее неравенство означает, что справедливо неравенство (5.10), где $\gamma = 1-\varepsilon$.

Из доказанных лемм 5–7 при $T_0 = 2\tau_0$ на основании теоремы 7 следует теорема 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболев В.В.* Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М.: Гостехтеоритиздат, 1956.
2. *Белл Д., Глесстон С.* Теория ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1974.
3. *Михалас Д.* Звездные атмосферы. М.: Мир, 1982.
4. *Иванов В.В.* Перенос излучения и спектры небесных тел. М.: Наука, 1969.
5. *Гермогенова Т.А.* Локальные свойства решений уравнения переноса. М.: Наука, 1986.
6. *Владимиров В.С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Тр. Матем. Ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1961. Вып. 61. С. 2–158.
7. *Сушкевич Т.А.* Математические модели переноса излучения. М.: БИНОМ, 2006.
8. *Калинин А.В., Морозов С.Ф.* Об одной нелинейной краевой задаче теории переноса излучения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. С. 1071–1080.
9. *Морозов С.Ф., Сумин В.И.* Нелинейные интегродифференциальные системы уравнений нестационарного переноса // Сиб. матем. журнал. 1978. Т. 19:4. С. 842–848.
10. *Калинин А.В., Морозов С.Ф.* О разрешимости “в целом” нелинейной задачи переноса излучения // Дифференц. ур-ния. 1985. Т. 21. № 3. С. 482–494.
11. *Калинин А.В., Морозов С.Ф.* О стабилизации решения нелинейной системы переноса излучения в двухуровневом приближении // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311. № 2. С. 343–346.
12. *Калинин А.В., Морозов С.Ф.* Задача Коши для одного нелинейного интегродифференциального уравнения переноса // Матем. заметки. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 677–686.
13. *Калинин А.В., Морозов С.Ф.* Смешанная задача для нестационарной системы нелинейных интегродифференциальных уравнений // Сиб. матем. журнал. 1999. Т. 40. № 5. С. 1052–1066.
14. *Биркгоф Г.* Теория решеток. М.: Мир, 1984.
15. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
16. *Красносельский М.А.* Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962.
17. *Tarski A.A.* A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications // Pacif. J. Math. 1955. V. 5. № 2. P. 285–309.