ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 6, с. 977–986

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 519.642

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ ПУТЕМ СВЕДЕНИЯ К ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

© 2022 г. В. Л. Литвинов[1,*], К. В. Литвинова[2,**]

[1] 119991 Москва, Воробьевы горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

[2] 443100 Самара, ул. Молодогвардейская, 244, СамГТУ, Россия

*e-mail: vladlitvinov@rambler.ru

**e-mail: kristinalitvinova900@rambler.ru

Поступила в редакцию 24.12.2021 г.
Переработанный вариант 30.01.2022 г.
Принята к публикации 11.02.2022 г.

Задача о колебаниях тел с подвижными границами, сформулированная в виде дифференциального уравнения с граничными и начальными условиями, является неклассическим обобщением гиперболической задачи. Для облегчения построения решения этой задачи и обоснования выбора вида решения строятся эквивалентные интегродифференциальные уравнения с симметричными и нестационарными ядрами и нестационарными пределами интегрирования. Преимущества метода интегродифференциальных уравнений раскрываются при переходе к более сложным динамическим системам, несущим сосредоточенные массы, колеблющиеся под действием подвижных нагрузок. Метод распространен на более широкий класс модельных краевых задач, учитывающих изгибную жесткость, сопротивление внешней среды и жесткость основания колеблющегося объекта. Решение приводится в безразмерных переменных с точностью до значений второго порядка малости относительно малых параметров, характеризующих скорость движения границы. Находится приближенное решение задачи о поперечных колебаниях каната грузоподъемной установки, обладающего изгибной жесткостью, один конец которого наматывается на барабан, а на втором закреплен груз. Библ. 22.

Ключевые слова: резонансные свойства, колебания систем с подвижными границами, законы движения границ, интегродифференциальные уравнения, амплитуда колебаний.

DOI: 10.31857/S0044466922060126

1. ВВЕДЕНИЕ

Среди всего множества задач динамики упругих систем с точки зрения технических приложений весьма актуальными являются задачи о колебаниях в системах с изменяющимися во времени геометрическими размерами. В технике широко распространены системы, границы которых подвижны (канаты грузоподъемных установок [1]–[8], гибкие передаточные звенья [4], [6], [9], бурильные колонны [10], твердотопливные стержни [10], [11] и др.). Исследования многих авторов по динамике подъемных канатов привели к необходимости постановки новых задач механики о динамике одномерных объектов переменной длины. В математической постановке это сводится к новым задачам математической физики – к исследованию соответствующих уравнений гиперболического типа в переменных диапазонах изменения обоих аргументов. Наличие подвижных границ вызывает значительные трудности при описании таких систем, поэтому здесь в основном используются приближенные методы решения [1]–[10], [12]–[18].

Из аналитических методов наиболее эффективным является метод, предложенный в [19], [20], заключающийся в подборе новых переменных, оставляющих волновое уравнение инвариантным. В [21] решение ищется в виде суперпозиции двух волн, бегущих навстречу друг другу. Эффективен также метод, использованный в [22], заключающийся в замене геометрической переменной чисто мнимой, что позволяет свести волновое уравнение к уравнению Лапласа и применить методологию теории функций комплексного переменного для решения. Однако точные методы решения ограничены волновым уравнением и относительно простыми граничными условиями.

Из приближенных методов наиболее эффективным является метод Канторовича – Галеркина [10], [14], а также метод построения решений интегродифференциальных уравнений, описанный в данной статье. Задача о колебаниях тел с подвижными границами, сформулированная в виде дифференциального уравнения с граничными и начальными условиями, является неклассическим обобщением гиперболической задачи. Для облегчения построения решения этой задачи и обоснования выбора вида решения строятся эквивалентные интегродифференциальные уравнения с симметричными и нестационарными ядрами и нестационарными пределами интегрирования. Построение интегродифференциальных уравнений движения объектов переменной длины основано на прямом интегрировании дифференциальных уравнений в сочетании со стандартной заменой искомой функции новой переменной.

В тривиальных случаях методы интегральных уравнений не имеют преимущества перед методом дифференциальных уравнений применительно к исследованию колебаний системы с бесконечным числом степеней свободы [4], [6]. Преимущества метода интегродифференциальных уравнений раскрываются при переходе к более сложным динамическим системам, несущим сосредоточенные массы, колеблющимся под действием движущихся нагрузок и т.д. Эти методы могут быть весьма плодотворными применительно к динамике канатов переменной длины и другим механическим объектам с движущимися границами.

В данной работе метод построения решений интегродифференциальных уравнений распространен на более широкий класс модельных краевых задач, учитывающих изгибную жесткость колеблющегося объекта [5], [7], [11], сопротивление внешней среды [11] и жесткость основания (подложки) объекта [4], [6]. Особое внимание уделено рассмотрению наиболее распространенного на практике случая, когда на границах действуют внешние возмущения. При фиксированной длине объекта построенные интегродифференциальные уравнения переходят в классические уравнения Фредгольма II рода.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дифференциальное уравнение движения механических объектов переменной длины имеет вид [9]

$$U_{\tau\tau}(\xi,\tau) + L[U(\xi,\tau)] = \varphi(\xi,\tau). \tag{1}$$

Граничные условия

$$\begin{gathered} Y_{ji}\left[U\left(\ell_j(\varepsilon\tau),\tau\right)\right] = F_{ji}(\tau); \\ i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,2}. \end{gathered} \tag{2}$$

Начальные условия

$$U(\xi,0) = \Phi_0(\xi); \quad U_\tau(\xi,0) = \Phi_1(\xi). \tag{3}$$

Здесь $U(\xi,\tau)$ – функция продольного или поперечного смещения объекта от положения равновесия, τ – безразмерное время, ξ – безразмерная пространственная координата; L – линейный однородный дифференциальный оператор по ξ второго либо четвертого порядка; Y_{ji} – линейные однородные дифференциальные операторы по ξ до второго порядка включительно; $\varphi(\xi,\tau)$ – заданные функции класса C; $\Phi_0(\xi)$, $\Phi_1(\xi)$, $F_{ji}(\tau)$ – заданные функции класса C^2; $\ell_j(\varepsilon\tau) = 1 + \varepsilon\tau$ – равномерный закон движения границы; ε – малый параметр ($\varepsilon = V/a$, V и a – заданные скорости движения границы и распространения колебаний соответственно).

Движение границ по закону $\ell_j(\varepsilon\tau)$ соответствует режиму медленного движения.

Дифференциальное уравнение (1) и граничные условия (2) описывают широкий ряд математических моделей для анализа одномерных краевых задач с движущимися границами с учетом действия сил сопротивления внешней среды, жесткости подложки и изгибной жесткости объекта, когда внешние возмущения действуют на границах.

Для исключения неоднородностей в граничных условиях, в уравнение (1) вводится новая функция

$$U(\xi,\tau) = V(\xi,\tau) + H(\xi,\tau), \tag{4}$$

где

$$H(\xi,\tau)=\sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{m}D_{kr}(\xi,\varepsilon\tau)F_{kr}(\tau), \tag{5}$$

при этом функция $D_{kr}(\xi,\varepsilon\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$L[D_{kr}(\xi,\varepsilon\tau)]=0 \tag{6}$$

и условиям

$$Y_{ji}[D_{kr}(\ell_j(\varepsilon\tau),\tau)]=\begin{cases}1, & k=j\wedge r=i;\\ 0, & k\neq j\vee r\neq i.\end{cases}$$

При подстановке (4) в уравнение (1) с учетом (5), (6), функция $V(\xi,\tau)$ находится как решение следующей задачи:

$$V_{\tau\tau}(\xi,\tau)+L[V(\xi,\tau)]=\varphi(\xi,\tau)-H_{\tau\tau}(\xi,\tau), \tag{7}$$

$$Y_{ji}[V(\ell_j(\varepsilon\tau),\tau)]=0. \tag{8}$$

В работе [6] получено интегродифференциальное уравнение, соответствующее задаче (7), (8), в виде

$$V(\xi,\tau)=-\int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)}K(\xi,\zeta,\varepsilon\tau)\left[V_{\tau\tau}(\zeta,\tau)-\varphi(\zeta,\tau)+H_{\tau\tau}(\zeta,\tau)\right]d\zeta, \tag{9}$$

где $K(\xi,\zeta,\varepsilon\tau)$ – симметричное по ξ и ζ ядро, зависящее от времени через параметр $\varepsilon\tau$.

Теорема 1. *В интервале времени $\Delta\tau$, соизмеримом с единицей, уравнение колебаний объекта с фиксированным параметром $l=l(\tau_0)=\mathrm{const}$ отличается от соответствующего уравнения колебаний объекта с переменным параметром $l=l(\tau)$ членами, пропорциональными множителю ε, при условии ограниченности производной ядра $K(x,s,l)$ по параметру $l(\tau)$.*

Доказательство. Разложим правую часть уравнения

$$V(\xi,\tau)=-\int\limits_{0}^{l(\tau)}K(\xi,\zeta,l(\tau))\left[V_{\tau\tau}(\zeta,\tau)-\varphi(\zeta,\tau)\right]d\zeta \tag{10}$$

по параметру $l(\tau)$ в окрестности некоторого фиксированного значения безразмерной длины $l(\tau_0)$ в ряд Тейлора.

Полагая

$$l(\tau_0+\Delta\tau)=l(\tau_0)+\Delta l(\tau)+\ldots,$$

получаем

$$\begin{gathered}V(\xi,\tau)=-\int\limits_{0}^{l(\tau_0)}K(\xi,\zeta,l(\tau_0))\left[V_{\tau\tau}(\zeta,\tau)-\varphi(\zeta,\tau)\right]d\zeta-\\ -\Delta l(\tau)\left\{K(\xi,l(\tau_0),l(\tau_0))\left[V_{\tau\tau}(l(\tau_0),\tau)-\varphi(l(\tau_0),\tau)\right]+\int\limits_{0}^{l(\tau_0)}\frac{\partial K(\xi,\zeta,l(\tau_0))}{\partial l(\tau)}\left[V_{\tau\tau}(\zeta,\tau)-\varphi(\zeta,\tau)\right]d\zeta\right\}-\\ -\frac{(\Delta l(\tau))^2}{2!}\left[\frac{\partial K(\xi,l(\tau_0),l(\tau_0))}{\partial l(\tau)}\ldots\right].\end{gathered} \tag{11}$$

Будем считать, что функция $l(\tau)$ является функцией медленного времени $l=l(\tau_1)$, $\tau_1=\varepsilon\tau$, т.е. является функцией времени, производная которой по времени пропорциональна некоторому малому параметру ε. Дифференциал длины объекта $\Delta l(\tau_1)$ в соответствии с правилом дифференцирования функции медленного времени [4], [6] вычисляется по формуле $\Delta l(\tau_1)=\varepsilon\dfrac{d\,l(\tau_1)}{d\tau_1}\Delta\tau$.

Выберем интервал времени $\Delta\tau$ в виде

$$\Delta\tau=\theta(\tau), \tag{12}$$

где $\theta(\tau)$ – некоторая функция порядка единицы.

Подставляя (12) в (11), найдем, что в интервале времени $\Delta\tau$, имеющем порядок единицы, разложение (11) имеет вид

$$V(\xi,\tau) = -\int\limits_0^{l(\tau_0)} K(\xi,\zeta,l(\tau_0))\left[V_{\tau\tau}(\zeta,\tau)-\varphi(\zeta,\tau)\right]d\zeta -$$
$$-\varepsilon l'(\tau)\theta(\tau)\left\{K(\xi,l(\tau_0),l(\tau_0))\left[V_{\tau\tau}(l(\tau_0),\tau)-\varphi(l(\tau_0),\tau)\right]+\int\limits_0^{l(\tau_0)}\frac{\partial K(\xi,\zeta,l(\tau_0))}{\partial l(\tau)}\left[V_{\tau\tau}(\zeta,\tau)-\varphi(\zeta,\tau)\right]d\zeta\right\}- \tag{13}$$
$$-\varepsilon^2 l'^2(\tau)\frac{\theta(\tau)}{2!}\left[\frac{\partial K(\xi,l(\tau_0),l(\tau_0))}{\partial l(\tau)}\ldots\right].$$

Принимая во внимание условие теоремы об ограниченности производной ядра $K(x,s,l)$ по параметру $l(\tau)$ и сравнивая (13) и (10), находим, что уравнение с фиксированным параметром $l = l(\tau_0) = \text{const}$ отличается от уравнения с переменным параметром в интервале $\Delta\tau \sim 1$ членами, пропорциональными множителю ε. Это завершает доказательство теоремы.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Решение задачи (9) будем искать в виде ряда:

$$V(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau), \tag{14}$$

где $X_n(\xi,\varepsilon\tau)$ – собственные функции, в качестве которых выбраны формально построенные решения интегрального уравнения

$$X_n(\xi,\varepsilon\tau) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)\int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} K(\xi,\zeta,\varepsilon\tau)X_n(\zeta,\varepsilon\tau)d\zeta, \tag{15}$$

где $\varepsilon\tau$ рассматривается как параметр; $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$ – собственные частоты задачи.

Решение (14) является точным в случае, если границы неподвижны.

Собственные функции $X_n(\xi,\varepsilon\tau)$ удовлетворяют граничным условиям (8) и играют в данном случае роль динамических мод.

Используя результаты [6], разложим симметричное по ξ и ζ ядро в ряд по собственным функциям $X_n(\xi,\varepsilon\tau)$:

$$K(\xi,\zeta,\varepsilon\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(\xi,\varepsilon\tau)X_n(\zeta,\varepsilon\tau)}{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)}, \tag{16}$$

где $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$ – определяется по формуле

$$\frac{1}{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)} = \int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)}\int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} K(\xi,\zeta,\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)X_n(\zeta,\varepsilon\tau)d\xi d\zeta. \tag{17}$$

Продифференцируем ряд (14) по времени:

$$V_\tau(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[f_n'(\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)+\varepsilon X_{n_\tau}(\xi,\varepsilon\tau)f_n(\tau)\right].$$

После повторного дифференцирования получим

$$V_{\tau\tau}(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{f_n''(\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)+2\varepsilon X_{n_\tau}(\xi,\varepsilon\tau)f_n'(\tau)+\varepsilon^2X_{n_{\tau\tau}}(\xi,\varepsilon\tau)f_n(\tau)\right\}. \tag{18}$$

Подставим ряды (14), (16), (18) в уравнение (9) с учетом ортогональности функций $X_n(\xi,\varepsilon\tau)$ на интервале $\left[\ell_1(\varepsilon\tau);\ \ell_2(\varepsilon\tau)\right]$ с весом $g(\xi)$ и замены

$$f_n(\tau) = \mu_n(\tau) + \sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{m} Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)F_{kr}(\tau), \tag{19}$$

где

$$Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) = -\int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} D_{kr}(\xi,\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)g(\xi)d\xi \Big/ \int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi,\varepsilon\tau)g(\xi)d\xi.$$

Заметим, что если разложить функцию $H(\xi,\tau)$ в ряд Фурье:

$$H(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau),$$

где

$$\varphi_n(\tau) = \int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} H(\xi,\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)g(\xi)d\xi \Big/ \int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi,\varepsilon\tau)g(\xi)d\xi,$$

здесь $g(\xi)$ – весовая функция, то замену можно произвести в более простом виде:

$$f_n(\tau) = \mu_n(\tau) - \varphi_n(\tau).$$

При резонансных явлениях амплитуды всех динамических мод, за исключением резонансной, малы. Поэтому нерезонансными членами рядов (14), (18) в связи с их малостью, пренебрегают. В этом случае получим расщепленную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [10]

$$A_{1n}(\varepsilon\tau)\mu_n''(\tau) + 2\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)\mu_n'(\tau) + \varepsilon^2 A_{3n}(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau) + A_{1n}(\varepsilon\tau)\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau) = \theta_n(\tau), \tag{20}$$

где

$$\begin{gathered}\theta_n(\tau) = E_n(\tau) - 2\varepsilon\sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{m} B_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)F_{kr}'(\tau) - \varepsilon^2\sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{m} C_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)F_{kr}(\varepsilon\tau) - \\ - \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)\sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{m} Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)F_{kr}(\varepsilon\tau).\end{gathered}$$

Здесь $A_{1n}(\varepsilon\tau)$, $A_{2n}(\varepsilon\tau)$, $A_{3n}(\varepsilon\tau)$, $B_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)$, $C_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)$, $E_n(\tau)$ определены в работе [10].

Коэффициенты взаимовлияния между отдельными уравнениями входят в систему (20) с малым параметром. В дальнейшем под точностью порядка ε^2 будем понимать точность, имеющую место после пренебрежения членами с ε^2 и членами вида $\varepsilon F_{ji}'(\varepsilon\tau)$, которые несмотря на малость порядка ε на резонансные свойства влияют как члены порядка ε^2. Система (20) с точностью до величин порядка малости ε^2 будет иметь вид

$$A_{1n}(\varepsilon\tau)\mu_n''(\tau) + 2\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)\mu_n'(\tau) + A_{1n}(\varepsilon\tau)\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau) = \theta_n(\tau), \tag{21}$$

где

$$\theta_n(\tau) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)\varphi_n(\tau) + E_n(\tau).$$

С учетом (5), (14), (19) решение (4) будет иметь вид:

$$U(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(\tau)X(\xi,\varepsilon\tau) + \sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{m} F_{kr}(\tau)\left[D_{kr}(\xi,\varepsilon\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)\right]. \tag{22}$$

Теорема 2. *Решение задачи* (1)–(3) *можно представить в форме*

$$U(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau). \tag{23}$$

Доказательство. Величины $Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)$, определяемые выражением

$$Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)=-\int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)}D_{kr}(\xi,\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)g(\xi)d\xi\Big/\int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)}X_n^2(\xi,\varepsilon\tau)g(\xi)d\xi,$$

являются для функции $-D_{kr}(\xi,\varepsilon\tau)$ коэффициентами разложения в ряд Фурье по системе ортогональных с весом $g(\xi)$ собственных функций $X_n(\xi,\varepsilon\tau)$ на интервале $[\ell_1(\varepsilon\tau),\ \ell_2(\varepsilon\tau)]$, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)=-D_{kr}(\xi,\varepsilon\tau).$$

Следовательно, выражение в квадратных скобках равенства (22) равно нулю. Теорема доказана.

Для упрощения введем в уравнение (23) новую функцию

$$\mu_n(\tau)=A_{0n}(\varepsilon\tau)y_n(\tau),$$

где

$$A_{0n}(\varepsilon\tau)=\exp\left[-\int\limits_0^{\tau}\frac{\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)}{A_{1n}(\varepsilon\tau)}d\tau\right].$$

Тогда уравнение (21) не будет содержать члена с $y'(\tau)$:

$$y_n''(\tau)+\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)y_n(\tau)=\theta_n(\tau)/[A_{0n}(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)].$$

Начальные условия для функций $y_n(\tau)$ находятся из условий (3) как решения уравнений

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{\infty}y_n(0)X_n(\xi,\ell_j(0))=\Phi_0(\xi);\\ \sum_{n=1}^{\infty}\{y_n'(0)X_n(\xi,\ell_j(0))+\varepsilon X_{n_\tau}(\xi,\ell_j(0))\ell_j'(0)y_n(0)\}=\Phi_1(\xi).\end{gathered} \tag{24}$$

Если в начальный момент движения скорость изменения длины объекта $\ell_j'(0)$ равна нулю, то из (24) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}y_n(0)X_n(\xi,\ell_j(0))=\Phi_0(\xi);\quad \sum_{n=1}^{\infty}y_n'(0)X_n(\xi,\ell_j(0))=\Phi_1(\xi). \tag{25}$$

Принимая во внимание, что $X_n(\xi,\varepsilon\tau)$ образуют ортогональную с весом $g(\xi)$ систему функций, из (25) получаем для функций $y_n(0)$, $y_n'(0)$ следующие выражения:

$$y_n(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\ell_1(0)}^{\ell_2(0)}X_n(\xi,\ell_j(0))\Phi_0(\xi)g(\xi)d\xi;\quad y_n'(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\ell_1(0)}^{\ell_2(0)}X_n(\xi,\ell_j(0))\Phi_1(\xi)g(\xi)d\xi. \tag{26}$$

Из (26) следует, что $y_n(0)$ и $y_n'(0)$ являются коэффициентами разложения в ряд Фурье по функциям $X_n(\xi,\ell_j(0))$ начальных условий (3).

Вопрос о сходимости рядов (18), (23), по крайней мере, в моменты времени, близкие к начальному, может быть разрешен на основании быстроты сходимости разложений (25), т.е. быстроты убывания коэффициентов $y_n(0)$ и $y_n'(0)$. Из теории рядов Фурье известно, что порядок убывания коэффициентов разложения зависит от гладкости функций, разлагаемых в ряды. Поэтому при достаточной гладкости функций $\Phi_0(\xi)$, $\Phi_1(\xi)$, определяющих начальные условия, вопрос о сходимости рядов (18), (23) решается положительно.

Заметим, что начальные условия не влияют на резонансные свойства линейных систем, поэтому принимаются в виде

$$y_n(0) = 0; \quad y_n'(0) = 0.$$

Пусть

$$\varphi(\xi,\tau) = B_0(\xi)\cos W_0(\tau); \tag{27}$$

$$F_{ji}(\tau) = B_{ji}\cos W_{ji}(\tau); \quad j = \overline{1,2}; \quad i = \overline{1,m}, \tag{28}$$

где B_{ji} – постоянные величины; $W_0(\tau)$, $W_{ji}(\tau)$ – монотонно возрастающие функции; $B_0(\xi)$ – функция, характеризующая интенсивность распределенной нагрузки.

Равенства (27), (28) можно принять в следующих случаях:

1) все внешние возмущения $\varphi(\xi,\tau)$; $F_{ji}(\tau)$ равны нулю, кроме какого-то одного;

2) производные функций $W_0(\tau)$, $W_{ji}(\tau)$ равны между собой, т.е. сами функции отличаются на постоянную величину;

3) резонансные области нагрузок φ, F_{ji} не пересекаются, тогда при рассмотрении резонанса от одной нагрузки действием других можно пренебречь.

Используя математические выкладки, изложенные в работе [10], получаем следующее выражение для полной амплитуды колебаний, соответствующей n-й динамической моде:

$$A_n^2(\tau) = \frac{1}{4}A_{0n}^2(\varepsilon\tau)a_n^2(\varepsilon\tau)\left\{\left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta)\cos\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2 + \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta)\sin\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\}, \tag{29}$$

где

$$a_n(\varepsilon\tau) = \frac{1}{\sqrt{\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}}; \quad F_n(\varepsilon\zeta) = \frac{M_n(\varepsilon\zeta)}{a_n(\varepsilon\zeta)w_n'(\zeta)}; \quad w_n(\tau) = \int_0^\tau \omega_{0n}(\varepsilon\tau)d\tau;$$

$$M_{nji}(\varepsilon\tau) = \frac{-B_{ji}\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)Q_{nji}(\varepsilon\tau)}{A_{0n}(\varepsilon\tau)}; \quad \Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W_n(\zeta).$$

4. ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КАНАТА ГРУЗОПОДЪЕМНОЙ УСТАНОВКИ

В качестве примера рассмотрим поперечные колебания каната грузоподъемной установки, один конец которого наматывается на барабан, а на втором шарнирно закреплен груз. С помощью приведенной модели можно рассчитывать резонансные свойства несущих звеньев широкого круга грузоподъемных машин.

Уравнение, учитывающее изгибную жесткость и натяжение колеблющегося звена, имеет вид (см. [10])

$$U_{tt}(x,t) + \frac{EI}{\rho}U_{xxxx}(x,t) - a^2U_{xx}(x,t) = 0. \tag{30}$$

Граничные условия

$$U(0,t) = 0; \quad U_{xx}(0,t) = 0; \tag{31}$$

$$U(l_0(t),t) = B\cos W_0(\omega_0 t); \quad U_x(l_0(t),t) = 0. \tag{32}$$

В задаче (30)–(32) используются следующие обозначения: $U(x,t)$ – поперечное смещение точки звена с координатой x в момент времени t; I – осевой момент инерции сечения каната; ρ – линейная плотность массы; $a = \sqrt{T/\rho}$ – минимальная скорость распространения волн; T – сила натяжения; $l_0(t) = L_0 - v_0t$ – закон движения границы каната, L_0 – первоначальная длина каната, v_0 – скорость движения границы; $W_0(z)$ – функция класса C^2; B, ω_0 – постоянные величины; E – модуль упругости материала каната.

Введем в задачу (30)–(32) безразмерные переменные:

$$\xi = \omega_0 x/a; \quad \tau = \omega_0 t + \frac{\omega_0 L_0 - a}{-v_0}; \quad U(x,t) = BV(\xi,\tau).$$

Тогда задача примет вид

$$V_{\tau\tau}(\xi,\tau) + \beta^2 V_{\xi\xi\xi\xi}(\xi,\tau) - V_{\xi\xi}(\xi,\tau) = 0; \tag{33}$$

$$V(0,\tau) = 0; \quad V_{\xi\xi}(0,\tau) = 0; \tag{34}$$

$$V\left(l(\varepsilon\tau),\tau\right) = \cos W(\tau); \quad V_{\xi}\left(l(\varepsilon\tau),\tau\right) = 0, \tag{35}$$

где

$$\beta^2 = \frac{EI}{\rho}\frac{\omega_0^2}{a^4}; \quad l(\varepsilon\tau) = 1 + \varepsilon\tau; \quad W(\tau) = W_0\left(\tau - \gamma_0\right); \quad \gamma_0 = \frac{\omega_0 L_0 - a}{-v_0}; \quad \varepsilon = -v_0/a.$$

Заметим, что значение величины β в технических задачах обычно не превосходит 0.25.

Интегрируя уравнение (33) по ξ и освобождаясь от неоднородностей в граничных условиях, по аналогии с (4)–(6) получено интегродифференциальное уравнение поперечных колебаний каната переменной длины в виде:

$$V(\xi,\tau) = -\int_0^{l(\varepsilon\tau)} K(\xi,\zeta,\varepsilon\tau)\left[V_{\tau\tau}(\zeta,\tau) + H_{\tau\tau}(\zeta,\tau)\right]d\zeta. \tag{36}$$

Ядро уравнения (36) в рассматриваемом случае будет определяться функцией

$$K(\xi,\zeta,\varepsilon\tau) = \begin{cases} \left(\dfrac{l(\varepsilon\tau) - \xi}{\beta}\right)^2 \left(\dfrac{l(\varepsilon\tau) - \xi}{3} + \dfrac{\xi - \zeta}{2}\right), & \zeta \le \xi, \\ \left(\dfrac{l(\varepsilon\tau) - \zeta}{\beta}\right)^2 \left(\dfrac{l(\varepsilon\tau) - \zeta}{3} + \dfrac{\zeta - \xi}{2}\right), & \zeta \ge \xi. \end{cases} \tag{37}$$

Функция (37) также симметрична относительно аргументов ξ и ζ и зависит от времени через содержащийся в ней параметр $\varepsilon\tau$. При фиксированном $l(\varepsilon\tau) = \text{const}$ функция (37) совпадает с функцией влияния прогибов каната постоянной длины.

Таким образом, задача (33)–(35) сводится к интегродифференциальному уравнению (36) с симметричным, изменяющимся во времени ядром (37) и переменными во времени пределами интегрирования.

Решение задачи (36) будем вести в безразмерных переменных в соответствии с методикой, изложенной выше.

В результате для амплитуды колебаний, соответствующих n-й динамической моде, получим следующее выражение:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\varepsilon\tau)\left\{\left[\int_0^{\tau} F_n(\varepsilon\zeta)\cos\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2 + \left[\int_0^{\tau} F_n(\varepsilon\zeta)\sin\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\},$$

где

$$E_n^2(\varepsilon\tau) = \frac{1}{4A_{1n}(\varepsilon\tau)\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}; \quad \Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W_n(\zeta); \quad F_n(\varepsilon\zeta) = Q_{n_{21}}(\varepsilon\zeta)\sqrt{\omega_{0n}^3(\varepsilon\zeta)A_{1n}(\varepsilon\zeta)}.$$

Явление установившегося резонанса в рассматриваемой системе наблюдается, если

$$W_n(\tau) = w_n(\tau) + \gamma,$$

где γ – постоянная величина.

Таблица 1. Зависимость амплитуды колебаний A_n от ε и β при прохождении через резонанс на первой и второй динамических модах

Мода	$\beta\backslash\varepsilon$	0.02	0.04	0.06	0.08
1	0.01	17.3	10.7	8.8	6.7
	0.2	14.1	9.2	7.3	5.4
2	0.01	12.5	7.7	5.1	4.2
	0.2	9.3	5.4	4.3	3.7

При действии на систему гармонического возмущения с частотой ω_0, когда $W(\tau)=\tau$, на любой из динамических мод может возникнуть явление прохождения через резонанс. Точка резонансной области τ_0, в которой $\Phi_n'(\tau_0)=0$, приближенно определяется по следующей формуле:

$$\tau_0=\frac{1}{\varepsilon}\left[\sqrt{\frac{2\beta^2}{-1+\sqrt{1+4\beta^2}}}\cdot\pi n-1\right].$$

Для исследования явления прохождения через резонанс необходимо найти значения τ_1 и τ_2, при которых квадрат амплитуды

$$A_n^2(\tau_1,\tau_2)=E_n^2(\varepsilon\tau_2)\left\{\left[\int_{\tau_1}^{\tau_2}F_n(\varepsilon\zeta)\cos\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2+\left[\int_{\tau_1}^{\tau_2}F_n(\varepsilon\zeta)\sin\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\} \qquad (38)$$

имеет максимум.

С помощью разработанного программного комплекса численно исследована зависимость максимальной амплитуды поперечных колебаний каната при прохождении через резонанс на первой и второй динамических модах от относительной скорости движения границы при различных значениях безразмерного коэффициента, характеризующего жесткость объекта (см. табл. 1).

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

– при уменьшении ε амплитуда колебаний увеличивается;

– при $\varepsilon\to 0$ амплитуда колебаний стремится к бесконечности;

– с увеличением номера моды и изгибной жесткости объекта максимальная амплитуда колебаний уменьшается.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приближенный метод построения решений интегродифференциальных уравнений распространен на более широкий класс модельных краевых задач о колебаниях объектов с подвижными границами в линейной постановке, описываемой уравнениями гиперболического типа. Данный метод позволяет учесть влияние на систему сил сопротивления внешней среды, изгибной жесткости и жесткости подложки объекта. Решение задачи сводится к получению квадратурных формул амплитуды колебаний, соответствующих n-й динамической моде. Вышеуказанные результаты позволяют на этапе проектирования предотвратить возможность высокоамплитудных колебаний в механических объектах с подвижными границами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колосов Л.В., Жигула Т.И.* Продольно-поперечные колебания струны каната подъемной установки // Изв. вузов. Горный журнал. 1981. № 3. С. 83–86.
2. *Zhu W.D., Chen Y.* Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control // J. Vibr. Acoust. 2006. № 1. P. 66–78.
3. *Shi Y., Wu L., Wang Y.* Нелинейный анализ собственных частот тросовой системы // J. Vibr. Engng. 2006. № 2. P. 173–178.
4. *Горошко О.А., Савин Г.Н.* Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наук. думка, 1971. 290 с.

5. *Литвинов В.Л., Анисимов В.Н.* Поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2017. Т. 19. № 4. С. 161–165.
6. *Савин Г.Н., Горошко О.А.* Динамика нити переменной длины. Киев: Наук. думка, 1962. 332 с.
7. *Liu Z., Chen G.* Анализ плоских нелинейных свободных колебаний несущего каната с учетом влияния изгибной жесткости // J. Vibr. Engng. 2007. № 1. P. 57–60.
8. *Palm J. et al.* Simulation of mooring cable dynamics using a discontinuous Galerkin method // V Intern. Conference on Comput. Methods in Marine Engng. 2013.
9. *Литвинов В.Л.* Исследование свободных колебаний механических объектов с движущимися границами при помощи асимптотического метода // Ж. Средневолжского матем. общества. 2014. Т. 16. № 1. С. 83–88.
10. *Литвинов В.Л., Анисимов В.Н.* Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами: монография / В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов. Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2017. 149 с.
11. *Лежнева А.А.* Свободные изгибные колебания балки переменной длины // Ученые записки. Пермь: Пермск. Ун-т, 1966. № 156. С. 143–150.
12. *Wang L., Zhao Y.* Multiple internal resonances and non–planar dynamics of shallow suspended cables to the harmonic excitations // J. Sound Vib. 2009. № 1–2. P. 1–14.
13. *Zhao Y., Wang L.* On the symmetric modal interaction of the suspended cable: three–to one internal resonance // J. Sound Vib. 2006. № 4–5. P. 1073–1093.
14. *Литвинов В.Л., Анисимов В.Н.* Применение метода Канторовича–Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах // Известия Российской академии наук. Механ. твердого тела. 2018. № 2. С. 70–77.
15. *Berlioz A., Lamarque C.-H.* A non-linear model for the dynamics of an inclined cable // J. of Sound and Vibration. 2005. V. 279. P. 619–639.
16. *Sandilo S.H., van Horssen W.T.* On variable length induced vibrations of a vertical string // J. of Sound and Vibration. 2014. V. 333. P. 2432–2449.
17. *Zhang W., Tang Y.* Global dynamics of the cable under combined parametrical and external excitations // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2002. V. 37. P. 505–526.
18. *Faravelli L., Fuggini C., Ubertini F.* Toward a hybrid control solution for cable dynamics: Theoretical prediction and experimental validation // Struct. Control Health Monit. 2010. V. 17. P. 386–403.
19. *Весницкий А.И.* Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
20. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В.* Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестн. Самарского гос. техн. университета. Сер. “Физ.-матем. науки”. 2012. V. 3(28). P. 145–151.
21. *Весницкий А.И.* Обратная задача для одномерного резонатора, изменяющего во времени свои размеры // Изв. вузов. Радиофиз. 1971. V. 10. P. 1538–1542.
22. *Барсуков К.А., Григорян Г.А.* К теории волновода с подвижными границами // Изв. вузов. Радиофиз. 1976. V. 2. P. 280–285.