ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 6, с. 987–993

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.956

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ[1)]

 А. Б. Муравник

117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, Российский университет дружбы народов, Россия

e-mail: amuravnik@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.11.2021 г.
Переработанный вариант 12.01.2022 г.
Принята к публикации 11.02.2022 г.

Дифференциально-разностные уравнения (и функционально-дифференциальные уравнения в целом) находят приложения в областях, не покрываемых классическими моделями математической физики: модели нелинейной оптики, неклассические диффузионные модели (учитывающие инерционный характер этого физического явления), биоматематические приложения, теория многослойных пластин и оболочек. Это обусловлено нелокальной природой функционально-дифференциальных уравнений: в отличие от классических дифференциальных уравнений, связывающих все производные неизвестной функции (включая ее саму) в одной и той же точке (что является определенной редукцией математической модели), они допускают связь указанных членов уравнения в разных точках, тем самым принципиально повышая общность модели. В настоящей работе исследуется задача Дирихле в полупространстве для эллиптических дифференциально-разностных уравнений с нелокальными потенциалами: дифференциальные операторы действуют на неизвестную (искомую) функцию в одной точке, а потенциал – в другой. Для случая интегрируемых краевых данных (а именно в этом случае допустимы только решения с конечной энергией) строится интегральное представление решения и доказывается его гладкость вне граничной гиперплоскости, а также его равномерное стремление к нулю при неограниченном возрастании времениподобной переменной. Библ. 24.

Ключевые слова: дифференциально-разностные уравнения, эллиптические задачи, нелокальные потенциалы, суммируемые краевые данные.

DOI: 10.31857/S0044466922060138

1. ВВЕДЕНИЕ

Эллиптические дифференциально-разностные уравнения, т.е. уравнения, в которых на неизвестную функцию действуют, кроме дифференциальных операторов, еще и операторы сдвига, активно исследуются в настоящее время (см., например, [1] и имеющуюся там библиографию). Это обусловлено как принципиальной новизной приложений таких уравнений, так и качественно новыми эффектами, возникающими в (исследуемом) нелокальном случае (см., например, [2]–[11]).

Для задач в ограниченных областях для эллиптических дифференциально-разностных уравнений к настоящему времени построена глубокая и полная теория (см., например, [1], [12]–[15] и имеющуюся там библиографию). Случай неограниченной области пока изучен в гораздо меньшей степени. Так, в [16] (см. также имеющуюся там библиографию) задача Дирихле в полуплоскости изучена для случая, когда (эллиптический) дифференциально-разностный оператор представляет собой суперпозицию дифференциального и разностного оператора. В [17], [18] начато исследование уравнений, содержащих суммы дифференциальных операторов и операторов сдвига, т.е. эллиптических уравнений с нелокальными потенциалами – рассмотрен двумерный случай, т.е. задача Дирихле в полуплоскости. В настоящей работе мы переходим к многомерному

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 20-01-00288 А).

случаю, а именно, в полупространстве $\{(x, y) | x \in \mathbb{R}^n,\ y > 0\}$ рассматриваем задачу Дирихле (с суммируемой краевой функцией) для уравнения

$$u_{x_1x_1}(x, y) - au(x_1 + h, x_2, \ldots, x_n, y) + \sum_{j=2}^{n} u_{x_jx_j}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0. \tag{1.1}$$

При условии, что

$$0 < a \leq 2h^2, \tag{1.2}$$

доказывается разрешимость указанной задачи в смысле обобщенных функций (точнее, в смысле Гельфанда–Шилова), строится интегральное представление ее решения формулой пуассоновского типа и доказывается его бесконечная дифференцируемость вне гиперплоскости $\{y = 0\}$, а также его равномерное стремление к нулю (вместе со всеми его производными) при $y \to \infty$.

2. ОПЕРАЦИОННАЯ СХЕМА

Наряду с уравнением (1.1) рассмотрим краевое условие

$$u\big|_{y=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

Будем использовать классическую операционную схему Гельфанда–Шилова (см., например, [19, § 10]): к задаче (1.1), (2.1) (формально) применим преобразование Фурье по (n-мерной) переменной x. Получим следующую начальную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2\hat{u}}{dy^2} = \left(|\xi|^2 + a\cos h\xi_1 + ia\sin h\xi_1\right)\hat{u}, \quad y \in (0, +\infty), \tag{2.2}$$

$$\hat{u}(0;\xi) = \hat{u}_0(\xi). \tag{2.3}$$

Отметим, что эта задача не является задачей Коши, поскольку порядок уравнения равен двум, а начальное условие только одно.

Таким образом, (2.2) – линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (зависящее от n-мерного параметра ξ) с характеристическим уравнением $\pm\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, где

$$\rho = \rho(\xi) = \left[\left(|\xi|^2 + a\cos h\xi_1\right)^2 + a^2\sin^2 h\xi_1\right]^{1/4} =$$
$$= \left(|\xi|^4 + 2a|\xi|^2\cos h\xi_1 + a^2\cos^2 h\xi_1 + a^2\sin^2 h\xi_1\right)^{14} = \left(|\xi|^4 + 2a|\xi|^2\cos h\xi_1 + a^2\right)^{1/4},$$

а

$$\theta = \theta(\xi)\frac{1}{2}\arctan\frac{a\sin h\xi_1}{|\xi|^2 + a\cos h\xi_1}.$$

Решим задачу (2.2), (2.3) так, как это сделано в [17, разд. 1], и выберем произвольные постоянные таким образом, чтобы после (формального) применения обратного преобразования Фурье к полученному решению чисто мнимая часть обратилась в ноль (это возможно, потому что количество начальных условий меньше, чем порядок уравнения). Получим свертку краевой функции с функцией

$$\mathscr{E}(x, y) := \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-yG_1(\xi)}\cos\left[x\cdot\xi - yG_2(\xi)\right]d\xi, \tag{2.4}$$

где

$$G_{\substack{\{1\}\\ \{2\}}}(\xi) = \rho(\xi)\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\theta(\xi). \tag{2.5}$$

Замечание 1. Применяя в настоящем разделе прямое и обратное преобразования Фурье, мы не заботимся о сходимости интегралов и о законности изменения порядка интегрирования, поскольку (в полном соответствии с общей схемой [19, § 10]) имеем дело с решениями в смысле обобщенных функций. В следующем разделе мы имеем дело и с обычными функциями, но каждое утверждение этого раздела строго доказывается отдельно.

3. ПОСТРОЕНИЕ ЯДРА ПУАССОНА

Чтобы оценить функцию $G_1(\xi)$ снизу, учтем, что значения арктангенса лежат в интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Значит, $|\theta(\xi)| < \frac{\pi}{4}$, т.е. $\cos\theta(\xi) > 0$ и $\cos 2\theta(\xi) > 0$. Следовательно, $\cos\theta(\xi)$ можно представить в виде $\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta(\xi)}{2}}$, а $\cos 2\theta(\xi)$ – в виде $\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\theta(\xi)}}$. Теперь, поскольку

$$2\theta(\xi) = \arctan\frac{a\sin h\xi_1}{|\xi|^2 + a\cos h\xi_1},$$

имеем равенство

$$\tan 2\theta(\xi) = \frac{a\sin h\xi_1}{|\xi|^2 + a\cos h\xi_1}. \tag{3.1}$$

Положительность последнего знаменателя обеспечивается условием (1.2). Действительно, он ограничен снизу функцией одной переменной $f(\xi_1) := \xi_1^2 + a\cos h\xi_1$. Ее производная $f'(\xi_1)$ равна

$$2\xi_1 - ah\sin h\xi_1 = \xi_1\left(2 - ah^2\frac{\sin h\xi_1}{h\xi_1}\right),$$

а значит, неотрицательна на $[0,+\infty)$. Следовательно, $f(\xi_1)$ – неубывающая на положительной полуоси функция. Поэтому на указанной полуоси она ограничена снизу величиной $f(0) = a > 0$. Наконец, поскольку $f(\xi_1)$ – четная функция, последняя оценка остается справедливой на всей оси.

Из этой положительности мы делаем вывод, что

$$\begin{gathered}\cos 2\theta(\xi) = \left(1 + \frac{a^2\sin^2 h\xi_1}{\left[|\xi|^2 + a\cos h\xi_1\right]^2}\right)^{-12} = \sqrt{\frac{\left[|\xi|^2 + a\cos h\xi_1\right]^2}{\left[|\xi|^2 + a\cos h\xi_1\right]^2 + a^2\sin^2 h\xi_1}} = \\ = \frac{|\xi|^2 + a\cos h\xi_1}{\sqrt{|\xi|^4 + 2a|\xi|^2\cos h\xi_1 + a^2}} = \frac{|\xi|^2 + a\cos h\xi_1}{\rho^2(\xi)}.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Тогда

$$\cos\theta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + \frac{|\xi|^2 + a\cos h\xi_1}{\rho^2(\xi)}\right]^{1/2}$$

и, следовательно,

$$G_1(\xi) = \rho(\xi)\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + \frac{|\xi|^2 + a\cos h\xi_1}{\rho^2(\xi)}\right]^{12} = \sqrt{\frac{\rho^2(\xi) + |\xi|^2 + a\cos h\xi_1}{2}}. \tag{3.3}$$

Поскольку

$$\rho^4(\xi) = |\xi|^4 + 2a|\xi|^2\cos h\xi_1 + a^2 \ge |\xi|^4 - 2a|\xi|^2 + a^2 = \left(|\xi|^2 - a\right)^2,$$

неравенство $\rho^2(\xi) \ge |\xi|^2 - a$ выполнено при условии, что $|\xi| \ge \sqrt{a}$. Значит, при $|\xi| \ge \sqrt{a}$ подкоренное выражение в (3.3) ограничено снизу функцией $\frac{|\xi|^2 - a + |\xi|^2 - a}{2} = |\xi|^2 - a$.

Справедлива

Лемма 1. *Функция* (2.4) *корректно определена в полупространстве* $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ *вместе со всеми своими производными и является классическим решением уравнения* (1.1) *в этом полупространстве* (*в смысле определения, данного в* [20, разд. 3]).

Доказательство. Используя полученную выше оценку подкоренного выражения в (3.3), заключаем, что для любого положительного y модуль подынтегральной функции в (2.4) мажорируется интегрируемой функцией $e^{-y\sqrt{|\xi|^2-a}}$ во внешности шара радиуса $\sqrt{a}$ с центром в начале координат; внутри этого шара она мажорируется тождественной единицей. Таким образом, функция $\mathscr{E}(x, y)$ корректно определена в $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$. Формально дифференцируя функцию $\mathscr{E}(x, y)$ под знаком интеграла (по любой переменной и сколько угодно раз), мы получаем только дополнительные подынтегральные сомножители не более, чем полиномиального роста по ξ, которые не имеют особенностей. Абсолютная сходимость полученных интегралов обосновывается точно так же, как и в случае самой функции $\mathscr{E}(x, y)$, только мажоранты заменяются на $a^{m/2}$ и $|\xi|^{m/2}\, e^{-y\sqrt{|\xi|^2-a}}$ соответственно (здесь m – порядок производной). Следовательно, указанное выше формальное дифференцирование под знаком интеграла законно и все производные функции $\mathscr{E}(x, y)$ тоже корректно определены в полупространстве $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$.

Теперь мы можем вычислить лапласиан функции (2.4):

$$\mathscr{E}_{x_jx_j}(x, y) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi_j^2 e^{-yG_1(\xi)} \cos[x\cdot\xi - yG_2(\xi)]\, d\xi, \quad j = \overline{1, n},$$

$$\mathscr{E}_y(x, y) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_1(\xi) e^{-yG_1(\xi)} \cos[x\cdot\xi - yG_2(\xi)]\, d\xi + \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_2(\xi) e^{-yG_1(\xi)} \sin[x\cdot\xi - yG_2(\xi)]\, d\xi,$$

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_{yy}(x, y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_1^2(\xi) e^{-yG_1(\xi)} \cos[x\cdot\xi - yG_2(\xi)]\, d\xi - \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_1(\xi)G_2(\xi) e^{-yG_1(\xi)} \sin[x\cdot\xi - yG_2(\xi)]\, d\xi -\\ - \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_1(\xi)G_2(\xi) e^{-yG_1(\xi)} \sin[x\cdot\xi - yG_2(\xi)]\, d\xi - \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_2^2(\xi) e^{-yG_1(\xi)} \cos[x\cdot\xi - yG_2(\xi)]\, d\xi =\\ = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)\right] e^{-yG_1(\xi)} \cos[x\cdot\xi - yG_2(\xi)]\, d\xi -\\ - 2\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_1(\xi)G_2(\xi) e^{-yG_1(\xi)} \sin[x\cdot\xi - yG_2(\xi)]\, d\xi.\end{aligned}$$

Далее, учитывая равенства (3.1), (3.2), получаем соотношения

$$G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi) = \rho^2(\xi)[\cos^2\theta(\xi) - \sin^2\theta(\xi)] = \rho^2(\xi)\cos 2\theta(\xi) = |\xi|^2 + a\cos h\xi_1$$

и

$$2G_1(\xi)G_2(\xi) = 2\rho^2(\xi)\cos^2\theta(\xi)\sin^2\theta(\xi) = \rho^2(\xi)\sin 2\theta(\xi)\rho^2(\xi)\tan 2\theta(\xi)\cos 2\theta(\xi) = a\sin h\xi_1.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \mathscr{E}_{x_jx_j}(x, y) + \mathscr{E}_{yy}(x, y) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(-\sum_{j=1}^n \xi_j^2 + |\xi|^2 + a\cos h\xi_1\right) e^{-yG_1(\xi)} \cos[x\cdot\xi - yG_2(\xi)]\, d\xi -\\ - a\int\limits_{\mathbb{R}^n} \sin h\xi_1 e^{-yG_1(\xi)} \sin[x\cdot\xi - yG_2(\xi)]\, d\xi =\\ = a\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-yG_1(\xi)} (\cos[x\cdot\xi - yG_2(\xi)]\cos h\xi_1 - \sin[x\cdot\xi - yG_2(\xi)]\sin h\xi_1)\, d\xi =\\ = a\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-yG_1(\xi)} \cos[(x\cdot\xi + h\xi_1) - yG_2(\xi)]\, d\xi =\\ = a\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-yG_1(\xi)} \cos[(x_1 + h, x_2, \ldots, x_n)\cdot\xi - yG_2(\xi)]\, d\xi = a\mathscr{E}(x_1 + h, x', y),\end{aligned}$$

где $x' = (x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, что и завершает доказательство.

Замечание 2. Если положить $a = 0$ (т.е. вместо дифференциально-разностного уравнения рассмотреть классическое дифференциальное уравнение), то соотношение (2.4) дает хорошо известное ядро Пуассона $\frac{y}{\left(|x|^2 + y^2\right)^{\frac{n}{2}+1}}$ для задачи Дирихле в полупространстве для уравнения Лапласа.

4. СВЕРТКА С СУММИРУЕМЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Используя мажоранты подынтегральной функции в (2.4) и ее производных, найденные в разд. 3, и обозначая через $B(r)$ шар радиуса r с центром в начале координат, находим мажоранты самой функции $\mathscr{E}(x, y)$ и ее производных:

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^m e^{-yG_1(\xi)} \cos\left[x \cdot \xi - yG_2(\xi)\right] d\xi\right| = \left|\int\limits_{B(2\sqrt{a})} |\xi|^m e^{-yG_1(\xi)} d\xi + \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B(2\sqrt{a})} |\xi|^m e^{-yG_1(\xi)} d\xi\right| \leq$$

$$\leq \left|\int\limits_{B(2\sqrt{a})} |\xi|^m d\xi\right| + \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B(2\sqrt{a})} |\xi|^m e^{-y\sqrt{|\xi|^2 - a}} d\xi\right| = C(a) + C(a, y).$$

Отсюда вытекает

Теорема 1. *Если* $u_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$, *то функция*

$$u(x, y) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathscr{E}(x - \xi, y) u_0(\xi) d\xi \tag{4.1}$$

является классическим решением уравнения (1.1).

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что в условиях теоремы оценки, найденные выше, влекут за собой законность дифференцирования под знаком интеграла в (4.1); далее применяется лемма 1.

Замечание 3. По построению функции $\mathscr{E}(x, y)$ (см. разд. 2) и согласно [19, § 10, теорема 1], функция (4.1) удовлетворяет задаче (1.1), (2.1) в смысле Гельфанда–Шилова (см. [19, § 10]). А именно, это – обобщенная функция (n-мерной) переменной x, зависящая от параметра y и дифференцируемая по этому параметру на положительной полуоси (см., например, [21, § 9, разд. 5]), уравнение (1.1) понимается как соотношение между обобщенными функциями переменной x, выполняющееся для каждого положительного значения параметра y, а краевое условие (2.1) понимается как предельное соотношение в топологии пространства обобщенных функций переменной x при стремлении вещественного параметра y к нулю справа (см., например, [21, § 9, разд. 4]). По переменной y порядок уравнения (1.1) равен двум, но [19, § 10, теорема 1] остается применимой, поскольку она верна не только для систем, но и для уравнений, а уравнение (1.1) можно свести к системе уравнений первого порядка по y подобно тому, как это сделано в [22, Ch. 2, § 5, разд. 2]. Задача (1.1), (2.1) не эквивалентна указанному примеру из [22], потому что задача в этом примере имеет два краевых условия, а не одно, но эта разница не влияет на разрешимость. Таким образом, теорема 1 устанавливает гладкость указанного решения задачи (1.1), (2.1) вне граничной гиперплоскости.

5. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ

Ограничение (1.2) позволяет исследовать поведение найденного решения и при $y \to \infty$. Точнее, справедлива

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *функция* (4.1) *и каждая ее производная бесконечно дифференцируемы в полупространстве* $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ *и каждая из этих функций стремится к нулю при* $y \to +\infty$ *равномерно относительно* x *из* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. В разд. 3 доказано, что условие (1.2) обеспечивает выполнение оценки $\xi_1^2 + a\cos h\xi_1 \geq a$. Тогда $|\xi|^2 + a\cos h\xi_1 \geq a$. С другой стороны,

$$\rho(\xi) \geq \left[\left(|\xi|^2 + a\cos h\xi_1\right)^2\right]^{1/4} = \sqrt{\left||\xi|^2 + a\cos h\xi_1\right|} = \sqrt{|\xi|^2 + a\cos h\xi_1},$$

потому что последнее подкоренное выражение положительно в силу условия (1.2) и положительности постоянной a.

Значит, $\rho^2(\xi) > a$, т.е. $G_1(\xi) \geq \sqrt{\frac{a+a}{2}} = \sqrt{a}$ и, следовательно, справедлива следующая оценка:

$$|\mathcal{E}(x,y)| \leq \int\limits_{B(2\sqrt{a})} e^{-y\sqrt{a}} d\xi + \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B(2\sqrt{a})} e^{-y\sqrt{|\xi|^2 - a}} d\xi = C(a) e^{-y\sqrt{a}} + \mathrm{const} \int\limits_{2\sqrt{a}}^{\infty} \rho^{n-1} e^{-y\sqrt{\rho^2 - a}} d\rho.$$

Подстановка $\tau = \rho - \sqrt{a}$ сводит последний интеграл к виду

$$\int\limits_{\sqrt{a}}^{\infty} \left(\tau + \sqrt{a}\right)^{n-1} e^{-y\sqrt{\tau^2 + 2\sqrt{a}}} d\tau,$$

что оценивается сверху выражением

$$\int\limits_0^{\infty} (2\tau)^{n-1} e^{-y\tau} d\tau = \frac{2^{n-1}}{y^n} \int\limits_0^{\infty} z^{n-1} e^{-z} dz = \frac{\mathrm{const}}{y^n}.$$

Отсюда вытекает итоговая оценка

$$|\mathcal{E}(x,y)| \leq \mathrm{const}\left(e^{-y\sqrt{a}} + \frac{1}{y^n}\right)$$

и, соответственно,

$$|u(x,y)| \leq \mathrm{const}\,\|u_0\|_1 \left(e^{-y\sqrt{a}} + \frac{1}{y^n}\right),$$

где постоянная зависит только от параметра a.

Тем самым утверждение теоремы доказано для самой функции $u(x, y)$.

Для ее производных это утверждение доказывается точно так же; единственное отличие заключается в том, что подынтегральные функции умножаются на функции вида $|\xi|^m$, но это не изменяет итоговую оценку.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Так же, как и в классическом случае дифференциальных эллиптических уравнений, задачи в полупространстве для дифференциально-разностных эллиптических уравнений естественным образом разделяются на два типа: задачи с ограниченными краевыми данными и задачи с интегрируемыми краевыми данными. Такое разделение обосновано тем, что в указанных двух случаях решения обладают принципиально разными качественными свойствами. В частности, только в задачах первого типа возможна стабилизация по Репникову—Эйдельману, т.е. ситуация, в которой решение может иметь предел (причем не обязательно нулевой) при стремлении времениподобной переменной к бесконечности, а может и не иметь его (в зависимости от поведения средних от краевой функции). В задачах второго типа решение всегда стремится к нулю, и исследование в основном сосредоточено на скорости этого стремления.

Специфика дифференциально-разностных уравнений — в том, что в каждом из этих двух случаев имеет смысл отдельно рассматривать уравнения, содержащие суперпозицию дифференциальных операторов и операторов сдвига (для таких уравнений задачи второго типа рассмотрены в [20], [23], [24]), и уравнения, содержащие их сумму. Задача второго типа для модельного уравнения с суммой исследована в настоящей работе.

Отметим, что для задач второго типа (случай интегрируемых краевых данных) все результаты получены для произвольного количества пространственноподобных (тангенциальных) независимых переменных. Для задач первого типа (случай ограниченных краевых данных) все известные на сегодня результаты достигнуты только в полуплоскости (т.е. для случая одной тангенциальной переменной); многомерный случай требует дополнительного исследования.

Автор выражает глубокую благодарность участникам Второй международной конференции “Математическая физика, динамические системы, бесконечномерный анализ” (Долгопрудный, июнь–июль 2021 г.) за полезные обсуждения его доклада, способствовавшие дальнейшему развитию полученных результатов и их лучшему пониманию и изложению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Скубачевский А.Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // Успехи матем. наук. 2016. Т. 71. № 5. С. 3–112.
2. *Онанов Г.Г., Скубачевский А.Л.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела // Прикл. механ. 1979. Т. 15. № 5. С. 39–47.
3. *Razgulin A.V.* Rotational multi-petal waves in optical system with 2-D feedback // Chaos in Optics. Proc. SPIE. 1993. V. 2039. P. 342–352.
4. *Vorontsov M.A., Firth W.J.* Pattern formation and competition in nonlinear optical systems with two-dimensional feedback // Phys. Rev. A. 1994. V. 49. № 4. P. 2891–2906.
5. *Vorontsov M.A., Iroshnikov N.G., Abernathy R.L.* Diffractive patterns in a nonlinear optical two-dimensional feedback system with field rotation // Chaos Solitons Fractals. 1994. V. 4. P. 1701–1716.
6. *Skubachevski A.L.* Nonlocal elliptic problems and mulidimensional diffusion processes // Russ. J. Math. Phys. 1995. V. 3. № 3. P. 327–360.
7. *Варфоломеев Е.М.* О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных операторов, возникающих в нелинейной оптике // Современная матем. Фундаментальные направления. 2007. Т. 21. С. 5–36.
8. *Solonukha O.V.* On nonlinear and quasiliniear elliptic functional differential equations // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S. 2016. V. 9. № 3. P. 869–893.
9. *Иванова Е.П.* Непрерывная зависимость решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений от сдвигов аргумента // Современная матем. Фундаментальные направления. 2016. Т. 59. С. 74–96.
10. *Onanov G.G., Skubachevski A.L.* Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells // Math. Model. Nat. Phenom. 2017. V. 12. № 6. P. 192–207.
11. *Skubachevski A.L.* Elliptic differential-difference operators with degeneration and the Kato square root problem // Math. Nachr. 2018. V. 291. № 17–18. P. 2660–2692.
12. *Gurevich P.L.* Elliptic problems with nonlocal boundary conditions and Feller semigroups // J. Math. Sci. (N.Y.) 2012. V. 182. № 3. P. 255–440.
13. *Skubachevski A.L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1997.
14. *Skubachevski A.L.* Nonclassical boundary value problems. I // J. Math. Sci. (N.Y.) 2008. V. 155. № 2. P. 199–334.
15. *Skubachevski A.L.* Nonclassical boundary value problems. II // J. Math. Sci. (N.Y.) 2010. V. 166. № 4. P. 377–651.
16. *Muravnik A.B.* Nonlocal problems and functional-differential equations: theoretical aspects and applications to mathematical modelling // Math. Model. Nat. Phenom. 2019. V. 14. № 6. Article № 601.
17. *Муравник А.Б.* Эллиптические задачи с нелокальным потенциалом, возникающие в моделях нелинейной оптики // Матем. заметки. 2019. Т. 105. № 5. С. 747–762.
18. *Muravnik A.B.* Half-plane differential-difference elliptic problems with general-kind nonlocal potentials // Complex Var. Elliptic Equ., Published online: 28 Dec 2020. https://doi.org/10.1080/17476933.2020.1857372
19. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши // Успехи матем. наук. 1953. Т. 8. № . С. 3–54.
20. *Муравник А.Б.* Эллиптические дифференциально-разностные уравнения с разнонаправленными сдвигами в полупространстве // Уфимск. матем. ж. 2021. Т. 13. № 3. С. 107–115.
21. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. М.: МГУ, 1984.
22. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции. Вып. 3: Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958.
23. *Муравник А.Б.* Эллиптические дифференциально-разностные уравнения в полупространстве // Матем. заметки. 2020. Т. 108. № 5. С. 764–770.
24. *Муравник А.Б.* Эллиптические дифференциально-разностные уравнения общего вида в полупространстве // Матем. заметки. 2021. Т. 110. № 1. С. 90–98.