ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 6, с. 1042–1055

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.958

ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ СИНГУЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ЯНГА–МИЛЛСА И ЯНГА–МИЛЛСА–ПРОКА[1)]

© 2022 г. Д. С. Широков[1,2]

[1] *101000 Москва, ул. Мясницкая, 20, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Россия*

[2] *127051 Москва, Большой Каретный пер., 19, Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Россия*

e-mail: dm.shirokov@gmail.com

Поступила в редакцию 15.11.2021 г.
Переработанный вариант 24.12.2021 г.
Принята к публикации 11.02.2022 г.

В работе применяется гиперболическое сингулярное разложение при исследовании уравнений Янга–Миллса с SU(2) калибровочной симметрией и уравнений Янга–Миллса–Прока в псевдоевклидовом (или евклидовом) пространстве произвольной конечной размерности и сигнатуры. Предъявлен явный вид всех постоянных решений системы уравнений Янга–Миллса–Прока в случае группы Ли SU(2). Непостоянные решения уравнений Янга–Миллса–Прока рассматриваются в виде рядов из теории возмущений. Библ. 34.

Ключевые слова: уравнения Янга–Миллса, уравнения Янга–Миллса–Прока, гиперболическое сингулярное разложение, сингулярное разложение, SU(2), постоянные решения, псевдоевклидово пространство.

DOI: 10.31857/S004446692206014X

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] была предложена новая формулировка гиперболического сингулярного разложения для произвольной вещественной (или комплексной) матрицы с использованием матриц из псевдоортогональной группы $\mathrm{O}(p,q)$ (или псевдоунитарной группы $\mathrm{U}(p,q)$ соответственно). Предыдущие версии гиперболического сингулярного разложения работали в общем случае только с использованием гиперобменных матриц (hyperexchange matrices), которые не образуют группу, см. работы [2]–[4] и обсуждение этих работ в [1]. В настоящей работе мы применяем гиперболическое сингулярное разложение в новой формулировке при исследовании уравнений Янга–Миллса с SU(2) калибровочной симметрией и уравнений Янга–Миллса–Прока в псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}^{p,q}$ произвольной размерности и сигнатуры.

Уравнения Янга–Миллса были предложены Ч. Янгом и Р. Миллсом в 1954 г. [5] как математическое обобщение уравнений Максвелла на неабелев случай. Впоследствии (1960–1970 гг.) была построена теория, согласно которой данные уравнения описывают электрослабые взаимодействия в случае группы Ли $\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{U}(1)$ и сильные взаимодействия в случае группы Ли $\mathrm{SU}(3)$. Уравнения Максвелла, описывающие электромагнитные взаимодействия, являются частным случаем уравнений Янга–Миллса для абелевой группы Ли $\mathrm{U}(1)$. В настоящей статье мы ограничимся рассмотрением случая группы Ли $\mathrm{SU}(2)$. Отметим классические работы по некоторым известным классам частных решений уравнений Янга–Миллса [6]–[11] и обзор [12].

В одной из предыдущих работ автора [13] была решена задача о предъявлении явного вида всех постоянных решений уравнений Янга–Миллса с SU(2) калибровочной симметрией с произвольным током в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ произвольной конечной размерности с помощью обычного сингулярного разложения.

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 21-71-00043), https://rscf.ru/project/21-71-00043/.

В настоящей работе решается задача о предъявлении явного вида всех постоянных решений уравнений Янга–Миллса–Прока в случае группы Ли $\mathrm{SU}(2)$ в произвольном псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}^{p,q}$ (или евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$) с помощью гиперболического сингулярного разложения, являющегося обобщением обычного сингулярного разложения. Непостоянные решения уравнений Янга–Миллса–Прока рассматриваются в виде рядов из теории возмущений, при этом в качестве нулевого приближения берутся постоянные решения.

1. УРАВНЕНИЯ ЯНГА–МИЛЛСА

Пусть p, q – целые неотрицательные числа и $n = p + q$ – натуральное число. Рассмотрим псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^{p,q}$ (или, как частный случай, евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ при $n = p$ и $q = 0$) с декартовыми координатами x^μ, $\mu = 1, \ldots, n$. Метрика пространства $\mathbb{R}^{p,q}$ задается диагональной матрицей

$$\eta = (\eta_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{q}), \quad p + q = n. \tag{1.1}$$

Частные производные обозначаем через $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$. Предполагаем, что все рассматриваемые далее функции от $x \in \mathbb{R}^{p,q}$ являются достаточно гладкими.

Пусть G есть полупростая группа Ли, а $\mathfrak{g}$ есть вещественная алгебра Ли группы Ли G. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является вещественным векторным пространством размерности N с базисом $\tau^1, \ldots, \tau^N$. Умножение элементов $\mathfrak{g}$ задается скобкой Ли $[A, B] = -[B, A]$, которая удовлетворяет тождеству Якоби. Умножение базисных элементов задается при помощи вещественных структурных констант $c_l^{rs} = -c_l^{sr}$ $(r, s, l = 1, \ldots, N)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$

$$[\tau^r, \tau^s] = c_l^{rs} \tau^l. \tag{1.2}$$

Предполагается, что элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и группы Ли G представляются квадратными матрицами соответствующего размера. Скобка Ли задается коммутатором $[A, B] = AB - BA$, где в правой части мы используем матричное умножение.

Через $\mathfrak{g}\mathrm{T}^a_b$ обозначим множество тензорных полей (псевдо)евклидова пространства $\mathbb{R}^{p,q}$ типа (a, b) и ранга $a + b$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Рассмотрим следующие уравнения в псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}^{p,q}$:

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \rho[A_\mu, A_\nu] = F_{\mu\nu}, \tag{1.3}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - \rho[A_\mu, F^{\mu\nu}] = J^\nu, \tag{1.4}$$

где $A_\mu \in \mathfrak{g}\mathrm{T}_1$, $J^\nu \in \mathfrak{g}\mathrm{T}^1$, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \in \mathfrak{g}\mathrm{T}_2$, ρ есть вещественная константа (константа связи). Эти уравнения называются *уравнениями Янга–Миллса* (системой уравнений Янга–Миллса). Обычно предполагается, что A_μ, $F_{\mu\nu}$ – неизвестные, а J^ν – известный заданный вектор со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Говорят, что уравнения (1.3), (1.4) определяют *поле Янга–Миллса* $(A_\mu, F_{\mu\nu})$, где A_μ есть *потенциал* и $F_{\mu\nu}$ есть *напряженность* поля Янга–Миллса. Вектор J^ν называется *неабелевым током* (в случае абелевой группы G вектор J^ν называется *током*).

Заметим, что уравнения Янга–Миллса (1.4) могут быть получены стандартным способом из вариационного принципа. Рассмотрим действие $\mathcal{S} = \int \mathcal{L} dx$ для лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\mathrm{tr}(F^2), \quad F^2 := F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \tag{1.5}$$

где $F_{\mu\nu}$ являются компонентами 2-формы кривизны по отношению к связности A_μ, т.е. связаны по определению уравнениями (1.3). При варьировании действия получаем уравнения (1.4) с нулевым током ($J^\nu = 0$). Ток J^ν в уравнениях (1.4) появляется при добавлении в лагранжиан (1.5) дополнительных слагаемых, связанных с другими (например, скалярными или спинорными) полями.

Компоненты кососимметрического тензорного поля $F_{\mu\nu}$, определенные уравнением (1.3), можно подставить во второе уравнение (1.4) и получить одно уравнение второго порядка для ковекторного потенциала поля Янга–Миллса

$$\partial_\mu\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \rho[A^\mu, A^\nu]\right) - \rho\left[A_\mu, \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \rho[A^\mu, A^\nu]\right] = J^\nu. \tag{1.6}$$

Посмотрим на уравнения (1.3), (1.4) с другой точки зрения. Пусть $A_\mu \in \mathfrak{g}\mathrm{T}_1$ есть произвольный ковектор со значениями в $\mathfrak{g}$, который гладко зависит от $x \in \mathbb{R}^{p,q}$. Через $F_{\mu\nu}$ обозначим выражение

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \rho[A_\mu, A_\nu] \tag{1.7}$$

и через J^ν обозначим выражение

$$J^\nu := \partial_\mu F^{\mu\nu} - \rho[A_\mu, F^{\mu\nu}].$$

Можем проверить, что

$$\partial_\nu J^\nu - \rho[A_\nu, J^\nu] = 0. \tag{1.8}$$

Это тождество называется *неабелевым законом сохранения* (в случае абелевой группы Ли G имеем обычный закон сохранения $\partial_\nu J^\nu = 0$, т.е. дивергенция вектора J^ν равна нулю). Следовательно, неабелев закон сохранения (1.8) является следствием уравнений Янга–Миллса (1.3), (1.4).

Рассмотрим тензорные поля A_μ, $F_{\mu\nu}$, J^ν, которые удовлетворяют уравнениям Янга–Миллса (1.3), (1.4). Возьмем скалярное поле со значениями в группе Ли $S = S(x) \in \mathrm{G}$ и рассмотрим преобразованные тензорные поля

$$\begin{aligned} A'_\mu &= S^{-1}A_\mu S - S^{-1}\partial_\mu S, \\ F'_{\mu\nu} &= S^{-1}F_{\mu\nu}S, \\ J'^\nu &= S^{-1}J^\nu S. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Эти тензорные поля удовлетворяют тем же самым уравнениям Янга–Миллса

$$\partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu - \rho[A'_\mu, A'_\nu] = F'_{\mu\nu},$$

$$\partial_\mu F'^{\mu\nu} - \rho[A'_\mu, F'^{\mu\nu}] = J'^\nu,$$

т.е. уравнения (1.3), (1.4) инвариантны по отношению к преобразованиям (1.9). Преобразование (1.9) называется *калибровочным преобразованием* (или *калибровочной симметрией*), а группа Ли G называется *калибровочной группой* уравнений Янга–Миллса (1.3), (1.4).

2. СЛУЧАЙ ГРУППЫ ЛИ SU(2)

Далее в настоящей работе будем рассматривать частный случай группы Ли SU(2), который важен при описании слабых взаимодействий. В предлагаемой далее теореме 1 о симметрии SU(2)-уравнений Янга–Миллса существенным образом используется двулистное накрытие ортогональной группы SO(3) спинорной группой Spin(3) $\cong$ SU(2). Таким образом, предлагаемые в данной работе методы напрямую не работают для другого, важного с физической точки зрения, случая группы Ли SU(3).

Будем рассматривать специальную унитарную группу

$$\mathrm{G} = \mathrm{SU}(2) = \{A \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C}) \mid A^\dagger A = I, \det A = 1\}, \quad \dim G = 3, \tag{2.1}$$

и соответствующую алгебру Ли антиэрмитовых матриц с нулевым следом

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2) = \{A \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C}) | A^\dagger = -A, \operatorname{tr} A = 0\}. \tag{2.2}$$

Здесь и далее единичную матрицу соответствующего размера обозначаем через I. Как известно, матрицы Паули σ^a, $a = 1, 2, 3$:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

удовлетворяют соотношениям

$$(\sigma^a)^\dagger = \sigma^a, \quad \operatorname{tr}\sigma^a = 0, \quad \{\sigma^a, \sigma^b\} = 2\delta^{ab} I, \quad [\sigma^a, \sigma^b] = 2i\epsilon_c^{ab}\sigma^c,$$

где $\epsilon_c^{ab} = \epsilon^{abc}$ есть полностью антисимметричный единичный тензор (символ Леви-Чивиты), $\epsilon^{123} = 1$. В качестве базиса алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$ можем взять

$$\tau^1 = \frac{1}{2i}\sigma^1, \quad \tau^2 = \frac{1}{2i}\sigma^2, \quad \tau^3 = \frac{1}{2i}\sigma^3. \tag{2.4}$$

Для элементов базиса имеем

$$(\tau^a)^\dagger = -\tau^a, \quad \operatorname{tr}\tau^a = 0, \quad [\tau^a, \tau^b] = \epsilon_c^{ab}\tau^c, \tag{2.5}$$

т.е. структурными константами алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$ в данном случае выступают символы Леви-Чивиты.

Запишем разложение потенциала и тока Янга–Миллса по базису алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$:

$$A^\mu = A_a^\mu \tau^a, \quad J^\mu = J_a^\mu \tau^a, \quad A_a^\mu, J_a^\mu \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Здесь и далее латинские индексы пробегают значения $a = 1, 2, 3$ (так как размерность группы Ли $\mathrm{SU}(2)$ равна 3), греческие индексы пробегают значения $\mu = 1, 2, \ldots, n$ (так как размерность псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{p,q}$ равна $p + q = n$).

Левая часть уравнений Янга–Миллса (1.6) при подстановке (2.6) приобретает вид

$$\begin{aligned} &\tau^a\partial_\mu(\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu) - \rho\partial_\mu(A_a^\mu A_b^\nu)[\tau^a, \tau^b] - \rho\eta_{\mu\alpha}A_a^\alpha(\partial^\mu A_b^\nu - \partial^\nu A_b^\mu)[\tau^a, \tau^b] + \\ &\quad + \rho^2\eta_{\mu\alpha}A_c^\alpha A_a^\mu A_b^\nu[\tau^c, [\tau^a, \tau^b]] = \\ &= \tau^a\partial_\mu(\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu) - \rho\epsilon_c^{ab}\tau^c(\partial_\mu(A_a^\mu A_b^\nu) + \eta_{\mu\alpha}A_a^\alpha(\partial^\mu A_b^\nu - \partial^\nu A_b^\mu)) + \\ &\quad + \rho^2\eta_{\mu\alpha}A_c^\alpha A_a^\mu A_b^\nu \epsilon_d^{ab}[\tau^c, \tau^d] = \\ &= \tau^a\partial_\mu(\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu) - \rho\epsilon_c^{ab}\tau^c(\partial_\mu(A_a^\mu A_b^\nu) + \eta_{\mu\alpha}A_a^\alpha(\partial^\mu A_b^\nu - \partial^\nu A_b^\mu)) + \\ &\quad + \rho^2\eta_{\mu\alpha}A_c^\alpha A_a^\mu A_b^\nu \epsilon_d^{ab}\epsilon_k^{cd}\tau^k. \end{aligned}$$

В итоге уравнения (1.6) принимают вид

$$\begin{aligned} &\partial_\mu(\partial^\mu A_k^\nu - \partial^\nu A_k^\mu) - \rho\epsilon_k^{ab}(\partial_\mu(A_a^\mu A_b^\nu) + \eta_{\mu\alpha}A_a^\alpha(\partial^\mu A_b^\nu - \partial^\nu A_b^\mu)) + \\ &\quad + \rho^2\eta_{\mu\alpha}A_c^\alpha A_a^\mu A_b^\nu \epsilon_d^{ab}\epsilon_k^{cd} = J_k^\nu. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Система (2.7) является системой $3n$ уравнений ($k = 1, 2, 3, \nu = 1, 2, \ldots, n$) для $3n$ функций A_k^ν и $3n$ функций J_k^ν. Будет удобно воспринимать систему уравнений (2.7) как систему уравнений для элементов двух матриц $A = (A_k^\mu)$ и $J = (J_k^\nu)$ размера $n \times 3$. Далее мы будем часто считать, что матрица тока J задана либо зависит от неизвестной матрицы потенциала A некоторым заданным образом (например, в случае уравнений Янга–Миллса–Прока имеем $J = -m^2 A$).

Теорема 1. *Система уравнений* (2.7) *инвариантна относительно преобразований вида*

$$A \to \hat{A} = QA, \quad J \to \hat{J} = QJ, \quad Q \in \mathrm{O}(p, q), \tag{2.8}$$

и преобразований вида

$$A \to A' = AP + \Omega, \quad J \to J' = JP, \quad P = (p_b^a) \in \mathrm{SO}(3), \tag{2.9}$$

где

$$\Omega = \Omega(P) = (\omega^{\mu}_{d}),\quad \omega^{\mu}_{d} = \frac{1}{8}\delta_{ac}\epsilon^{bk}_{d}(p^{c}_{k}\partial^{\mu}p^{a}_{b} - p^{a}_{k}\partial^{\mu}p^{c}_{b}).$$

Доказательство. Инвариантность первого типа имеет место в силу инвариантности уравнений Янга–Миллса относительно псевдоортогональных замен координат пространства $\mathbb{R}^{p,q}$. А именно, рассмотрим преобразование координат $x^{\mu} \to \hat{x}^{\mu} = q^{\mu}_{\nu}x^{\nu}$, где $Q = (q^{\mu}_{\nu}) \in \mathrm{O}(p,q)$. Величины A^{μ}, J^{μ}, входящие в уравнения (1.6), являются тензорными, т.е. преобразуются по правилу

$$A^{\mu} \to \hat{A}^{\nu} = q^{\nu}_{\mu}A^{\mu} = q^{\nu}_{\mu}A^{\mu}_{a}\tau^{a} = \hat{A}^{\nu}_{a}\tau^{a},\quad A^{\nu}_{a} \to \hat{A}^{\nu}_{a} = q^{\nu}_{\mu}A^{\mu}_{a},$$

$$J^{\mu} \to \hat{J}^{\nu} = q^{\nu}_{\mu}J^{\mu} = q^{\nu}_{\mu}J^{\mu}_{a}\tau^{a} = \hat{J}^{\nu}_{a}\tau^{a},\quad J^{\nu}_{a} \to \hat{J}^{\nu}_{a} = q^{\nu}_{\mu}J^{\mu}_{a}.$$

Получаем инвариантность уравнений (2.7) при преобразовании (2.8).

Система уравнений Янга–Миллса инвариантна относительно калибровочных преобразований (1.9). Интересующие нас величины преобразуются по правилам

$$A'_{\mu} = S^{-1}A_{\mu}S - S^{-1}\partial_{\mu}S,\quad J'^{\nu} = S^{-1}J^{\nu}S.$$

По теореме о двулистном накрытии группы $\mathrm{SO}(3)$ спинорной группой $\mathrm{Spin}(3) \cong \mathrm{SU}(2)$ имеем

$$S^{-1}\tau^{a}S = p^{a}_{b}\tau^{b},\quad S \in \mathrm{SU}(2),\quad P = (p^{a}_{b}) \in \mathrm{SO}(3). \tag{2.10}$$

Для каждой матрицы $P \in \mathrm{SO}(3)$ существуют ровно две матрицы $\pm S \in \mathrm{SU}(2)$, связанные формулой (2.10) (см., например, [14]–[16]).

Для преобразованного тока получаем

$$J'^{\mu} = S^{-1}J^{\mu}_{a}\tau^{a}S = J^{\mu}_{a}S^{-1}\tau^{a}S = J^{\mu}_{a}p^{a}_{b}\tau^{b} = J'^{\mu}_{b}\tau^{b},\quad J'^{\mu}_{b} = J^{\mu}_{a}p^{a}_{b}.$$

Для потенциала преобразование содержит также слагаемое со спиновой связностью $C_{\mu} = -S^{-1}\partial_{\mu}S$. Можем воспользоваться выражением для этой величины из работ [17], [18]

$$C_{\mu} = -S^{-1}\partial_{\mu}S = \frac{1}{4}(\partial_{\mu}h^{a})h_{a},\quad h^{a} := S^{-1}\tau^{a}S = p^{a}_{b}\tau^{b}$$

и получить

$$C_{\mu} = -S^{-1}\partial_{\mu}S = \frac{1}{4}\partial_{\mu}(p^{a}_{b}\tau^{b})\delta_{ac}p^{c}_{k}\tau^{k} = \frac{1}{8}\delta_{ac}\epsilon^{bk}_{d}(p^{c}_{k}\partial_{\mu}p^{a}_{b} - p^{a}_{k}\partial_{\mu}p^{c}_{b})\tau^{d} = \omega_{\mu d}\tau^{d},$$

где мы воспользовались тем, что $P^{\mathrm{T}}P = I$, т.е.

$$p^{a}_{b}p^{c}_{k}\delta_{ac} = \delta_{bk},\quad (\partial_{\mu}p^{a}_{b})p^{c}_{k}\delta_{ac} + p^{a}_{b}(\partial_{\mu}p^{c}_{k})\delta_{ac} = 0.$$

Получаем инвариантность уравнений (2.7) по отношению к преобразованию (2.9). Теорема доказана.

Если совместить два преобразования из предыдущей теоремы, то получим инвариантность по отношению к преобразованию

$$A \to QAP + \Omega,\quad J \to QJP,\quad Q \in \mathrm{O}(p,q),\quad P \in \mathrm{SO}(3),\quad \Omega = \Omega(P). \tag{2.11}$$

Умножение матрицы слева на псевдоортогональную матрицу и справа на ортогональную матрицу позволяет преобразовать ее к каноническому виду с большим количеством нулей. Для этого воспользуемся новой формулировкой гиперболического сингулярного разложения, предложенной в [1].

3. ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ СИНГУЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Приведем формулировку гиперболического сингулярного разложения для произвольной вещественной матрицы, предложенную в [1]. Данная теорема обобщает результаты работ [2]–[4], где вместо псевдоортогональных матриц использовались гиперобменные матрицы, которые не образуют группу. Через O здесь и далее обозначаем нулевые блоки матриц соответствующих размеров.

Теорема 2 (гиперболическое сингулярное разложение, см. [1]). *Зафиксируем матрицу* (1.1). *Для произвольной вещественной матрицы* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times N}(\mathbb{R})$ *существуют матрицы* $R \in \mathrm{O}(N)$ *и* $L \in \mathrm{O}(p,q)$ *такие, что*

$$L^{\mathrm{T}}AR = \Sigma^A, \quad \Sigma^A = \left(\begin{array}{cccc} X_x & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & I_d & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & Y_y & \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & I_d & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{array}\right)\begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}X\\O\\O\end{array}}\right\} p \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}O\\O\\O\end{array}}\right\} q \end{array} \in \mathrm{Mat}_{n\times N}(\mathbb{R}), \tag{3.1}$$

где первый блок матрицы Σ^A *имеет* p *строк, а второй блок имеет* q *строк,* X_x *и* Y_y *есть диагональные матрицы соответствующих размеров* x *и* y *со всеми положительными, однозначно определенными диагональными элементами* (*с точностью до перестановки*), I_d *есть единичная матрица размера* d.

Более того, выбирая R, *можно менять местами столбцы матрицы* Σ^A. *Выбирая* L, *можно менять строки в каждом из блоков, но не между блоками. Таким образом, мы можем всегда разместить диагональные элементы матриц* X_x *и* Y_y *в порядке убывания.*

Имеем

$$d = \mathrm{rank}(A) - \mathrm{rank}(A^{\mathrm{T}}\eta A), \quad x + y = \mathrm{rank}(A^{\mathrm{T}}\eta A),$$

x *есть число положительных собственных значений матрицы* $A^{\mathrm{T}}\eta A$, y *есть число отрицательных собственных значений матрицы* $A^{\mathrm{T}}\eta A$.

Будем называть матрицу Σ^A (3.1) *каноническим видом* матрицы A, а элементы диагональных блоков X и Y *гиперболическими сингулярными значениями*. Далее считаем, что элементы каждого из этих блоков упорядочены в порядке убывания.

В [1] представлен также алгоритм вычисления матриц Σ^A, L и R. Гиперболические сингулярные значения есть квадратные корни из модулей собственных значений матрицы $A^{\mathrm{T}}\eta A$. Столбцы матрицы R есть собственные векторы матрицы $A^{\mathrm{T}}\eta A$. Столбцы матрицы L есть собственные векторы матрицы ηAA^{T} (в случае $d = 0$) и собственные и присоединенные векторы матрицы ηAA^{T} (в случае $d \neq 0$). Матрицы L и R определяются неоднозначно.

Отметим, что стандартное сингулярное разложение является частным случаем гиперболического сингулярного разложения. В случае $n = p$ и $q = 0$ параметр d всегда равен нулю $d = \mathrm{rank}(A) - \mathrm{rank}(A^{\mathrm{T}}A) = 0$. В данном частном случае получаем классическую теорему о сингулярном разложении. Сингулярное разложение было впервые открыто независимо Э. Бельтрами [19] в 1873 г. и К. Жорданом [20], [21] в 1874 г. Далее приведем современную формулировку этой теоремы, которую можно найти, например, в [22], [23].

Теорема 3 (сингулярное разложение). *Для произвольной вещественной матрицы* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times N}(\mathbb{R})$ *существуют такие ортогональные матрицы* $Q \in \mathrm{O}(n)$ *и* $P \in \mathrm{O}(N)$, *что*

$$L^{\mathrm{T}}AR = D,$$

где

$$D = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_s) \in \mathrm{Mat}_{n\times N}(\mathbb{R}), \quad s = \min(n, N), \quad \mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_s \geq 0.$$

Числа $\mu_1, \ldots, \mu_s$ называются *сингулярными значениями*, они являются квадратными корнями из собственных значений матрицы $A^{\mathrm{T}}A$. Столбцы матрицы R называются *правыми сингулярными векторами* и являются собственными векторами для матрицы $A^{\mathrm{T}}A$, а столбцы матрицы L называются *левыми сингулярными векторами* и являются собственными векторами для матрицы AA^{T}.

В общем случае, рассматривая систему уравнений Янга–Миллса (2.7) и выбирая нужным образом матрицы $Q \in \mathrm{O}(p,q)$ и $P \in \mathrm{SO}(3)$ в преобразовании (2.11), можно локально (в окрестности каждой точки $x \in \mathbb{R}^{p,q}$) преобразовать матрицу тока J к каноническому виду из теоремы 2 (в случае евклидова пространства – из теоремы 3). В теоремах 2 и 3 берем в качестве матриц R и L матрицы $P \in \mathrm{SO}(3)$ и $Q^{\mathrm{T}} \in \mathrm{O}(p,q)$ из преобразования (2.11) соответственно. Заметим, что мы всегда можем выбрать матрицу R из специальной ортогональной группы $\mathrm{SO}(3)$. Если матрица R из теорем 2 и 3 имеет определитель, равный -1, то можно поменять знак у всех столбцов матриц L и R одновременно, и определитель станет равным $+1$. Матрица A при этом будет не обязательно канонического вида, так как преобразование (2.11) содержит матрицу Ω, зависящую от матрицы P.

Обсудим также частный случай системы уравнений Янга–Миллса (1.6) для постоянных (не зависящих от $x \in \mathbb{R}^{p,q}$) решений. В данном случае система (1.6) приобретает вид

$$[A_\mu,[A^\mu, A^\nu]] = \frac{1}{\rho^2} J^\nu. \tag{3.2}$$

Уравнения (2.7) приобретают вид

$$\rho^2 \eta_{\mu\alpha} A_c^\alpha A_a^\mu A_b^\nu \epsilon_d^{ab} \varepsilon_k^{cd} = J_k^\nu. \tag{3.3}$$

Рассмотрим (глобальные) преобразования, аналогичные калибровочным преобразованиям (1.9), но с матрицей $S \in \mathrm{SU}(2)$, не зависящей от $x \in \mathbb{R}^{p,q}$:

$$A'_\mu = S^{-1} A_\mu S, \quad F'_{\mu\nu} = S^{-1} F_{\mu\nu} S, \quad J'^\nu = S^{-1} J^\nu S. \tag{3.4}$$

В преобразованиях (2.9) и (2.11) получаем $\Omega = 0$, они становятся глобальными симметриями. Пользуясь глобальной симметрией

$$A \to QAP, \quad J \to QJP, \quad Q \in \mathrm{O}(p,q), \quad P \in \mathrm{SO}(3), \tag{3.5}$$

можем привести матрицы A и J к каноническому виду одновременно. Это доказывается в работе [13], там же дано общее решение системы уравнений Янга–Миллса для постоянных решений (3.3) в случае евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и произвольного тока J с помощью обычного сингулярного разложения. В случае псевдоевклидова пространства аналогичную задачу можно решить, используя гиперболическое сингулярное разложение, это будет сделано в одной из следующих работ.

Отметим, что случай нулевого тока для постоянных решений уравнений Янга–Миллса рассмотрен в работах [24], [25]. Решения в виде плоских волн уравнений SU(2) Янга–Миллса в произвольном псевдоевклидовом пространстве представлены в работе [26], данные решения сводятся к обсуждаемой задаче о постоянных решениях. Некоторые частные классы решений уравнений Янга–Миллса в формализме алгебр Клиффорда и алгебр Атьи–Келера, связанные с постоянными решениями, представлены в [17], [27], [28].

В данной работе найдем все постоянные решения системы уравнений SU(2) Янга–Миллса–Прока, которую можно интерпретировать как систему уравнений Янга–Миллса с током, зависящим от потенциала.

4. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ SU(2) ЯНГА–МИЛЛСА–ПРОКА

Уравнения Прока были предложены в работе [29] в 1936 г. как обобщение уравнений Максвелла. Данные уравнения отличаются от уравнений Максвелла наличием слагаемого с квадратом массы. Предполагается, что уравнения Прока описывают массивные частицы со спином 1. Уравнения Янга–Миллса–Прока являются естественным аналогом уравнений Прока в неабелевом случае, т.е. являются обобщением уравнений Янга–Миллса и уравнений Прока одновременно, и рассматриваются, например, в работах [30], [31].

Система уравнений Янга–Миллса–Прока в псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}^{p,q}$ (или, в частном случае, евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$) имеет вид

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \rho[A_\mu, A_\nu] = F_{\mu\nu}, \tag{4.1}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - \rho[A_\mu, F^{\mu\nu}] + m^2 A^\nu = 0. \tag{4.2}$$

Данные уравнения отличаются от уравнений Янга–Миллса (1.3), (1.4) наличием слагаемого m^2A^ν с массой $m \in \mathbb{R}$. Имеем $A_\mu \in \mathfrak{g}\mathrm{T}_1$, $J^\nu \in \mathfrak{g}\mathrm{T}^1$, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \in \mathfrak{g}\mathrm{T}_2$, $\rho \in \mathbb{R}$. Если масса равна нулю $m = 0$, то уравнения (4.1), (4.2) совпадают с уравнениями Янга–Миллса (1.3), (1.4) с нулевым током $J^\nu = 0$. Будем далее рассматривать случай $m \neq 0$.

Лагранжиан поля Янга–Миллса–Прока имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{\mu\nu a} + \frac{1}{2}m^2A_a^\nu A_{\nu a}, \tag{4.3}$$

где компоненты $F^{\mu\nu} = F_a^{\mu\nu}\tau^a$ имеют вид (4.1). При варьировании действия $\mathcal{S} = \int \mathcal{L}dx$ получаем уравнения (4.2).

Для потенциала A^μ из уравнений (4.1), (4.2) получаем условие обобщенной калибровки

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \tag{4.4}$$

Заметим, что данное условие является аналогом неабелева закона сохранения (1.8) для уравнений Янга–Миллса (1.3), (1.4). Уравнения Янга–Миллса–Прока (4.1), (4.2) можно интерпретировать как уравнения Янга–Миллса с током $J^\nu = -m^2A^\nu$, зависящим от потенциала. Подставляя $J^\nu = -m^2A^\nu$ в (1.8), получаем (4.4).

Подставляя (4.1) в (4.2), получаем

$$\partial_\mu\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \rho[A^\mu, A^\nu]\right) - \rho\left[A_\mu, \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \rho[A^\mu, A^\nu]\right] + m^2A^\nu = 0, \tag{4.5}$$

что, с учетом (4.4), можно переписать в виде

$$\partial_\mu\partial^\mu A^\nu - 2\rho[A^\mu, \partial_\mu A^\nu] + \rho[A_\mu, \partial^\nu A^\mu] + \rho^2[A_\mu, [A^\mu, A^\nu]] + m^2A^\nu = 0. \tag{4.6}$$

Заметим, что система уравнений (4.1), (4.2) не является калибровочно инвариантной относительно преобразований (1.9) (так же как не являются калибровочно инвариантными уравнения Прока [29], являющиеся обобщением уравнений Максвелла). Однако система уравнений Янга–Миллса–Прока (4.1), (4.2) инвариантна относительно глобального (не зависящего от $x \in \mathbb{R}^{p,q}$) преобразования

$$A_\mu \to A'_\mu = S^{-1}A_\mu S, \quad F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} = S^{-1}F_{\mu\nu}S, \quad S \in \mathrm{G}. \tag{4.7}$$

При отыскании постоянных решений уравнений Янга–Миллса–Прока, получаем систему уравнений

$$[A_\mu, [A^\mu, A^\nu]] = -\lambda A^\nu, \quad \lambda = \frac{m^2}{\rho^2} > 0, \tag{4.8}$$

которую можно интерпретировать как систему уравнений Янга–Миллса для постоянных решений с током $J^\nu = -\lambda A^\nu$, зависящим от потенциала A^ν.

Далее будем рассматривать случай группы Ли $\mathrm{G} = \mathrm{SU}(2)$ и соответствующей (вещественной) алгеброй Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$. Фиксируя базис алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$ (2.4), перепишем систему уравнений (4.6) в виде

$$\partial_\mu\partial^\mu A_k^\nu - 2\rho\epsilon_k^{ab}A_a^\mu\partial_\mu A_b^\nu + \rho\epsilon_k^{ab}\eta_{\mu\alpha}A_a^\alpha\partial^\nu A_b^\mu + \rho^2\eta_{\mu\alpha}A_c^\alpha A_a^\mu A_b^\nu\epsilon_d^{ab}\epsilon_k^{cd} + m^2A_k^\nu = 0. \tag{4.9}$$

Система уравнений для постоянных решений (4.8) примет вид

$$\eta_{\mu\alpha}A_c^\alpha A_a^\mu A_b^\nu\epsilon_d^{ab}\epsilon_k^{cd} = -\lambda A_k^\nu, \quad \lambda = \frac{m^2}{\rho^2} > 0. \tag{4.10}$$

Система уравнений (4.10) инвариантна относительно преобразования

$$A \to QAP, \quad Q \in \mathrm{O}(p,q), \quad P \in \mathrm{SO}(3), \tag{4.11}$$

где ортогональная матрица $P = (p_b^a) \in \mathrm{SO}(3)$ связана с матрицей $S \in \mathrm{SU}(2)$ из глобального преобразования (4.7) как двулистное накрытие

$$S^{-1}\tau^a S = p_b^a \tau^b.$$

Матрица $Q = (q_\nu^\mu) \in \mathrm{O}(p,q)$ соответствует замене координат $x^\mu \to q_\nu^\mu x^\nu$ пространства $\mathbb{R}^{p,q}$ (аналогично тому, как это было для уравнений Янга–Милса в теореме 1).

После нахождения всех решений системы (4.10) можно вычислить компоненты напряженности

$$F^{\mu\nu} = -\rho[A^\mu, A^\nu] = -\rho[A_a^\mu \tau^a, A_b^\nu \tau^b] = -\rho A_a^\mu A_b^\nu \epsilon_c^{ab} \tau^c = F_c^{\mu\nu}\tau^c \tag{4.12}$$

и инвариант F^2:

$$F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{\rho^2}{2}\sum_{\mu<\nu}\eta^{\mu\nu}\eta^{\nu\nu}(F_c^{\mu\nu})^2 I_2. \tag{4.13}$$

Сформулируем и докажем теорему о всех решениях системы (4.10), т.е. всех постоянных решениях системы уравнений Янга–Миллса–Прока в случае группы Ли $\mathrm{SU}(2)$.

Теорема 4. *Любое решение* $A = (A_a^\mu)$ *системы уравнений Янга–Миллса–Прока* (4.10) *в псевдоевклидовом пространстве* $\mathbb{R}^{p,q}$ (*или евклидовом пространстве* $\mathbb{R}^n$) *может быть приведено за счет выбора матриц* $Q \in \mathrm{O}(p,q)$ *и* $P \in \mathrm{SO}(3)$ *в симметрии* (4.11) *к решению одного из следующих трех видов*:

1) *в случаях* $\mathbb{R}^{p,q}$, $p \ge 3$, $q \ge 0$:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a := \sqrt{\frac{\lambda}{2}}, \tag{4.14}$$

т.е.

$$A_a^\mu = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\lambda}{2}} & \textit{при} \quad \mu = a = 1, 2, 3; \\ 0 & \textit{в остальных случаях} \end{cases}$$

со следующими ненулевыми компонентами напряженности:

$$F^{12} = -F^{12} = -\frac{\rho\lambda}{2}\tau^3, \quad F^{23} = -F^{32} = -\frac{\rho\lambda}{2}\tau^1, \quad F^{31} = -F^{13} = -\frac{\rho\lambda}{2}\tau^2, \tag{4.15}$$

и инвариантом

$$F^2 = -\frac{3\rho^2\lambda^2}{8} I_2 \ne 0; \tag{4.16}$$

2) *в случаях* $\mathbb{R}^{p,q}$, $p \ge 2$, $q \ge 0$:

$$A = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b := \sqrt{\lambda}, \tag{4.17}$$

т.е.

$$A_a^\mu = \begin{cases} \sqrt{\lambda} & \text{\textit{при}} \quad \mu = a = 1, 2; \\ 0 & \text{\textit{в остальных случаях}} \end{cases}$$

со следующими ненулевыми компонентами напряженности:

$$F^{12} = -F^{21} = -\rho\lambda\tau^3, \tag{4.18}$$

и инвариантом

$$F^2 = -\frac{\rho^2\lambda^2}{2} I_2 \neq 0; \tag{4.19}$$

3) *в случаях* $\mathbb{R}^{p,q}$, $p \geq 0$, $q \geq 0$:

$$A = 0, \quad F = 0, \quad F^2 = 0 \quad \forall\lambda > 0. \tag{4.20}$$

Доказательство. Пользуемся инвариантностью уравнений (4.10) относительно преобразований (4.11) и гиперболическим сингулярным разложением (теорема 2). Заметим, что мы всегда можем выбрать матрицу P из специальной ортогональной группы $\mathrm{SO}(3)$. Если эта матрица имеет определитель, равный -1, то можем поменять знак у всех столбцов матриц P и Q одновременно, и определитель станет равным $+1$.

Пусть элементы матрицы A удовлетворяют системе уравнений (4.10) в пседоевклидовом пространстве $\mathbb{R}^{p,q}$ (или евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$). Тогда существуют матрицы $P \in \mathrm{SO}(3)$ и $Q \in \mathrm{O}(p,q)$ (или $Q \in \mathrm{O}(n)$ соответственно) такие, что матрица QAP имеет канонический вид

$$\left(\begin{array}{cccc} X_x & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & I_d & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & Y_y & \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & I_d & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} X \\ O \\ O \end{array}}\right\} p \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c} O \\ O \\ O \end{array}}\right\} q \end{array}.$$

Система (4.10) приобретает новый вид с неизвестными – гиперболическими сингулярными значениями матрицы A (элементами диагональных блоков X и Y). Далее требуется рассмотреть различные случаи канонического вида матрицы A в зависимости от значений параметров x, y и d и решить соответствующие системы уравнений. Элементы каждого из диагональных блоков X и Y считаем положительными и упорядоченными в порядке убывания. Всего имеется 20 различных случаев для значений параметров (d, x, y) матрицы A:

$$(0, 3, 0), \quad (0, 0, 3), \quad (0, 2, 1), \quad (0, 1, 2), \quad (0, 2, 0), \quad (0, 0, 2), \quad (0, 1, 1),$$
$$(0, 1, 0), \quad (0, 0, 1), \quad (0, 0, 0), \quad (1, 2, 0), \quad (1, 0, 2), \quad (1, 1, 1), \quad (1, 1, 0),$$
$$(1, 0, 1), \quad (1, 0, 0), \quad (2, 1, 0), \quad (2, 0, 1), \quad (2, 0, 0), \quad (3, 0, 0).$$

В первом случае ($d = 0$, $x = 3$, $y = 0$) в системе уравнений (4.10) остаются только диагональные ненулевые слагаемые, а значит, $\mu = \alpha = a = c$, $\nu = b = k$ и произведение двух символов Леви-Чивиты дает -1. Получаем следующую систему уравнений, где положительные элементы диагонального блока X, упорядоченные в порядке убывания, обозначены через a_1, a_2 и a_3 соответственно:

$$a_1(a_2^2 + a_3^2) = \lambda a_1, \quad a_2(a_1^2 + a_3^2) = \lambda a_2, \quad a_3(a_1^2 + a_2^2) = \lambda a_3, \quad a_1, a_2, a_3, \lambda > 0. \tag{4.21}$$

Данная система имеет только решение

$$a_1 = a_2 = a_3 = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}. \tag{4.22}$$

Во втором, третьем и четвертом случаях получаем следующие системы соответственно, каждая из которых не имеет решений:

$$-a_1(a_2^2+a_3^2)=\lambda a_1,\quad -a_2(a_1^2+a_3^2)=\lambda a_2,\quad -a_3(a_1^2+a_2^2)=\lambda a_3,\quad a_1,a_2,a_3,\lambda>0;$$

$$a_1(a_2^2-a_3^2)=\lambda a_1,\quad a_2(a_1^2-a_3^2)=\lambda a_2,\quad a_3(a_1^2+a_2^2)=\lambda a_3,\quad a_1,a_2,a_3,\lambda>0;$$

$$-a_1(a_2^2+a_3^2)=\lambda a_1,\quad a_2(a_1^2-a_3^2)=\lambda a_2,\quad a_3(a_1^2-a_2^2)=\lambda a_3,\quad a_1,a_2,a_3,\lambda>0.$$

В пятом случае ($d=0$, $x=2$, $y=0$) получаем систему для двух диагональных элементов a_1, a_2 блока X:

$$a_1a_2^2=\lambda a_1,\quad a_2a_1^2=\lambda a_2,\quad a_1,a_2,\lambda>0, \tag{4.23}$$

с общим решением

$$a_1=a_2=\sqrt{\lambda}. \tag{4.24}$$

В шестом и седьмом случае имеем следующие системы соответственно, каждая из которых не имеет решений:

$$-a_1a_2^2=\lambda a_1,\quad -a_2a_1^2=\lambda a_2,\quad a_1,a_2,\lambda>0;$$

$$a_1a_2^2=\lambda a_1,\quad -a_2a_1^2=\lambda a_2,\quad a_1,a_2,\lambda>0.$$

В восьмом и девятом случае имеем следующую систему на единственный ненулевой элемент a_1 матрицы A, не имеющую решений:

$$0=\lambda a_1,\quad a_1,\lambda>0. \tag{4.25}$$

В десятом случае $d=x=y=0$ имеем тривиальное решение $A=0$ при любом $\lambda>0$.

В случаях 11—13 получаем соответственно системы

$$a_1a_2^2=\lambda a_1,\quad a_2a_1^2=\lambda a_2,\quad a_1^2+a_2^2=\lambda,\quad a_1,a_2,\lambda>0;$$

$$-a_1a_2^2=\lambda a_1,\quad -a_2a_1^2=\lambda a_2,\quad -(a_1^2+a_2^2)=\lambda,\quad a_1,a_2,\lambda>0;$$

$$-a_1a_2^2=\lambda a_1,\quad a_2a_1^2=\lambda a_2,\quad a_1^2-a_2^2=\lambda,\quad a_1,a_2,\lambda>0,$$

не имеющие решений. В оставшихся случаях 14—20 также получаются противоречивые системы.

Для полученных трех типов решений вычисляем компоненты напряженности, используя (4.12), и инвариант F^2, используя (4.13). Теорема доказана.

5. НЕПОСТОЯННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ SU(2) ЯНГА–МИЛЛСА–ПРОКА В ВИДЕ РЯДА ИЗ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

В теореме 4 мы предъявили явный вид всех постоянных решений уравнений SU(2) Янга–Миллса–Прока (4.1), (4.2) в произвольном псевдоевклидовом (или евклидовом) пространстве $\mathbb{R}^{p,q}$. Полученные постоянные решения уравнений позволяют построить непостоянные решения уравнений Янга–Миллса–Прока в виде ряда из теории возмущений. А именно, разложим решение уравнений (4.1), (4.2) по малому параметру $\varepsilon \ll 1$:

$$A^\mu=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k \overset{k}{A}{}^\mu=\overset{0}{A}{}^\mu+\varepsilon\overset{1}{A}{}^\mu+\varepsilon^2\overset{2}{A}{}^\mu+\cdots=(\overset{0}{A}{}^\mu_a+\varepsilon\overset{1}{A}{}^\mu_a+\varepsilon^2\overset{2}{A}{}^\mu_a+\cdots)\tau^a, \tag{5.1}$$

где в качестве нулевого приближения $\overset{0}{A}{}^\mu$ берем постоянные (не зависяшие от $x\in\mathbb{R}^{p,q}$) решения уравнений Янга–Миллса–Прока (4.1), (4.2). Подставляя (5.1) в уравнения (4.6), получаем уравнение вида

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\overset{k}{Q}{}^\nu=0,$$

где $\overset{k}{Q}{}^{\nu}$ – некоторые дифференциальные выражения, зависящие от $\overset{0}{A}{}^{\mu}, \ldots, \overset{k}{A}{}^{\mu}$ для каждого $k = 0, 1, \ldots$. Так как $\overset{0}{A}{}^{\mu}$ – постоянные решения уравнений (4.6), то легко проверить, что

$$\overset{0}{Q}{}^{\nu} = [\overset{0}{A}_{\mu}, [\overset{0}{A}{}^{\mu}, \overset{0}{A}{}^{\nu}]] + \lambda \overset{0}{A}{}^{\nu} = 0.$$

Далее получим систему линейных уравнений в частных производных $\overset{1}{Q}{}^{\nu} = 0$ с постоянными коэффициентами (зависящими от $\overset{0}{A}{}^{\mu}$) для отыскания $\overset{1}{A}{}^{\mu}$. Найдя решения этой системы, можно подставить их $\overset{1}{A}{}^{\mu}$ и решения $\overset{0}{A}{}^{\mu}$ в систему $\overset{2}{Q}{}^{\nu} = 0$. Получим систему линейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами (зависящими от $x \in \mathbb{R}^{p,q}$) для отыскания $\overset{2}{A}{}^{\mu}$. Далее подставим решения в $\overset{3}{Q}{}^{\nu} = 0$ и так далее. Продолжая процесс, мы находим $\overset{k}{A}{}^{\mu}$ для всех $k = 0, 1, \ldots$ и таким образом, находим непостоянные решения уравнений Янга–Миллса–Прока в виде ряда (5.1).

Такой алгоритм нахождения непостоянных решений сводит задачу о решении системы нелинейных (кубических) уравнений Янга–Миллса–Прока к решению систем линейных уравнений в частных производных.

Обсудим более подробно систему для первого приближения $\overset{1}{Q}{}^{\mu} = 0$. Чтобы получить явный вид этой системы, положим $A^{\mu} = \overset{0}{A}{}^{\mu} + \varepsilon \overset{1}{A}{}^{\mu}(x) = (\overset{0}{A}{}^{\mu}_{a} + \varepsilon \overset{1}{A}{}^{\mu}_{a}(x))\tau^{a}$, причем $\varepsilon^2 = 0$. Можем так подобрать матрицы $P \in \mathrm{SO}(3)$ и $Q \in \mathrm{O}(p,q)$ в симметрии (4.11), что матрица, составленная из $\overset{0}{A}{}^{\mu}_{a}$, является диагональной (см. теорему 4). Получаем систему из $3n$ линейных уравнений в частных производных:

$$\begin{gathered}\partial_{\mu}\partial^{\mu}u^{\nu}_{k} - 2\rho\epsilon^{ab}_{k}h^{\mu}_{a}\partial_{\mu}u^{\nu}_{b} + \rho\epsilon^{ab}_{k}\eta_{\mu\alpha}h^{\alpha}_{a}\partial^{\nu}u^{\mu}_{b} + \\ + \rho^2\eta_{\mu\alpha}\epsilon^{ab}_{d}\epsilon^{cd}_{k}(h^{\alpha}_{c}h^{\mu}_{a}u^{\nu}_{b} + h^{\alpha}_{c}u^{\mu}_{a}h^{\nu}_{b} + u^{\alpha}_{c}h^{\mu}_{a}h^{\nu}_{b}) + m^2u^{\nu}_{k} = 0,\end{gathered} \tag{5.2}$$

для неизвестных функций $u^{\mu}_{a} := \overset{1}{A}{}^{\mu}_{a}(x)$ с известными постоянными коэффициентами $h^{\mu}_{a} := \overset{0}{A}{}^{\mu}_{a}$, зависящими от параметра $\lambda = \dfrac{m^2}{\rho^2}$. Данные коэффициенты h^{μ}_{a} есть элементы одной из диагональных матриц (4.14), (4.17) или полностью нулевой матрицы (4.20) в зависимости от типа постоянных решений.

В случае нулевой матрицы имеем $h^{\mu}_{a} = 0$ и получаем следующую систему для первого приближения

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}u^{\nu}_{k} + m^2u^{\nu}_{k} = 0. \tag{5.3}$$

Заметим, что уравнения (5.3) являются уравнениями Клейна–Гордона–Фока для каждой из компонент u^{ν}_{k}.

В случае решения (4.14) можем подставить в систему (5.2) выражения

$$h^{\mu}_{a} = \begin{cases}\sqrt{\dfrac{\lambda}{2}} & \text{при} \quad \mu = a = 1, 2, 3;\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

В случае решения (4.17) можем подставить в систему (5.2) выражения

$$h^{\mu}_{a} = \begin{cases}\sqrt{\lambda} & \text{при} \quad \mu = a = 1, 2;\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Получающиеся системы уравнений с неизвестными функциями u^{μ}_{a} можно исследовать с помощью известных численных методов и методов теории линейных уравнений в частных производных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе показано, как методы вычислительной математики (сингулярное разложение и гиперболическое сингулярное разложение) могут быть полезны при исследовании уравнений Янга–Миллса и уравнений Янга–Миллса–Прока в случае группы Ли SU(2), важном при описании электрослабых взаимодействий. Предъявлены классификация и явный вид всех постоянных решений системы уравнений Янга–Миллса–Прока в случае группы Ли SU(2). Непостоянные решения уравнений Янга–Миллса–Прока рассматриваются в виде рядов из теории возмущений. Представляется интересным дальнейшее изучение получившихся линейных систем уравнений для первого приближения. Результаты могут иметь применение при описании физического вакуума [32]–[34].

Заметим, что методы, рассматриваемые в настоящей работе, напрямую не переносятся на случай группы Ли SU(3), важный для описания сильных взаимодействий, так как в работе существенным образом используется двулистное накрытие ортогональной группы SO(3) спинорной группой SU(2). Перенос методов на случай группы Ли SU(3) представляется интересным вопросом для дальнейших исследований.

Автор благодарен организаторам международной конференции “Математическая физика, динамические системы и бесконечномерный анализ 2021”, г. Долгопрудный, и участникам этой конференции за полезные обсуждения.

Автор признателен Н.Г. Марчуку за полезные обсуждения. Автор благодарен анонимным рецензентам за полезные замечания и комментарии по улучшению статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shirokov D.S.* A note on the hyperbolic singular value decomposition without hyperexchange matrices // J. Comp. Appl. Math. 2021. V. 391. № 113450.
2. *Bojanczyk A.W., Onn R., Steinhardt A.O.* Existence of the hyperbolic singular value decomposition // Linear Algebra Appl. 1993. V. 185. P. 21–30.
3. *Levy B.C.* A note on the hyperbolic singular value decomposition // Linear Algebra Appl. 1998. V. 277. P. 135–142.
4. *Zha H.* A note on the existence of the hyperbolic singular value decomposition // Linear Algebra Appl. 1996. V. 240. P. 199–205.
5. *Yang C.N., Mills R.L.* Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance // Phys. Rev. 1954. V. 96. P. 191–195.
6. *Wu T.T., Yang C.N.* Some Solutions of the Classical Isotopic Gauge Field Equations // in Properties of Matter Under Unusual Conditions, edited by H. Mark and S. Fernbach, Interscience New York. 1968.
7. *’t Hooft G.* Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theories // Nucl. Phys. B. 1974. V. 79. P. 276–284.
8. *Belavin A.A., Polyakov A.M., Schwartz A.S., Tyupkin Yu.S.* Pseudoparticle solutions of the Yang–Mills equations // Phys. Lett. B. 1975. V. 59. P. 85.
9. *de Alfaro V., Fubini S., Furlan G.* A new classical solution of the Yang–Mills field equations // Phys. Lett. B. 1976. V. 65. P. 163.
10. *Witten E.* Some Exact Multipseudoparticle Solutions of Classical Yang–Mills Theory // Phys. Rev. Lett. 1977. V. 38. P. 121.
11. *Atiyah M., Drinfeld V., Hitchin N., Manin Yu.* Construction of instantons // Phys. Lett. A. 1978. V. 65. P. 185–187.
12. *Actor A.* Classical solutions of SU(2) Yang–Mills theories // Rev. Mod. Phys. 1979. V. 51. P. 461–525.
13. *Shirokov D.S.* On constant solutions of SU(2) Yang–Mills equations with arbitrary current in Euclidean space $\mathbb{R}^n$ // J. Nonlinear Math. Phys. 2020. V. 27 № 2. P. 199–218.
14. *Shirokov D.S.* On some relations between spinor and orthogonal groups // p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl. 2011. V. 3. № 3. P. 212–218.
15. *Широков Д.С.* Теорема о норме элементов спинорных групп // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. Т. 1. № 22. С. 165–171.
16. *Широков Д.С.* Использование обобщенной теоремы Паули для нечетных элементов алгебры Клиффорда для анализа связей между спинорными и ортогональными группами произвольных размерностей // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. Т. 1. № 30. С. 279–287.
17. *Shirokov D.S.* Covariantly constant solutions of the Yang–Mills equations // Adv. Appl. Clifford Alg. 2018. V. 28. № 53.
18. *Marchuk N.G., Shirokov D.S.* Local Generalization of Pauli‘s Theorem // Azerb. J. Math. 2020. V. 10. № 1. P. 38–56.

19. *Beltrami E.* Sulle funzioni bilineari // Giomale di Matematiche ad Uso degli Studenti Delle Universita. 1873. V. 11.
20. *Jordan C.* Memoire sur lesformes bilineaires // J. Math. Pures Appl., Deuxieme Serie. 1874. V. 19. P. 35–54.
21. *Jordan C.* Sur la reduction desformes bilineaires // Comptes Rendus de l'Academie Sciences, Paris. 1874. V. 78. P. 614–617.
22. *Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B.* Computer Methods for Mathematical Computations. Upper Saddle River: Prentice Hall. 1977.
23. *Golub G., Loan C.V.* Matrix computations. MD, USA: Johns Hopkins University Press Baltimore. 1996.
24. *Schimming R.* On constant solutions of the Yang–Mills equations // Arch. Math. 1988. V. 24. P. 65–73.
25. *Schimming R., Mundt E.* Constant potential solutions of the Yang–Mills equation // J. Math. Phys. 1992. V. 33. P. 4250.
26. *Марчук Н.Г., Широков Д.С.* О некоторых уравнениях, моделирующих уравнения Янга–Миллса // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2020. Т. 51. № 4. С. 676–685.
27. *Марчук Н.Г.* Об одном полевом уравнении, порождающем новый класс частных решений уравнений Янга–Миллса // Избранные вопросы математической физики и анализа, Сборник статей. К 90-летию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимирова, Тр. МИАН. МАИК, М., 2014. Т. 285. С. 207–220.
28. *Shirokov D.S.* On solutions of the Yang–Mills equations in the algebra of h-forms // Journal of Physics: Conference Series (International Conference "Marchuk Scientific Readings 2021" (MSR-2021) 4-8 October 2021, Novosibirsk, Russian Federation). IOP Publishing, 2021. V. 2099. № 012015.
29. *Proca A.* Wave theory of positive and negative electrons // J. Phys. Radium. 1936. V. 7. P. 347–353.
30. *Marchuk N.G., Shirokov D.S.* Constant Solutions of Yang–Mills Equations and Generalized Proca Equations // J. Geom. Symmetry Phys. 2016. V. 42. P. 53–72.
31. *Dzhunushaliev V., Folomeev V.* Dirac star with SU(2) Yang–Mills and Proca fields // Phys. Rev. D. 2020. V. 101. № 024023.
32. *Jackiw R.* Quantum meaning of classical field theory // Rev. Mod. Phys. 1977. V. 49. P. 681–706.
33. *Mayer D., Viswanathan K.S.* A note on the vacuum structure of an SU(2) Yang–Mills theory // Commun. Math. Phys. 1979. V. 67. P. 199–203.
34. *Nian J., Qian Y.* A topological way of finding solutions to the Yang–Mills equation // Commun. Theor. Phys. 2020. V. 72. № 085202.