ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 6, с. 1016–1029

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.958

О ВЫВОДЕ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И ГРАВИТАЦИИ ИЗ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

© 2022 г. В. В. Веденяпин[1,*], В. И. Парёнкина[2,], С. Р. Свирщевский[1,*]**

[1] *125047 Москва, Миусская пл., 4, ФИЦ ИПМ, Россия*

[2] *141014 Мытищи, М.о., ул. Веры Волошиной, 24, Московский гос. обл. ун-т, Россия*

**e-mail: vicveden@yahoo.com*

***e-mail: vi.parenkina@mgou.ru*

Поступила в редакцию 17.11.2021 г.
Переработанный вариант 17.11.2021 г.
Принята к публикации 24.12.2021 г.

В классических работах уравнения для полей предлагаются без вывода правых частей. Здесь мы даем вывод правых частей уравнений Максвелла и Эйнштейна в рамках уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна из классического, но более общего принципа наименьшего действия. Библ. 40.

Ключевые слова: уравнение Власова, уравнение Власова–Эйнштейна, уравнение Власова–Максвелла, уравнение Власова–Пуассона.

DOI: 10.31857/S0044466922060163

1. ДЕЙСТВИЕ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОЛЕЙ

Пусть $f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)$ – функция распределения частиц по пространству $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$, по скоростям $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$, массам $m\in\mathbb{R}$ и заряду $e\in\mathbb{R}$ в момент времени $t\in\mathbb{R}$. Это означает, что число частиц в объеме $d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmde$ равно $f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmde$. Рассмотрим действие:

$$\begin{gathered}S=-c\int mf(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)\sqrt{g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}\,d^3xd^3vdmdedt-\frac{1}{c}\int ef(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)A_\mu u^\mu d^3xd^3vdmdedt+\\+k_1\int(R+\Lambda)\sqrt{-g}\,d^4x+k_2\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d^4x,\end{gathered}\tag{1.1}$$

где c – скорость света, $u^0=c$ и $u^i=v^i$ $(i=1,2,3)$ – трехмерная скорость, $x^0=ct$ и x^i $(i=1,2,3)$ – координата, $g_{\mu\nu}(\mathbf{x},t)$ – метрика $(\mu,\nu=0,1,2,3)$, $A_\mu(\mathbf{x},t)$ есть 4-потенциал электромагнитного поля, $F_{\mu\nu}(\mathbf{x},t)=\partial A_\mu(\mathbf{x},t)/\partial x^\nu-\partial A_\nu(\mathbf{x},t)/\partial x^\mu$ – электромагнитные поля, R – полная кривизна, Λ – лямбда-член Эйнштейна, $k_1=-c^3/16\pi\gamma$ и $k_2=-1/16\pi c$ – константы [1]–[4], g – определитель метрики $g_{\mu\nu}$, γ – постоянная тяготения, по повторяющимся индексам, как обычно, идет суммирование.

Вид действия (1.1) удобен для получения уравнений Эйнштейна и Максвелла при варьировании по полям $g_{\mu\nu}$ и A_μ. Такой способ вывода уравнений Власова–Максвелла и Власова–Эйнштейна использовался в работах [5]–[11]. При варьировании (1.1) по $g_{\mu\nu}$ получим уравнение Эйнштейна

$$k_1\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g}=\int m\frac{f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)}{2\sqrt{g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta}}u^\mu u^\nu d^3vdmde-\frac{1}{2}k_2F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\sqrt{-g}.\tag{1.2}$$

Первое слагаемое правой части этого уравнения и является по определению Гильберта тензором энергии-импульса. Он выписан впервые в таком видев работах [9]–[11] в менее общем виде без распределения по массам и зарядам. Попытки выписать тензор энергии-импульса через функцию распределения предпринимались, насколько нам известно, только в релятивистской кинетической теории для уравнения Власова–Эйнштейна [5]–[15]. Если использовалась функция распределения от 4-мерного импульса, что приводило к необходимости использовать дельта функцию $\delta((mc)^2 - g^{\mu\nu}P_\mu P_\nu)$, что неудобно, а уравнения движения, приводящие к уравнению типа Власова, также оказывались неудовлетворительными.

Уравнение электромагнитных полей получается варьированием (1.1) по A_μ и называется уравнением Максвелла:

$$k_2 \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\sqrt{-g} = \frac{1}{c^2}\int e u^\mu f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)d^3v dm de. \tag{1.3}$$

Покажем, что вид действия (1.1) является более общим, чем в [1]–[4]. Для получения стандартного вида действия возьмем функцию распределения в виде δ – функции для одной частицы:

$$f(\mathbf{x},\mathbf{v},m,e,t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'(t))\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}'(t))\delta(m - m')\delta(e - e'). \tag{1.4}$$

Подставляя (1.4) в действие (1.1) и опустив штрихи, получаем стандартные [1]–[4] выражения для всех слагаемых:

$$S = -cm\int\sqrt{g_{\mu\nu}(\mathbf{x},t)u^\mu u^\nu}dt - \frac{e}{c}\int A_\mu(\mathbf{x},t)u^\mu dt + k_1\int(R + \Lambda)\sqrt{-g}d^4x + k_2\int(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\sqrt{-g}d^4x. \tag{1.5}$$

В роли частиц могут быть электроны и ионы в плазме, планеты в галактиках, галактики в супергалактиках, скопление галактик во Вселенной. В равенстве (1.4) мы можем взять сумму дельта-функций и получить обычное действие [1]–[4] для конечной системы частиц: этим обосновывается единственность выбора более общего действия (1.1).

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ В ЗАДАННЫХ ПОЛЯХ, УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ И УРАВНЕНИЕ ВЛАСОВА–МАКСВЕЛЛА–ЭЙНШТЕЙНА

Воспользуемся инвариантностью первых двух слагаемых уравнения (1.5), относительно замены $t = \phi(\lambda)$, где λ – произвольный параметр. Такая инвариантность хорошо известна [1]–[4]. Перепишем первые два слагаемых из действия (1.5) в виде

$$S = -cm\int\sqrt{g_{\mu\nu}w^\mu w^\nu}d\lambda - \frac{e}{c}\int A_\mu w^\mu d\lambda. \tag{2.1}$$

Варьируя по $x(\lambda)$ и учитывая, что $w^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\lambda}$, получаем уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$cm\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{g_{\mu\nu}w^\nu}{\sqrt{g_{\eta\alpha\beta}w^\alpha w^\beta}} + \frac{e}{c}A_\mu\right] = cm\frac{1}{\sqrt{g_{\eta\alpha\beta}w^\alpha w^\beta}}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}w^\alpha w^\beta + \frac{e}{c}\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}w^\nu. \tag{2.2}$$

Учитывая, что величина $I = g_{\eta\xi}\dfrac{\partial x^\eta}{\partial\lambda}\dfrac{\partial x^\xi}{\partial\lambda}$ является интегралом движения по λ для уравнения (2.2) (обоснование этого см. в [9], [10]) приведем это уравнение к виду

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\eta}\frac{dx^\eta}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = \frac{e}{mc^2}\sqrt{I}F^\mu_\nu\frac{dx^\nu}{d\lambda}, \tag{2.3}$$

где $\Gamma^\mu_{\nu\eta}$ – символ Кристоффеля:

$$\Gamma^\mu_{\nu\eta} = \frac{1}{2}g^{\mu\varsigma}\left(\frac{\partial g_{\varsigma\eta}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\varsigma\nu}}{\partial x^\eta} - \frac{\partial g_{\eta\nu}}{\partial x^\varsigma}\right).$$

Уравнение (2.3) отличается от приведенных в руководствах [1]–[4] наличием $\sqrt{I}$ в правой части: в этих руководствах дифференцирование идет по собственному времени $ds = d\lambda\sqrt{I}$. Это неудобно, так как для каждой частицы это собственное время индивидуально. Далее будет использована формула (2.3), которая обладает симметрией при замене $\mathbf{x} \to \alpha\mathbf{x}$, $\lambda \to \alpha\lambda$, что позволяет понизить ее порядок. Для этого перепишем уравнение (2.3) в виде:

$$\begin{gathered}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda} = w^{\mu},\\ \frac{dw^{\mu}}{d\lambda} = -\Gamma^{\mu}_{\nu\eta}w^{\nu}w^{\eta} + \frac{e\sqrt{I}}{mc^2}F^{\mu}_{\nu}w^{\nu}.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Избавляемся от λ, поделив остальные уравнения на первое из уравнений системы (2.4). Так как $x^0 = ct$ пропорционально времени, обозначим $\frac{w^{\mu}}{w^0} = \frac{dx^{\mu}}{dx^0} = \frac{u^{\mu}}{c}$.

При этом из-за симметрии, описанной выше, можно избавиться от уравнения на $\frac{du^0}{dx^0}$ и написать уравнения на трехмерные переменные x^i, v^i $(i = 1,2,3)$. Здесь по-прежнему $\mathbf{u} = (c,\mathbf{v})$. Такое понижение порядка описано для гравитации в книгах Фока [1] и Вейнберга [3]. Там этот переход в уравнениях приведен для гравитации, где уравнения не отличаются для параметра λ и собственного времени s. Однако если добавляется электромагнетизм, то отличие заключается как раз в появлении корня в правой части, который обеспечивает необходимую симметрию. Нам это понижение переходом к времени t необходимо, так как наша цель получить замкнутую систему уравнений для полей и частиц, а значит, получить уравнение на функцию распределения $f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)$, которая была в уравнениях для полей. Тогда имеем

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i, \quad \frac{dv^i}{dt} = G^i, \tag{2.5}$$

где через G^i обозначено следующее выражение:

$$G^i = -\Gamma^{i}_{\nu\eta}u^{\nu}u^{\eta} + \frac{v^i}{c}\Gamma^{0}_{\eta\nu}u^{\eta}u^{\nu} + \frac{e\sqrt{J}}{mc^2}\left[F^{i}_{\nu}u^{\eta} - \frac{v^i}{c}F^{0}_{\eta}u^{\eta}\right],$$

а $J = g_{\nu\xi}u^{\nu}u^{\eta}$, $u^0 = c$, $u^i = v^i$, $(i = 1,2,3)$.

Мы получили уравнения движения заряженных частиц в электромагнитных и гравитационных полях в релятивистской форме из принципа наименьшего действия в форме Вейнберга–Фока.

В заключение выпишем уравнение Лиувилля (его также называют уравнением переноса или уравнением неразрывности) для функции распределения $f(\mathbf{x},\mathbf{v},m,e,t)$ для системы (2.5):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v^i\frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial(G^i f)}{\partial v^i} = 0. \tag{2.6}$$

Уравнения (2.6), (1.2) и (1.3) образуют систему уравнений для гравитации и электродинамики Власова–Максвелла–Эйнштейна. Это замкнутая система уравнений релятивистских электродинамики и гравитации. Общий смысл уравнений типа Власова именно таков: они 1) позволяют замкнуть систему электродинамики (уравнение Власова–Максвелла) и гравитации (уравнение Власова–Эйнштейна) и 2) вывести их из принципа наименьшего действия.

3. ОБЩИЙ ПЕРЕХОД К ГИДРОДИНАМИКЕ [6], [7]

Рассмотрим произвольную систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений: $\frac{dx}{dt} = v(x)$, $x \in R^n$, $v(x) \in C^1(R^n)$. Перепишем ее для $x = (q,p)$, $q \in R^m$, $p \in R^{n-m}$:

$$\frac{dq}{dt} = w(q,p), \quad \frac{dp}{dt} = g(q,p).$$

Выпишем уравнение Лиувилля для функции распределения $f(t,q,p)$

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial(w_i f)}{\partial q_i}+\frac{\partial(g_j f)}{\partial p_j}=0. \tag{3.1}$$

Выполним гидродинамическую подстановку $f(t,q,p)=\rho(q,t)\delta(p-Q(q,t))$. Здесь δ – это дельта-функция Дирака, сама эта функция есть предел Максвелловского распределения, когда температура стремится к нулю, $\rho(q,t)$ – это аналог плотности, а $Q(q,t)$ – аналог макроскопического импульса. Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial\rho(q,t)}{\partial t}\delta(p-Q(q,t))-\rho(q,t)\frac{\partial\delta(p-Q(q,t))}{\partial p_i}\frac{\partial Q_i(q,t)}{\partial t},$$

$$\frac{\partial(w_i(q,p)f)}{\partial q_i}=\frac{\partial(w_i(q,Q)\rho(q,t))}{\partial q_i}\delta(p-Q(q,t)),$$

$$-\rho(q,t)w_i(q,Q(q,t))\frac{\partial\delta(p-Q(q,t))}{\partial p_k}\frac{\partial Q_k(q,t)}{\partial q_i},$$

$$\frac{\partial(g_j(q,p)f)}{\partial p_j}=\rho(q,t)g_j(q,Q(q,t))\frac{\partial\delta(p-Q(q,t))}{\partial p_j}.$$

Собирая множители при дельта-функции и ее производных, получаем систему уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho w_i(q,Q))}{\partial q_i}=0,\\ \rho(q,t)\left(\frac{\partial Q_j(q,t)}{\partial t}+w_i(q,Q(q,t))\frac{\partial Q_j(q,t)}{\partial q_i}-g_j(q,Q(q,t))\right)=0.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Эта система является точным следствием уравнения Лиувилля (3.1): можно называть ее *гидродинамическим следствием* уравнения Лиувилля порядка $(m,n-m)$. Гидродинамическая подстановка была изобретена в рамках уравнений Власова [4], а для произвольных систем обыкновенных дифференциальных уравнений введена в [6]. Слово “точное” означает, что если $\rho(q,t)$ и $Q(q,t)$ удовлетворяет системе уравнений (3.2), то функция $f(t,q,p)=\rho(q,t)\delta(p-Q(q,t))$ удовлетворяет уравнению (3.2). Это также означает, что подстановка максвелловского распределения дает приближенные следствия, либо какой-то набор частных решений: например, Больцман изучал эти решения для простейшего варианта уравнения (3.1), уравнения переноса для свободного движения. Второе из уравнений (3.2) имеет ясный геометрический смысл: оно описывает движение m-мерных поверхностей в n-мерном пространстве в силу исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в Эйлеровых координатах. Получающаяся система квазилинейных уравнений не общая, а в терминологии Куранта и Гильберта называется системой уравнений с одинаковой главной частью. Эта система обладает следующими замечательными свойствами.

1. В случае линейной исходной системы ОДУ решение системы с одинаковой главной частью можно искать в виде $Q_k(t,q)=\lambda_k^a(t)q_a$, линейном по координатам q. Получается система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений в матричном виде на матрицу $\lambda_k^a(t)$.

2. Для гамильтоновых систем

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p}(q,p),\quad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}(q,p)$$

из нее получается уравнение Гамильтона–Якоби двумя шагами. Первый шаг от уравнения Лиувилля к гидродинамическому следствию порядка $\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)$, как это было сделано выше. Второй шаг: в случае гамильтоновых систем проходит дальнейшая подстановка в (3.1) для импульсов $Q_k(t,q)$ в виде градиента функции: $Q_k(t,q) = \frac{\partial W}{\partial q_k}$. В результате получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho(q,t)\nabla_i W(q,Q))}{\partial q_i} = 0,$$
$$\rho(q,t)\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial W(q,t)}{\partial t} + H(q,\nabla \mathrm{W})\right) = 0.$$

Отсюда получаем, что там, где плотность ρ равна нулю, оба уравнения исчезают. А там, где плотность не равна нулю, функция $\frac{\partial W(q,t)}{\partial t} + H(q,\nabla \mathrm{W}) = f(t)$ зависит только от времени [17]–[20]. Замена $W(q,t) = Z(q,t) + g(t)$, где $\frac{dg}{dt} = f(t)$, приводит к уравнению Гамильтона–Якоби: $\frac{\partial Z(q,t)}{\partial t} + H(q,\nabla \mathrm{Z}) = 0$ [17]–[20].

Этот переход от уравнения Лиувилля к уравнению Гамильтона–Якоби имеет длинную историю. Второй шаг – переход от гидродинамических уравнений к уравнениям типа Гамильтона–Якоби в частном случае гамильтониана $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + U(q)$ возник в работах Маделунга по квантовой механике [16]. А в общем случае гамильтоновых систем такой переход изучался в работах И.С. Аржаных, К.С. Долматова, В.В. Козлова [17]–[20]. Первый шаг, связавший гидродинамические системы с уравнением Лиувилля и уравнениями Гамильтона–Якоби, был проведен в работах [21]–[26] после того, как на одной из своих лекций В.В. Козлов вывел уравнения Гамильтона–Якоби из второго из уравнений (3.2) в гамильтоновом случае. В.В. Козлов назвал эти нижние уравнения (3.2) уравнениями Лэмба [17]–[20]. Один из авторов (В.В. Веденяпин) предположил, что эти уравнения Лэмба получаются из уравнений Лиувилля гидродинамической подстановкой, и это предположение подтвердилось [21]–[26]. Все это мы применим в дальнейшем в релятивистском и нерелятивистском случае.

4. ПЕРЕХОД К ГИДРОДИНАМИКЕ И УРАВНЕНИЮ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ СЛУЧАЕ УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА–МАКСВЕЛЛА–ЭЙНШТЕЙНА

Для вывода уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна в форме Гамильтона–Якоби нужно вывести его в импульсах (гидродинамическая форма получится и для скоростей, и для импульсов). Для этого вернемся к исходному действию и перепишем его, но нужно воспользоваться трехмерными импульсами. Для этого действие (2.1) перепишем через время: когда мы получали уравнение движения частицы в скоростях, то нужно было действовать через внешний параметр λ, чтобы использовать символы Кристофеля. А при получении канонических уравнений движения необходимо обычное время:

$$S = -cm\int\sqrt{g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}}\,dt - \frac{e}{c}\int A_{\mu}u^{\mu}dt.$$

Мы получим уравнение движения:

$$-cm\frac{d}{dt}\left[\frac{g_{i\beta}u^{\beta}}{\sqrt{g_{\eta\xi}u^{\eta}u^{\xi}}} + \frac{e}{c}A_i\right] = -cm\frac{1}{\sqrt{g_{\eta\xi}v^{\eta}v^{\xi}}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^i}u^{\mu}u^{\nu} - \frac{e}{c}\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^i}u.^{\mu}$$

Латинскинские индексы i, j, $k\ldots$ пробегают значения $1,2,3$, а греческие μ, $\nu\ldots$ пробегают значения $0,1,2,3$. Мы получаем выражение для импульсов:

$$q_{\mu} = \frac{\partial L}{\partial u^{\mu}} = -mc\frac{g_{\mu\alpha}u^{\alpha}}{\sqrt{g_{\eta\xi}u^{\eta}u^{\xi}}} + \frac{e}{c}A_{\mu}. \quad (4.1)$$

Здесь выражение для q_0 получается формальным дифференцированием по $v_0 = c$.

Это выражения для длинных или канонических импульсов, но понадобятся и малые импульсы $p_\mu = q_\mu - \frac{e}{c}A_\mu = -mc\frac{g_{\mu\alpha}u^\alpha}{\sqrt{g_{\eta\xi}u^\eta u^\xi}}$: формулы связи со скоростями проще для малых импульсов, а при переходе к уравнению Гамильтона–Якоби мы обязаны пользоваться каноническими.

Переходя к верхним индексам умножением на обратную матрицу $g^{\mu\beta}$, получаем

$$p^\beta = -mc\frac{u^\beta}{\sqrt{g_{\eta\xi}u^\eta u^\xi}}.$$

Теперь требуется обратить эту формулу, выразив скорости через импульсы, чтобы написать действие через импульсы. Для этого в последней формуле поделим β-ю компоненту на нулевую:

$$\frac{p^\beta}{p^0} = \frac{u^\beta}{c}.$$

В последней формуле необходимо исключить импульс с нулевой компонентой через массовое уравнение $p_\alpha p_\beta g^{\alpha\beta} = (mc)^2$ и его решение относительно p_0: $p_0 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $a = g^{00}$, $b = 2p_i g^{0i}$, $c = p_i p_j g^{ij} - (mc)^2$. Массовое уравнение получается подстановкой тех же соотношений

$$\frac{p^\beta}{p^0} = \frac{u^\beta}{c},$$

в формулу (4.1) при $\mu = 0$ (ср. [1]–[4]).

Уравнение для полей останется тем же самым (1.2) с заменой на интегрирование по импульсам с использованием формул $f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)d\mathbf{v}dmde = f(t,\mathbf{x},\mathbf{q},m,e)d\mathbf{q}dmde = f(t,x,p,m,e)d\mathbf{p}dmde$. Каждая из трех этих величин это число частиц в элементе объема, что является инвариантом при замене переменных:

$$k_1\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R + \Lambda)\right)\sqrt{-g} = c\int m\frac{f(t,\mathbf{x},q,m,e)}{2\sqrt{g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}}u^\mu u^\nu d^3q dmde - \frac{1}{2}k_2 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g},$$

$$k_2\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\sqrt{-g} = \frac{1}{c^2}\int e u^\mu f(t,\mathbf{x},q,m,e)d^3q dmde.$$

Или

$$k_1\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R + \Lambda)\right)\sqrt{-g} = c\int m\frac{f(t,\mathbf{x},q,m,e)}{2}\frac{cp^\mu p^\nu}{(q^0)(mc)^2}d^3q dmde - \frac{1}{2}k_2 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g},$$

$$k_2\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\sqrt{-g} = \frac{1}{c^2}\int e\frac{cp^\mu}{p^0}f(t,\mathbf{x},q,m,e)d^3q dmde.$$

Здесь имеется в виду, что скорости в первом уравнении, а импульсы p^μ во втором должны быть выражены через канонические импульсы q_μ.

Уравнение движения для частиц получаем уже в гамильтоновой форме, где функция Гамильтона $H = -c\frac{\partial L}{\partial u^0} = -cq_0$. Эта формула получается из-за того, что лагранжиан для действия $S = -cm\int\sqrt{g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}dt - \frac{e}{c}\int A_\mu u^\mu dt$ есть функция первой степени по скоростям, и формулы Эйлера $u^\mu\frac{\partial L}{\partial u^\mu} - L = 0$. Так как по определению $H = u^i\frac{\partial L}{\partial u^i} - L$, получаем $c\frac{\partial L}{\partial u^0} + H = 0$. Здесь имеется в виду суммирование по $i = 1,2,3$ и по $\mu = 0,1,2,3$. Отсюда находим выражения для скоростей $u^i = \frac{\partial H}{\partial p^i} = u^i(q) = -c\frac{\partial q_0}{\partial q^i}$.

Выписывая через этот гамильтониан по общей схеме разд. 3 уравнение Лиувилля гидродинамической подстановкой $f(t,x,qm,e) = \rho(x,t,m,e)\delta(q - Q(q,t,m,e))$, получаем гидродинамические уравнения. Подстановкой $Q_\alpha = \frac{\partial W}{\partial x^\alpha}$ или $P_\alpha = \frac{\partial W}{\partial x^\alpha} - \frac{e}{c}A_\alpha$ получаем затем уравнения Гамильтона–Якоби:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x^\alpha} - \frac{e}{c}A_\alpha\right)\left(\frac{\partial W}{\partial x^\beta} - \frac{e}{c}A_\beta\right)g^{\alpha\beta} = (mc)^2.$$

Мы также должны написать уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}(u^i(\nabla \mathrm{W})\rho) = 0.$$

Чтобы получить замкнутую форму уравнений Гамильтона–Якоби–Власова–Максвелла–Эйнштейна, необходимо и в уравнениях для полей выполнить ту же гидродинамическую подстановку $f(t,x,q,m,e) = \rho(x,t,m,e)\delta(q - Q(q,t,m,e))$:

$$k_1\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R + \Lambda)\right)\sqrt{-g} = c\int m\frac{\rho(t,x,m,e)}{2}\frac{cP^\mu P^\nu}{(P^0)(mc)^2}dmde - \frac{1}{2}k_2F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{-g},$$

$$k_2\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\sqrt{-g} = \frac{1}{c^2}\int e\frac{cP^\mu}{P^0}\rho(t,\mathbf{x},m,e)dmde.$$

Здесь макроскопические импульсы P^μ и P_μ связаны обычными соотношениями $P_\mu = g_{\mu\nu}P^\nu$. При этом в форме Гамильтона–Якоби нужно учитывать, что $P_\alpha = \frac{\partial W}{\partial x^\alpha} - \frac{e}{c}A_\alpha$. Мы получили уравнение Власова–Максвелла–Эйнштейна как в редукции к гидродинамическим переменным, так и в редукции к уравнениям Гамильтона–Якоби. Рассмотрим примеры специальных релятивистских систем.

Пример 1. Рассмотрим простейшее релятивистское действие с метрикой Лоренца:

$$S = -cm\int\left(\sqrt{c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} + \frac{U}{c}\right)dt - \frac{1}{8\pi\gamma}\int(\nabla U)^2dxdt - \frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int Udxdt.$$

Варьируя по координатам $x(t)$, получаем обычные релятивистские уравнения в метрике Лоренца с гамильтонианом [1]–[4]

$$H = c\sqrt{(mc)^2 + q^2} + U.$$

Переходим к действию, пригодному к варьированию по полям по нашей обычной схеме:

$$S = -c\int m\left(\sqrt{c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} + \frac{U}{c}\right)f(x,v,t,m)dvdmdxdt - \frac{1}{8\pi\gamma}\int(\nabla U)^2d\mathbf{x}dt - \frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int Udxdt.$$

Варьируя его по потенциалу U, получаем уравнения для полей:

$$\Delta U = 4\pi\gamma\int mf(t,x,v,m,e)dvdmde - \frac{1}{2}c^2\Lambda.$$

Сразу переходим к уравнению Гамильтона–Якоби и получаем систему уравнений

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}(v^i(\nabla W)\rho) = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + c\sqrt{(mc)^2 + (\nabla W)^2} + U = 0,$$

$$\Delta U = 4\pi\gamma\int m\rho dmde - \frac{c^2\Lambda}{2},$$

где $v_i(q) = \frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{cq_i}{\sqrt{(mc)^2 + q^2}}$.

Перепишем эту систему уравнений для изотропного случая, когда $\rho = \rho(t,r,m)$, $U = U(t,r)$, $W = W(t,r,m,e)$ в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{cW'x^i}{r\sqrt{(mc)^2 + (W')^2}}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial S}{\partial t} + c\sqrt{(mc)^2 + (W')^2} + U = 0,$$
$$3\frac{U'}{r} + \left(\frac{U'}{r}\right)' = 4\pi\gamma\int m\rho dmde - \frac{c^2\Lambda}{2}.$$

Здесь штрих означает дифференцирование по r. Космологическим решениям соответствует случай, когда ρ не зависит от пространственной переменной x: $\rho = \rho(m,t)$. Тогда последнее уравнение дает решение

$$U = -\frac{\beta(t)}{r} + \frac{\alpha(t)}{6}r^2,$$

здесь $\alpha(t) = 4\pi\gamma\int m\rho dmde - \frac{c^2\Lambda}{2}$.

Из первого уравнения системы – уравнения неразрывности – получаем:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + 3H\rho = 0.$$

Величина $H(m,t)$ называется постоянной Хаббла (и обычно полагают, что она не зависит от m). Получаем уравнение на S:

$$3\varphi + r\varphi' = 3H,$$

где $\varphi(r) = \frac{W'c}{r\sqrt{(W')^2 + (mc)^2}}$.

Решая уравнение относительно φ, получаем

$$\varphi = H + \frac{B(m,t)}{r^3}.$$

Мы получили систему уравнений типа Гурса:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + 3H\rho = 0,$$
$$\frac{W'c}{r\sqrt{(W')^2 + (mc)^2}} = H + \frac{B(m,t)}{r^3},$$
$$\frac{\partial S}{\partial t} + c\sqrt{(mc)^2 + (W')^2} - \frac{\beta(t)}{r} + \frac{\alpha(t)}{6}r^2 = 0.$$

Пример 2. Еще одно релятивистское действие, но с метрикой не Лоренца, а слаборелятивистской

$$g_{\alpha\beta} = \operatorname{diag}\left(1 + \frac{2U}{c^2}, -1, -1, -1\right).$$

При этом потенциал вносится в действии под корень

$$S = -cm\int\sqrt{c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U}dt - \frac{1}{8\pi\gamma}\int(\nabla U)^2 dxdt - \frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int Udxdt.$$

Действуя так же, получаем гамильтониан

$$H = -cp_0(x,q,t) = c\sqrt{\left((mc)^2 + q^2\right)\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)},$$

и систему уравнений

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^i}(v^i(\nabla W)\rho)=0,$$
$$\frac{\partial W}{\partial t}+c\sqrt{\left((mc)^2+(\nabla W)^2\right)\left(1+\frac{2U}{c^2}\right)}=0,$$
$$\Delta U=4\pi\gamma\int\frac{m\rho(m,x,t)}{\sqrt{c^2-(v(\nabla W))^2+U}}dm-\frac{c^2\Lambda}{2},$$

где $v_i(q)=\dfrac{\partial H}{\partial q_i}=\dfrac{cq_i\sqrt{1+\frac{2U}{c^2}}}{\sqrt{(mc)^2+q^2}}$.

Уже из вида уравнений видно, что ускоренное расширение в первом случае можно в принципе устроить за счет лямбда-члена, а во втором – нет из-за положительности корня в уравнении Гамильтона–Якоби.

В следующем разделе мы применим эту технологию в нерелятивистском случае.

5. НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕТИКА И ГИДРОДИНАМИКА: ЭВОЛЮЦИЯ ВСЕЛЕННОЙ

Применим этот способ в нерелятивистском случае для вывода уравнений Власова–Пуассона и, как следствие, уравнений гравитационной газодинамики заряженных частиц, действуя по той же схеме. Нерелятивистский случай соответствует действию [5]–[7]:

$$S=\int\left[\frac{mv^2}{2}-e\varphi-mU\right]f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmdedt+\\+\frac{1}{8\pi}\int(\nabla\varphi)^2d\mathbf{x}dt-\frac{1}{8\pi\gamma}\int(\nabla U)^2d\mathbf{x}dt-\frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int Udxdt. \tag{5.1}$$

Варьируя по φ и по U, получаем дважды уравнения Пуассона:

$$\Delta\varphi=-4\pi\int ef(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)d\mathbf{v}dmde,\\ \Delta U=4\pi\gamma\int mf(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)d\mathbf{v}dmde-\frac{1}{2}c^2\Lambda. \tag{5.2}$$

Действие для одной частицы следует при выборе $f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)=\delta(e-q)\delta(m-M)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}(t))\delta(\mathbf{v}-\mathbf{y}'(t))$. Здесь M, q, $y(t)$ – это масса, заряд и координата одной частицы. Рассмотрим для такой функции распределения первое слагаемое в (3.1), получим стандартное действие:

$$S_1=\int\left[\frac{m(y')^2}{2}-q\varphi(\mathbf{y},t)-MU(\mathbf{y},t)\right]dt.$$

Варьируя, как обычно, в механике, получаем уравнение Ньютона:

$$M\mathbf{y}''+M\frac{\partial U}{\partial\mathbf{y}}+q\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{y}}=0.$$

Переходим к уравнению Лиувилля для соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений (возвращаемся к (e,m) для заряда и массы и к x вместо y для координаты):

$$\dot{x}=\mathbf{v},$$
$$\dot{\mathbf{v}}=-\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\mathbf{e}}{\mathbf{m}}\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

тогда

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\left(\mathbf{v},\frac{\partial f}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\mathbf{e}}{\mathbf{m}}\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial v}\right)=0. \tag{5.3}$$

Система (5.2), (5.3) и есть система уравнений Власова–Пуассона–Пуассона с лямбда-членом [38].

Получим точное гидродинамическое следствие этой системы, предполагая гидродинамический вид функции распределения [4]–[11]: $f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},e,m) = \rho(t,\mathbf{x},e,m)\delta(v - w(t,\mathbf{x},\mathbf{v},e,m))$. Слово “точное” означает, что если мы возьмем вместо этого распределения максвелловское, то получим приближенное следствие. Тогда верно следующее:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{w}) = 0,\\ \frac{\partial w_k}{\partial t} + w_i\frac{\partial w_k}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial x_k} + \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{m}}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = 0,\\ \Delta\varphi = -4\pi\int e\rho dmde,\\ \Delta U = 4\pi\gamma\int m\rho dmde - \frac{1}{2}c^2\Lambda.\end{gathered}\tag{5.4}$$

Такую систему можно назвать системой Власова–Лэмба–Пуассона–Пуассона. Пусть скорость имеет вид градиента некоторой функции W: $wk\,(t,\mathbf{x},e,m) = \dfrac{\partial W(t,\mathbf{x},e,m)}{\partial x_k}$.

Тогда получаем систему, которая является также точным следствием уравнения Власова–Пуассона–Пуассона (5.2), (5.3), где появляется уравнение Гамильтона–Якоби:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\Delta W + \frac{\partial\rho}{\partial x^k}\frac{\partial W}{\partial x^k} = 0,\\ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial x^i}\right)^2 + u + \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{m}}\varphi = 0,\\ \Delta\varphi = -4\pi\int e\rho dmde,\\ \Delta U = 4\pi\gamma\int m\rho dmde - \frac{1}{2}c^2\Lambda.\end{gathered}\tag{5.5}$$

Перепишем эту систему уравнений для изотропного случая, когда функции $\rho = \rho(t,r,e,m)$, $W = W(t,r,e,m)$, $U = U(r,t)$, $\varphi = \varphi(r,t)$. Получаем систему

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\left(\frac{3W'}{r} + r\left(\frac{W'}{r}\right)'\right) + \rho' W' = 0,\\ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2}(W')^2 + U + \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{m}}\varphi = 0,\\ \frac{3\varphi'}{r} + r\left(\frac{\varphi'}{r}\right)' = -4\pi\int e\rho dmde,\\ \frac{3U'}{r} + r\left(\frac{U'}{r}\right)' = 4\pi\gamma\int m\rho dmde - \frac{c^2\Lambda}{2}.\end{gathered}$$

Предположим теперь, что плотность не зависит от пространственной координаты: $\rho(t,m,e)$ (однородность по пространству). Такие решения называются космологическими решениями, так как на очень больших масштабах предполагается, что плотность от пространственной координаты вообще не зависит [1]–[4].

Тогда последнее уравнение дает решение

$$U = -\frac{a(t)}{r} + \frac{b(t)}{6}r^2,$$

где $b(t) = 4\pi\gamma\displaystyle\int m\rho dmde - \frac{c^2\Lambda}{2}$.

Аналогично

$$\varphi(r,t) = -\frac{c(t)}{r} + \frac{d(t)}{6}r^2,$$

где $d(t) = -4\pi\int e\rho dmde$.

Из первого уравнения системы, уравнения неразрывности, получаем

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + 3H\rho = 0,$$

где $H(m,e,t)$ – постоянная Хаббла, и обычно полагают, что она зависит только от времени. Слово “постоянная” употребляется по традиции со времен Хаббла, так как она меняется медленно. Но именно ее зависимость от времени и других параметров (как масса или аналоги зарядов какой-то другой материи, которую сейчас принято называть темной или темной энергии) имеет особую актуальность в связи с ускоренным расширением Вселенной. Получаем уравнение на W:

$$3\psi + r\psi' = 3H(t,m,e),$$

где $\psi(r,t) = \dfrac{W'(t,r,m,e)}{r}$.

Решая уравнение относительно ψ, получаем

$$\psi = H + \frac{B(m,e,t)}{r^3}.$$

Значит, $W' = Hr + \dfrac{B}{r^2}$ и $W = \dfrac{Hr^2}{2} - \dfrac{B}{r}$.

Подставляя все во второе уравнение, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Hr^2}{2} - \frac{B}{r}\right) + \frac{1}{2}\left(Hr + \frac{B}{r^2}\right)^2 - \frac{a(t)}{r} + \frac{b(t)}{6}r^2 + \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{m}}\left(-\frac{c(t)}{r} + \frac{d(t)}{6}r^2\right) = 0.$$

Из второго слагаемого находим $B(m,e,t) = 0$.

Собирая коэффициенты при r^{-1}, получаем $a(t) + \dfrac{q}{M}c(t) = 0$.

Собирая коэффициенты при r^2, получаем уравнение на H:

$$\frac{\partial}{\partial t}H + H^2 + \frac{b(t)}{3} + \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{m}}\frac{d(t)}{3} = 0.$$

Получаем систему уравнений на плотность $\rho(m,t)$ и постоянную Хаббла $H(t)$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho}{\partial t} + 3H\rho = 0,\\ \frac{\partial}{\partial t}H + H^2 + \frac{4\pi\gamma\int m\rho dmde}{3} - \frac{c^2\Lambda}{6} - \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{m}}\frac{4\pi\gamma\int e\rho dmde}{3} = 0.\end{gathered} \tag{5.6}$$

Таким образом получается еще одна возможность объяснить загадочное ускоренное расширение Вселенной [39], [40] наряду с лямбда-членом. Из уравнений хорошо видно, что они работают в одинаково правильном направлении, создавая недостающее отталкивание. В случае заряженных частиц это равенство нулю последнего слагаемого в левой части означает нейтральность. Пусть

$$\eta(t) = \frac{4\pi\gamma\int m\rho dmde}{3} - \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{m}}\frac{4\pi\gamma\int e\rho dmde}{3}.$$

После этого, если H зависит только от времени, можно перейти к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\eta}{dt} + 3H\eta = 0,$$

$$\frac{dH}{dt} + H^2 + \eta - \frac{c^2\Lambda}{6} = 0.$$

Фазовые траектории этой системы были исследованы в [38].

Мы видим, что нам несколько раз пришлось решить уравнение Пуассона $\Delta u = \text{const}$, что показывает не только эквивалентность введения лямбда-члена с какой-то субстанцией типа заряда e, удовлетворяющей этому уравнению, но и обосновывает потенциал Гурзадяна $U(r) = -\frac{\gamma}{r} + ar^2$ как альтернативное объяснение темной энергии [35]–[37]. Было бы хорошо объяснить расширенное ускорение без введения дополнительных предположений типа лямбда-члена или квадратичного потенциала, и насколько уравнение Эйнштейна (1.2) предоставляет такую возможность обоими слагаемыми в правой части – это предмет дальнейших рассмотрений.

Мы получили нерелятивистский аналог уравнений Фридмана, обобщающий решение Милна–МакКри [33], [34] в различных направлениях: ввели лямбда-член, обосновали их модель, выведя из системы Власова–Пуассона, ввели отталкивание субстанции по аналогии с кулоновским, перешли к уравнению Гамильтона–Якоби, поставили вопрос о зависимости постоянной Хаббла от массы и заряда субстанции.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы получили уравнения электродинамики и гравитации в замкнутой форме из принципа наименьшего действия в форме уравнения Власова (ср. [5]–[15]). Проясняется смысл уравнений типа Власова: это единственный пока способ получить и уравнение гравитации, и уравнения электродинамики из принципа наименьшего действия. А также единственный пока способ замкнуть систему уравнений гравитации и электродинамики с помощью принципа наименьшего действия, используя функцию распределения объектов(электронов, ионов, звезд в галактиках, галактик в супергалактиках или Вселенной) по скоростям и пространству. Соответствующие уравнения гидродинамического уровня (например, уравнения магнитной гидродинамики) также естественно получать из уравнений типа Власова гидродинамической подстановкой (пока единственный способ связи с классическим действием и для этих уравнений). Представляет значительный интерес исследовать различные классы решений полученных уравнений, как это делалось в [27]–[31]. Особый интерес должно представлять асимптотическое поведение решений уравнений Власова, и тут могла бы помочь его аналогия с уравнением Лиувилля [30]–[32]. Мы показали также, что полученные уравнения типа Власова должны быть применены к объяснению эволюции Вселенной, так как именно из уравнения Власова–Пуассона следуют нерелятивистские аналоги решений Фридмана, решения Милна–МакКри [33], [34]. При этом они являются точным следствием уравнения Власова–Пуассона, поэтому получаются без эвристических предположений работ [33], [34] и обосновывают и обобщают их. Эти решения позволили выяснить роль лямбда-члена, его эквивалентность потенциалу Гурзадяна $U(r) = -\frac{\gamma}{r} + ar^2$ и эквивалентность этого любой однородной субстанции, связанной с решением уравнения Пуассона $\Delta u = \text{const}$. Правая часть уравнения Эйнштейна дает надежду на объяснение ускоренного расширения Вселенной без этих дополнительных предположений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: ЛКИ, 2007.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1988.
3. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. М.: Мир, 1975. 696 с.
4. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986.
5. *Веденяпин В.В., Негматов М.А.* О выводе и классификации уравнений типа Власова и МГД. Тождество Лагранжа и форма Годунова // Теор. и матем. физ. 2012. Т. 170. № 3. С. 468–480.

6. *Веденяпин В.В., Негматов М.-Б.А., Фимин Н.Н.* Уравнения типа Власова и Лиувилля, их микроскопические, энергетические и гидродинамические следствия. Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81. № 3. С. 45–82.
7. *Веденяпин В.В., Негматов М.А.* О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тождество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса. СМФН, 2013. Т. 47. С. 5–17.
8. *Vedenyapin V., Sinitsyn A., Dulov E.* Kinetic Boltzmann, Vlasov and Related Equations (Elsevier Insights, 2011).
9. *Веденяпин В.В.* Уравнение Власова–Максвелла–Эйнштейна // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 188. 20 с.
10. *Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M.* The system of Vlasov–Maxwell–Einstein-type equations and its nonrelativistic and weak relativistic limits // International Journal of Modern Physics D. 2020. V. 29. № 1. 23 p.
11. *Vedenyapin V., Fimin N., Chechetkin V.* The properties of Vlasov–Maxwell–Einstein equations and its applications to cosmological models // European Physical Journal Plus. 2020. № 400. 14 с.
12. *Cercigniani C., Kremer G.M.* The relativistic Boltzmann Equation: theory and applications. Boston, Basel, Berlin: Birghause, 2002.
13. *Choquet-Bruhat Y., Damour T.* Introduction to general relativity, black holes and cosmology. New York: Oxford University Press. 2015.
14. *Rein G., Rendall A.D.* Global existence of solutions of the spherically symmetric Vlasov–Einstein system with small initial data, Commun. Math. Phys. 150, 561–583 (1992).
15. *Kandrup H.E., Morrison P.J.* Hamiltonian structure of the Vlasov–Einstein system and the problem of stability for spherical relativistic star clusters // Ann. Phys. 1993. V. 225. P. 114–166.
16. *Madelung E.* Quantentheorie in hydrodynamischer form (Quantum theory in hydrodynamic form), Z Phys, 40 (1926), 322–326.
17. *Аржаных И.С.* Поле импульсов, Наука, Ташкент, 1965, 231 с.; англ. пер.: Arzhanykh I.S., Momentum fields, Nat. Lending Lib., Boston Spa, Yorkshire, 1971. 222 pp.
18. *Долматов К.И.* Поле импульсов аналитической динамики, Дисс. ... канд. физ.-матем. наук, Ташкент. 1950. 84 с.
19. *Козлов В.В.* Гидродинамика гамильтоновых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех. 1983. № 6. 10–22; англ. пер.: Kozlov V.V. The hydrodynamics of Hamiltonian systems // Moscow Univ. Mech. Bull., 38:6 (1983), 9–23.
20. *Козлов В.В.* Общая теория вихрей. Изд-во Удмуртскогого ун-та, Ижевск, 1998. 239 с.
21. *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике, Изд-во Удмуртского гос. ун-та, Ижевск, 1995. 429 с.; англ. пер.: V.V. Kozlov, Symmetries, topology and resonances in Hamiltonian mechanics, Ergeb. Math.Grenzgeb. (3), 31, Springer-Verlag, Berlin, 1996, xii+378 pp.
22. *Веденяпин В.В., Аджиев С.З., Казанцева В.В.* Энтропия по Больцмана и Пуанкаре, экстремали Больцмана и метод Гамильтона–Якоби в негамильтоновой ситуации // СМФН. 2018. Т. 64. № 1. С. 37–59.
23. *Веденяпин В.В., Фимин Н.Н.* Метод Гамильтона–Якоби для негамильтоновых систем. Нелинейная динам., 11:2 (2015), 279–286.
24. *Веденяпин В.В., Фимин Н.Н.* Метод Гамильтона–Якоби в негамильтоновой ситуации и гидродинамическая подстановка. Докл. АН, 461:2 (2015), 136–139; англ. пер.: Vedenyapin V.V., Fimin N.N. The Hamilton–Jacobi method in the non-Hamiltonian situation and the hydrodynamic substitution. Dokl. Math., 91:2 (2015), 154–157.
25. *Веденяпин В.В., Негматов М.А.* О топологии стационарных решений гидродинамических и вихревых следствий уравнения Власова и метод Гамильтона–Якоби. Докл. АН, 449:5 (2013), 521–526; англ. пер.: Vedenyapin V.V., Negmatov M.A. On the topology of steady-state solutions of hydrodynamic and vortex consequences of the Vlasov equation and the Hamilton–Jacobi method. Dokl.Math., 87:2 (2013), 240–244.
26. *Веденяпин В.В., Фимин Н.Н.* Уравнение Лиувилля, гидродинамическая подстановка и уравнение Гамильтона–Якоби. Докл. АН, 446:2 (2012), 142–144; англ. пер.: Vedenyapin V.V., Fimin N.N. The Liouville equation, the hydrodynamic substitution, and the Hamilton–Jacobi equation. Dokl. Math., 86:2 (2012), 697–699.
27. *Веденяпин В.В.* Краевая задача для стационарных уравнений Власова. Докл. АН СССР, 290:4, 777–780; англ. пер.: Vedenyapin V.V. Boundary value problems for the steady-state Vlasov equation. Soviet Math. Dokl., 34:2 (1987), 335–338.
28. *Веденяпин В.В.* О классификации стационарных решений уравнения Власова на торе и граничная задача. Докл. АНСССР, 323:6 (1992), 1004–1006; англ. пер.: Vedenyapin V.V. On the classification of steady-state solutions of Vlasov's equation on the torus, and a boundary value problem. Russian Acad. Sci. Dokl. Math., 45:2 (1992), 459–462.
29. *Архипов Ю.Ю., Веденяпин В.В.* О классификации и устойчивости стационарных решений уравнения Власова на торе и в граничной задаче// Избранные вопросы математической физики и анализа, Сборник статей. К семидесятилетию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимирова, Тр. МИАН, 203, Наука, М., 1994, 13–20; англ. пер.: Arkhipov Yu.Yu., Vedenyapin V.V. On the classification and

stability of steady-state solutions of Vlasov's equation on a torus and in a boundary value problem// Proc. Steklov Inst. Math., 203 (1995).

30. *Веденяпин В.В.* Временные средние и экстремали по Больцману. Докл. АН, 422:2 (2008), 161–163; англ. пер.: Vedenyapin V.V. Time averages and Boltzmann extremals. Dokl.Math., 78:2 (2008), 686–688.
31. *Аджиев С.З., Веденяпин В.В.* Временные средние и экстремали Больцмана для марковских цепей, дискретного уравнения Лиувилля и круговой модели Каца // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 11. С. 2063–2074.
32. *Веденяпин В.В., Воронина М.Ю., Руссков А.А.* О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия. Докл. АН. 2020. Т. 495. С. 9–13.
33. *MilneE.A.* Relativity, Gravitation and World–Structure (Oxford Univ. Press, 1935).
34. *McCrea W.H., Milne E.A.* Quart. J. Math. 5, 73 (1934).
35. *Gurzadyan V.G.* The cosmological constant in the McCree-Miln Cosmological Scheme. Observatory 105, 42 (1985).
36. *Gurzadyan V.G.* On the common nature of Dark Energy and Dark Matter // Eur. Phys. J. Plus 134, 14 (2019).
37. *Gurzadyan V.G., Stepanyan A.* The cosmological constant derived via galaxy groups and clusters // Eur. Phys. J. C 79, 169 (2019).
38. *Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M.* The generalized Friedman model as a self–similar solution of Vlasov–Poisson equations system // European Physical Journal Plus. 136. № 670 (2021).
39. *Чернин А.Д.* Темная энергия и всемирное антитяготение // Успехи физ. наук. 2008. Т. 178. № 3. С. 267–300.
40. *Лукаш В.Н., Рубаков В.А.* Темная энергия: мифы и реальность // Успехи физ. наук. 2008. Т. 178. № 3. С. 301–308.