МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.63

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОГО ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ОБЛАСТИ, ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ВО ВРЕМЕНИ[1)]

© 2022 г. В. А. Галкин[1,2,*], А. О. Дубовик[1,2,]**

[1] 628412 Сургут, ХМАО-Югра, пр-т Ленина, 1, Сургутский гос. ун-т, Россия

[2] 628422 Сургут, ХМАО-Югра, ул. Базовая, 34, Сургутский филиал ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Россия

**e-mail: val-gal@yandex.ru*

***e-mail: alldubovik@gmail.com*

Поступила в редакцию 15.09.2021 г.
Переработанный вариант 15.09.2021 г.
Принята к публикации 16.12.2021 г.

Представлены классы точных решений для задач, описывающих течение несжимаемой жидкости в областях, изменяющихся во времени, полученные в рамках модели потенциального течения жидкости. Найденные точные решения используются для верификации результатов расчетов численного моделирования, полученные на основе метода контрольных объемов. Решение данного класса задач актуально в связи с исследованием задач управления параметрами несжимаемой жидкости за счет изменения области течения. Библ. 15. Фиг. 4. Табл. 2.

Ключевые слова: уравнения несжимаемой жидкости, точные решения, переменная область течения.

DOI: 10.31857/S0044466922050052

ВВЕДЕНИЕ

В рамках модели гидродинамики, описывающей течение несжимаемой жидкости, рассматривается задача о моделировании потенциального течения жидкости в области, изменяющейся во времени. Получены точные решения двух тестовых задач. Решение данного класса задач связано с задачами управления параметрами несжимаемой жидкости за счет изменения области течения. Постановка этого класса задач представлена в [1].

Исследованию задач динамики жидкости в областях, изменяющихся во времени, посвящено большое количество научных работ, например [2]–[6], однако все эти работы посвящены исключительно численному моделированию, а результаты расчетов проверяются сравнением с натурными экспериментальными данными или расчетами других авторов. Исключением является работа [7], в которой рассматривается задача о набегании волны, движущейся с постоянной скоростью, на вертикальный цилиндр. В этой статье представлено аналитическое решение внешней трехмерной задачи о потенциальном течении несжимаемой невязкой жидкости в неограниченной области со смешанными граничными условиями в области, изменяющейся во времени, при этом рассматриваются только постоянные значения потенциала скорости на границе области течения.

Верификация точными решениями результатов вычислительных экспериментов моделирования течения жидкости в изменяющихся во времени областях, как правило, отсутствует, что связано с ограниченностью количества известных классов точных решений рассматриваемых задач. В данной работе обобщаются на трехмерный случай точные решения и результаты численного моделирования потенциального течения жидкости в области, изменяющейся во времени, ранее представленные в двумерном варианте в [8]. Моделированию течения жидкости в области, изменяющейся во времени в рамках модели слоистого течения жидкости, и исследованию точного решения этой задачи посвящена работа [9].

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 20-04-60123).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Следуя [1], рассматривается система уравнений гидродинамики в эйлеровых координатах, описывающая течение несжимаемой жидкости в ограниченной области $D(t)$, $t > 0$, изменяющейся во времени:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \mu\Delta\mathbf{u}, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div}\,\mathbf{u} = 0. \tag{1.2}$$

В качестве управляющего воздействия на течение жидкости задается нормальная проекция векторного поля $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ на единичную внешнюю нормаль $\mathbf{n}$ к гладкой границе $D(t)$:

$$(\mathbf{u}, n)\big|_{\partial D(t)} = (\mathbf{V}, n)\big|_{\partial D(t)}, \tag{1.3}$$

где $\mathbf{u}$ – вектор скорости жидкости, t – время, ρ_0 – плотность жидкости, p – давление, μ – кинематическая вязкость, $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ – заданная функция координат и времени. Предполагается, что плотность и кинематическая вязкость жидкость являются постоянными величинами. Положим $\rho_0 = 1$. Отметим, что поле давления p определяется из уравнений (1.1), (1.2) с точностью до произвольной функции времени. Поскольку в дальнейшем предполагается исследование задачи (1.1)–(1.3) в рамках модели потенциального течения жидкости, то начальное условие не накладывается. Вместо него накладывается условие потенциальности течения.

В случае потенциального течения жидкости $\mathbf{u} = \nabla\Psi$ [10] решение задачи (1.1)–(1.3) сводится к решению задачи Неймана для уравнения Лапласа на нахождение потенциала скорости $\Psi(\mathbf{x}, t)$, где $\mathbf{x} \in D(t)$:

$$\Delta\Psi = 0, \tag{1.4}$$

$$\left.\frac{\partial \Psi}{\partial n}\right|_{\partial D(t)} = (\mathbf{V}, \mathbf{n})\big|_{\partial D(t)}, \tag{1.5}$$

$$p = -\frac{1}{2}(\nabla\Psi)^2 - \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \tag{1.6}$$

Следствием условия несжимаемости жидкости является постоянство объема области $D(t)$ в любой момент времени $t \geq 0$

$$\operatorname{vol}\, D(t) \equiv \operatorname{vol}\, D(0). \tag{1.7}$$

В [1] в качестве деформаций области течения, удовлетворяющих (1.7), рассматриваются деформации, задаваемые однопараметрической группой преобразований $T_t : R_n \to R_n$. Эта группа преобразований задается динамической системой, описываемой автономной системой уравнений $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{W}(\mathbf{x})$с гладким векторным полем $\mathbf{W} : R_n \to R_n$, $\operatorname{div}\,\mathbf{W} = 0$ так, что $D(t) = T_t D(0)$. В данной работе деформации области течения $D(t)$ задаются динамической системой, описываемой неавтономной системой уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad x(0) \in D(0), \tag{1.8}$$

где $\mathbf{u}$ – гладкое векторное поле и выполняется условие (1.2).

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Ниже описывается решение двух тестовых задач, при этом результаты численного моделирования верифицируются найденными точными решениями задач. В первой задаче область $D(t)$ – прямоугольный параллелепипед. Во второй задаче $D(t)$ – сферический слой.

Численное решение получено на основе метода контрольных объемов [11]. Решение уравнения Лапласа (1.4) найдено численно методом установления [12]. Решение системы линейных алгебраических уравнений, получаемой в результате дискретизации уравнений (1.4), (1.5) разностным оператором, найдено методом переменных направлений [11].

Аппроксимация расчетной области течения, состоящей из узлов сетки, производилась только в начальный момент времени. С течением времени эволюция узлов сетки подчиняется уравнению (1.8). В этих узлах наблюдались характеристики течения жидкости: скорость течения и давление в жидкости в каждый момент времени. То есть для идентификации параметров среды в произвольный момент времени используется лагранжева система координат [13], [14]. Подобная ситуация имеет место при применении метода “частиц” [15], часто используемого при решении задач механики сплошной среды, в которых наблюдается результат эволюции среды. Отметим, что проведение расчетов (1.4)–(1.6) в эйлеровых координатах является неудобным, поскольку для вычисления поля давления (1.6) требуется вычислить частную производную по времени от потенциала скорости $\Psi(\mathbf{x}, t)$, при этом необходимо учитывать, что эта функция в разные моменты времени имеет, вообще говоря, разную область определения $D(t)$, поэтому при расчетах используется переход к лагранжевой системе координат и, так как

$$\frac{d\Psi(\mathbf{x},t)}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \nabla\Psi \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt},$$

то в силу (1.8) вместо (1.6) имеем

$$p = \frac{1}{2}(\nabla\Psi)^2 - \frac{d\Psi}{dt}.$$

Расчеты выполнены на серии испытаний при увеличении числа узлов сетки, при этом их результаты демонстрировали уменьшение погрешности в узлах сетки пропорционально квадрату шага сетки по пространственной переменной в сравнении с точным решением задачи, описываемым ниже.

2.1. Решение задачи в прямоугольном параллелепипеде с подвижными стенками

Первая тестовая задача рассматривается в прямоугольном параллелепипеде, одна из вершин которого остается неподвижной (ее удобно поместить в начало координат), положение остальных изменяется с течением времени. В начальный момент времени $t = 0$ жидкость заполняет $D(0)$ – куб со стороной 1. В качестве управляющего воздействия на границе области течения – условие (1.5), задается следующее векторное поле:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x},t) = \alpha(t)\{x; y; -2z\},$$

где $\alpha(t)$ – произвольная непрерывно-дифференцируемая функция времени, при расчетах в тесте 1 полагается $\alpha(t) = \cos\pi t$, $\{x, y, z\}$ – декартовы координаты в области $D(t)$.

Аналитическое решение задачи (1.4)–(1.6) имеет вид

$$\Psi = \frac{\alpha(t)}{2}\left(x^2 + y^2 - 2z^2\right), \tag{2.1}$$

$$p = -\frac{1}{2}\alpha^2(t)\left(x^2 + y^2 + 4z^2\right) - \frac{\alpha'(t)}{2}\left(x^2 + y^2 - 2z^2\right). \tag{2.2}$$

Преобразование области $D(t)$ имеет вид

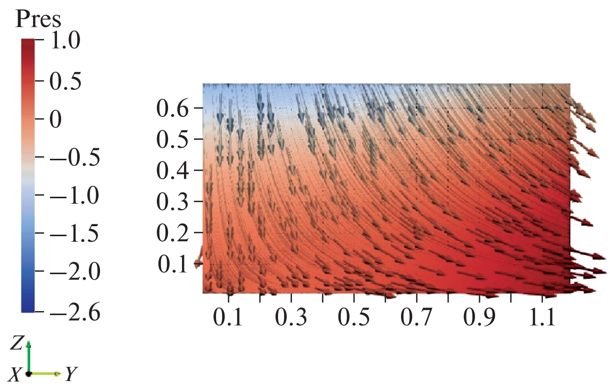
$$x = x_0 \exp\left\{\int_0^t \alpha(\tau)\,d\tau\right\},$$

$$y = y_0 \exp\left\{\int_0^t \alpha(\tau)\,d\tau\right\},$$

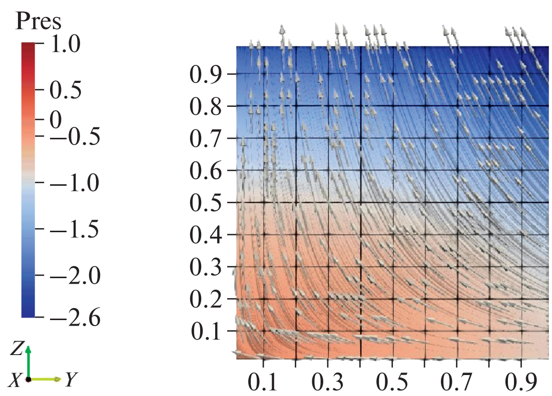
$$z = z_0 \exp\left\{-2\int_0^t \alpha(\tau)\,d\tau\right\},$$

где $(x_0, y_0, z_0) \in D(0)$. При таком преобразовании области ее объем сохраняется в любой момент времени, т.е. выполняется (1.7), что соответствует течению несжимаемой жидкости. В качестве $D(0)$ рассматривается куб со стороной 1. При указанном преобразовании области $D(t)$ с течением времени куб ($D(0)$) превращается в прямоугольный параллелепипед, вытянутый вдоль Ox и Oy, суженный вдоль Oz, а затем возвращается в исходное состояние. Далее область течения становится снова кубом, затем вытягивается вдоль Oz и сужается вдоль Ox и Oy, возвращается в исходное состояние. И описанное движение области течения повторяется сначала.

Результаты расчетов проиллюстрированы в условные моменты времени $t = 0.2$ и $t = 1$ на фиг. 1, 2 соответственно. На них изображено сечение области течения плоскостью yOz, сетка



Фиг. 1. Течение жидкости в плоскости yOz при $t = 0.2$ для теста 1.



Фиг. 2. Течение жидкости в плоскости yOz при $t = 1$ для теста 1.

числовых значений по оси Oy, расположенной горизонтально, и по оси Oz, расположенной вертикально, цветом отображены значения поля давления p, стрелками и линиями тока показано направление поля скорости $\mathbf{u} = \nabla\Psi$, соответствующее потенциальному течению жидкости.

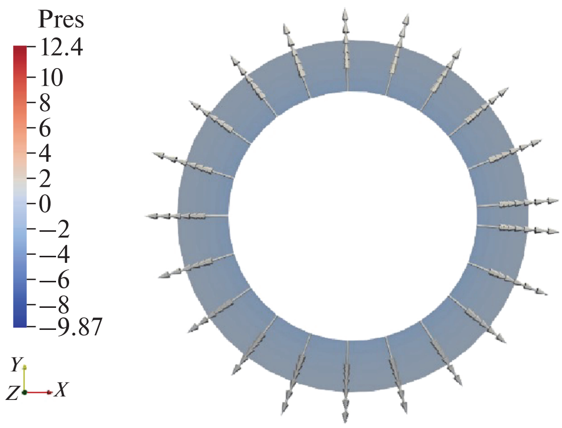
Найденное точное решение (2.1), (2.2) использовано для верификации результатов численного моделирования потенциального течения жидкости в прямоугольном параллелепипеде с подвижными стенками. Результаты представлены в табл. 1, при этом количество узлов сетки по пространственным переменным одинаково и составляет – 42, шаг по времени – 0.001. Расчеты проведены до условного момента времени $t = 1$.

2.2. Решение задачи в сферическом слое с переменными радиусами

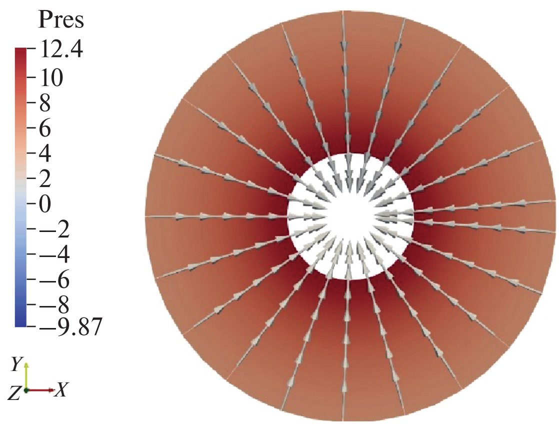
Вторая тестовая задача рассматривается в сферическом слое с переменными радиусами, центр области течения удобно поместить в начало координат, его положение не меняется с течением времени. В начальный момент времени $t = 0$ жидкость заполняет $D(0)$ – шар радиуса 1, предполагается, что центр шара не принадлежит области течения $D(t)$, т.е. область течения есть

Таблица 1. Результаты верификации тестовой задачи 1

Параметр, f	$\max\limits_{\mathbf{x},t}\lvert f_{an} - f_{calc}\rvert$	$\max\limits_{\mathbf{x},t}\dfrac{\lvert f_{an} - f_{calc}\rvert}{\lvert f_{an}\rvert}\times 100\%$
Ψ	3×10^{-6}	0.3%
p	4×10^{-5}	3%



Фиг. 3. Течение жидкости в плоскости xOy при $t = 0.3$ для теста 2.



Фиг. 4. Течение жидкости в плоскости xOy при $t = 0.9$ для теста 2.

сферический слой, а радиус меньшей сферы исчезающе мал. В качестве управляющего воздействия на границе области течения: условие (1.5), задается следующее векторное поле:

$$\mathbf{V}(\rho, \theta, \varphi, t) = \left\{ \frac{\alpha^2(t)\alpha'(t)}{\rho^2};\ 0;\ 0 \right\},$$

где $\alpha(t)$ – произвольная дважды непрерывно-дифференцируемая функция времени, при расчетах полагалось $\alpha(t) = \sin\pi t$. Векторное поле $\mathbf{V}$ записано в сферической системе координат $\{\rho, \theta, \varphi\}$, ρ – радиус-вектор некоторой точки области $D(t)$, θ – угол между положительным направлением оси Oz и радиус-вектором, φ – угол между проекцией радиус-вектора на плоскость xOy и осью Ox.

Аналитическое решение задачи (1.4)–(1.6) имеет вид

$$\Psi = -\frac{\alpha^2(t)\alpha'(t)}{\rho}, \tag{2.3}$$

$$p = -\frac{1}{2}\frac{\alpha^4(t)\alpha'^2(t)}{\rho^4} + \frac{2\alpha(t)\alpha'^2(t) + \alpha^2(t)\alpha''(t)}{\rho}. \tag{2.4}$$

Преобразование области $D(t)$ имеет вид

$$\rho(t) = \sqrt[3]{\rho_0^3 + \alpha^3(t)},$$
$$\varphi = \varphi_0,$$
$$\theta = \theta_0,$$

Таблица 2. Результаты верификации тестовой задачи 2

Параметр, f	$\max\limits_{\mathbf{x},t}\lvert f_{an} - f_{calc}\rvert$	$\max\limits_{\mathbf{x},t}\dfrac{\lvert f_{an} - f_{calc}\rvert}{\lvert f_{an}\rvert}\times 100\%$
Ψ	2×10^{-4}	0.07%
p	0.02	0.13%

где $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) \in D(0)$. При таком преобразовании области течения ее объем сохраняется, т.е. выполняется 1.7, что соответствует течению несжимаемой жидкости. В качестве $D(0)$ рассматривается шар радиуса 1. При указанном преобразовании области $D(t)$ с течением времени шар превращается в сферический слой. Внешний радиус описывается выражением

$$\rho(t) = \sqrt[3]{1 + \alpha^3(t)},$$

внутренний – $\rho(t) = \alpha(t)$. Затем возвращается в исходное состояние.

Результаты расчетов проиллюстрированы в моменты времени $t = 0.3$ и $t = 0.9$ на фиг. 3, 4 соответственно. На них изображено сечение области течения плоскостью xOy, обозначения те же, что и предыдущих фигурах. В начальный момент времени и при $t = 1$ жидкость покоится, давление отсутствует. В силу симметрии характеристика течения жидкости в проекции на любую плоскость, проходящую через центр области, будет иметь такой же вид, как и на представленных фигурах.

Найденное точное решение (2.3), (2.4) использовано для верификации результатов численного моделирования потенциального течения жидкости в сферическом слое. Результаты представлены в табл. 2, при этом количество узлов сетки по пространственным переменным соответствует значениям, представленным в тесте 1, шаг по времени тот же. Расчеты так же проведены до условного момента времени $t = 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены два класса точных решений уравнений Навье–Стокса в случае потенциального течения несжимаемой жидкости в переменной во времени области течения. При этом на границе области течения задается нормальная составляющая скорости течения. Результаты расчетов верифицированы найденными точными решениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бетелин В.Б., Галкин В.А.* Управление параметрами несжимаемой жидкости при изменении во времени геометрии течения // Докл. АН. 2015. Т. 463. № 2. С. 149–151.
2. *Antuono M., Sun P.N., Marrone S., Colagrossi A.* The δ–ALE–SPH model: an arbitrary Lagrangian-Eulerian framework for the δ–SPH model with Particle Shifting Technique // Computer & Fluids. 2020. 104806.
3. *Mohammed A. et al.* CFD and statistical approach to optimize the average air velocity and air volume fraction in an inert-particles spouted-bed reactor (IPSBR) system // Heliyon. 2021. V. 7. I. 3. E06369.
4. *Ren X., Xu K., Shyy W.* A multi-dimensional high-order DG-ALE method based on gas-kinetic theory with application to oscillating bodies // J. of Computat. Phys. 2016. V. 316. P. 700–720.
5. *Elgeti S., Sauerland H.* Deforming fluid domains within the finite element method: five mesh based tracking methods in comparison // Archives of Computat. Methods in Engng. 2016. V. 23. P. 323–361.
6. *Бураго Н.Г., Никитин И.С., Якушев В.Л.* Применение наложенных сеток к расчету течений в областях переменной геометрии // Сб. трудов XX юбилейной межд. конф. по вычисл. механ. и совр. прикладным системам. 2017. С. 395–397.
7. *Chatjigeorgiou I.K., Korobkin A.A., Cooker M.J.* Three-Dimensional steep wave impact on a vertical cylinder // J. of Hydrodynamics. 2016. V. 28. № 4. P. 523–533.
8. *Бетелин В.Б., Галкин В.А., Дубовик А.О.* Точные решения системы Навье–Стокса для несжимаемой жидкости в случае задач, связанных с нефтегазовой отраслью // Докл. АН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 495. № 1. С. 13–16.

9. *Галкин В.А., Дубовик А.О.* О моделировании слоистого течения вязкой проводящей жидкости в области, изменяющейся во времени // Матем. моделирование. 2020. Т. 32. № 4. С. 31–42.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учебн. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. 5-е изд., стереот. М.: Физматлит, 2001. 736 с.
11. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
12. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
13. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч. 1. М.: Наука, 1986. 640 с.
14. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.
15. *Григорьев Ю.Н., Вшивков В.А., Федорук М.П.* Численное моделирование методами “Частицы-в-ячейках”. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2004. 360 с.