ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 7, с. 1115–1137

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.952

ЗАДАЧА ШВАРЦА ДЛЯ *J*-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ЭЛЛИПСЕ

В. Г. Николаев

173003 Великий Новгород, ул. Большая Санкт-Петербургская, 41,
Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Россия
e-mail: vg14@inbox.ru

Поступила в редакцию 14.11.2021 г.
Переработанный вариант 14.11.2021 г.
Принята к публикации 14.01.2022 г.

Рассмотрена задача Шварца для функций, аналитических по Дуглису в эллипсе. Получены необходимые и достаточные условия на $\ell \times \ell$-матрицу J и эллипс Γ, при которых решение задачи Шварца существует и единственно в классах Гёльдера. Для $\ell = 2$ и матриц с разными собственными значениями проведена редукция задачи Шварца к скалярному функциональному уравнению. Получены достаточные условия на жорданов базис матрицы J, при которых задача Шварца разрешима в произвольном эллипсе. Рассмотрены матрицы J с собственными значениями, лежащими как выше, так и ниже вещественной оси. Библ. 15.

Ключевые слова: J-аналитические функции, λ-голоморфные функции, собственное значение матрицы, эллипс, индекс оператора.

DOI: 10.31857/S0044466922050106

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование краевых задач для различных классов аналитических функций имеет давнюю историю (см. [1]–[3]), и в последние годы развивались в нескольких направлениях как теоретического характера (см. [4], [5]), так и с точки зрения их приложений к задачам общей теории краевых задач для (псевдо)дифференциальных уравнений (см. [6]–[8]).

Задача Римана–Гильберта (см. [1], [3]) о нахождении аналитической в области функции по заданному на границе значению ее вещественной части относится к одной из ключевых краевых задач. Одним из возможных обобщений этой краевой задачи является задача Шварца для аналитических по Дуглису функций, специальный случай которой рассмотрен в этой работе.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Определение 1 (см. [4], [9], [10]). Пусть матрица $J \in \mathbb{C}^{\ell\times\ell}$ не имеет вещественных собственных значений. Аналитической по Дуглису, или J-аналитической с матрицей J называется комплексная ℓ-вектор-функция $\phi = \phi(z) \in C^1(D)$, для которой в области $D \subset \mathbb{R}^2$ выполнено уравнение

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} - J \cdot \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, \quad z \in D. \tag{1}$$

В [4] показано, что система дифференциальных уравнений в частных производных (1) является эллиптической. Примером J-аналитической функции может служить вектор-полином вида

$$\phi(z) = (Ex + Jy)^n \cdot c_n, \quad c_n \in \mathbb{C}^\ell, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где E — единичная $\ell \times \ell$-матрица.

Определение 2. В скалярном случае, при $\ell = 1$, $J = \lambda$, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ J-аналитическую в области D функцию будем называть λ-голоморфной в области D. Для этих функций введем обозначение $f_\lambda(z)$. Соответственно, через $g_\mu(z)$ обозначим μ-голоморфную функцию.

Примерами λ-голоморфных функций являются полиномы вида $f_\lambda(z) = c_n(x + \lambda y)^n$, $c_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Определение 3. Будем говорить, что функция $\phi(z)$ соответствует матрице J, если она удовлетворяет уравнению (1).

Замечание 1. Из равенства (1) вытекает, что если функция $\phi(z)$ соответствует матрице J, то и функция $\phi^*(z) = \alpha \cdot \phi(z) + c$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}^\ell$, соответствует той же матрице J.

Замечание 2. Пусть $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 i$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \neq 0$. Посредством простых преобразований несложно показать, что в результате подстановки $x = x' + \lambda_1 y'$, $y = \lambda_2 y'$ функция $f(x, y)$, голоморфная в области D, станет λ-голоморфной функцией $f_\lambda(x', y')$, определенной в некоторой области D_λ. Соответственно, после обратной подстановки

$$y' = \frac{y}{\lambda_2}, \quad x' = x - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} y$$

функция $f_\lambda(x', y')$ станет голоморфной функцией $f(x, y)$.

Таким образом, с учетом замечания 2 и известных свойств голоморфных функций [11], справедлива

Лемма 1. *Пусть конечная область* $D \subset \mathbb{R}^2$ *ограничена контуром* Γ. *Тогда если* λ*-голоморфная функция* $f_\lambda(z)|_\Gamma = 0$, *то* $f_\lambda(z) \equiv 0$. *Кроме того, если* $\operatorname{Re} f_\lambda(z)|_\Gamma = c_1$, *то* $f_\lambda(z) \equiv c_1 + ic_2$, *где* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим для эллиптической системы (1) следующую краевую задачу Шварца (см. [9], [10]).

Пусть конечная область $D \subset \mathbb{R}^2$ ограничена гладким контуром Γ. Требуется найти J-аналитическую с матрицей J в области D функцию $\phi(z) \in C(\overline{D})$, которая удовлетворяет краевому условию

$$\operatorname{Re} \phi(z)|_\Gamma = \psi(\omega), \quad \omega \in \Gamma, \tag{2}$$

где граничная ℓ-вектор-функция $\psi(\omega) = (\psi_1(\omega), \ldots, \psi_\ell(\omega))^{\mathrm{T}} \in C(\Gamma)$ задана.

Если $\psi(\omega) \equiv 0$, то будем говорить об однородной задаче Шварца:

$$\operatorname{Re} \phi(z)|_\Gamma = 0. \tag{3}$$

Очевидными решениями задачи (3) служат постоянные функции $\phi(z) \equiv ic$, $c \in \mathbb{R}^\ell$, которые назовем *тривиальными решениями*.

Для $\ell \geq 2$ возможны непостоянные решения однородной задачи (3). Приведем два примера для $\ell = 2, 3$.

Пример 1. Пусть $\ell = 2$,

$$J = \begin{pmatrix} -i & 4 \\ 1 & 3i \end{pmatrix}, \quad \phi(z) = \begin{pmatrix} 3x^2 + y^2 - 1 + 2xyi \\ i(x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$

Функция $\phi(z)$ соответствует матрице J, которая имеет кратное собственное значение $\lambda = i$. Имеем $\operatorname{Re} \phi(z)|_\Gamma = 0$ на эллипсе Γ: $3x^2 + y^2 = 1$.

Пример 2. Пусть $\ell = 3$. Матрица

$$J = \frac{-1}{1 + 2i} \begin{pmatrix} 4 - 2i & -25i & 5i - 10 \\ 0 & 4 + 3i & 2 - i \\ 0 & 8 - 4i & -5i \end{pmatrix}$$

имеет собственные значения $\lambda = i$, $\mu = i$, $\eta = 2i$. Данной матрице J соответствует функция

$$\phi(z) = \begin{pmatrix} -5(x^2 + y^2)i \\ (x^2 + y^2)i \\ 2(x^2 + xy + y^2 - 1) + (y^2 - x^2)i \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $\operatorname{Re} \phi(z)|_\Gamma = 0$ на эллипсе Γ: $x^2 + xy + y^2 = 1$.

3. ГРАНИЧНЫЕ ПОЛИНОМЫ И ТИЛЬДА-ПОЛИНОМЫ

В настоящей статье задача Шварца рассматривается только в эллипсе. В связи с этим несколько слов о терминологии. Будем называть *эллипсом* не только кривую Γ на плоскости, но также и область K, ограниченную кривой Γ, — в зависимости от контекста. Такая договоренность упростит изложение.

Данный раздел полностью посвящен изложению основных результатов из работы [12]. Затем эти результаты будут применены к изучению задачи Шварца в эллипсе.

Пусть вещественные параметры r_1, r_2 — полуоси эллипса, где $r_1, r_2 > 0$, и пусть $\alpha \in [0, 2\pi)$ — угол в положительном направлении между полуосью эллипса длины r_1 и положительным направлением оси Ox. Тогда эллипс Γ с центром в начале координат может быть задан параметрическим уравнением

$$\Gamma\colon \omega(t) = \begin{cases} x(t) = r_1\cos\alpha\cdot\cos t - r_2\sin\alpha\cdot\sin t, \\ y(t) = r_1\sin\alpha\cdot\cos t + r_2\cos\alpha\cdot\sin t, \quad t\in[-\pi,\pi). \end{cases} \tag{4}$$

Пусть функция $\psi = \psi(\omega)$, $\omega\in\Gamma$, определена на эллипсе Γ. Формула (4) задает взаимно однозначное отображение $\omega = \omega(t)$ интервала $[-\pi,\pi)$ на эллипс Γ как на множество. Поэтому корректно определена функция

$$\psi'(t) = \psi(\omega(t)), \quad t\in[-\pi,\pi). \tag{5}$$

Определение 4. Пусть $\omega = \omega(t)$ — параметризация (4) эллипса Γ. С учетом (5) будем отождествлять функции $\psi(\omega)$, $\omega\in\Gamma$ и $\psi'(t)$, $t\in[-\pi,\pi)$.

Определение 5. Под функцией $\psi(\omega)\in H^\sigma(\Gamma)$ будем понимать функцию $\psi'(t)$, непрерывную по Гёльдеру с показателем $\sigma\in(0,1)$ на интервале $t\in[-\pi,\pi)$. Обозначим через $H^\sigma(\overline{K})$, $\sigma\in(0,1)$, класс функций, непрерывных по Гёльдеру в замыкании $\overline{K}$ эллипса K.

Пусть $a, b\in\mathbb{C}$, причем $a\neq 0$. Для $n = 1, 2, 3\ldots$ рассмотрим выражение

$$f_n(t) = e^{\mathrm{int}} + \frac{b^n}{a^n}e^{-\mathrm{int}}, \quad |a| > |b|, \quad a\neq 0, \quad t\in[-\pi,\pi). \tag{6}$$

Следуя [12], будем называть функции $f_n(t)$ вида (6) *граничными полиномами*. Как нетрудно видеть, функции $f_n(t)$ попарно ортогональны на интервале $t\in[-\pi,\pi)$.

Далее, пусть $\lambda, a, b\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$, $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$. Согласно [4] введем обозначения

$$[z] = x + \lambda y, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2; \quad [z]_t = ae^{\mathrm{it}} + be^{-\mathrm{it}}, \quad t\in[-\pi,\pi). \tag{7}$$

Замечание 3. Ниже будем отождествлять обозначения $f(z)$ и $f([z])$. Так же будем обозначать $z = x + \lambda y$. Это сделает изложение более удобным.

Пусть $\zeta_{nk}\in\mathbb{C}$. Рассмотрим комплексные функции $\tilde f_n(z) = \tilde f_n([z])$, которые являются полиномами n-й степени переменной $[z]$:

$$\begin{gathered} \tilde f_n(z) = \tilde f_n([z]) = \zeta_{n1}[z]^n + \zeta_{n2}[z]^{n-2} + \ldots + \zeta_{ns-1}[z]^3 + \zeta_{ns}[z], \quad n = 1,3,5,\ldots; \\ \tilde f_n(z) = \tilde f_n([z]) = \zeta_{n1}[z]^n + \zeta_{n2}[z]^{n-2} + \ldots + \zeta_{ns-1}[z]^2 + \zeta_{ns}, \quad n = 2,4,6,\ldots. \end{gathered} \tag{8}$$

Нетрудно убедиться в том, что полиномы $\tilde f_n(z)$, а так же функция $[z] = x + \lambda y$, λ-голоморфны во всей плоскости $\mathbb{C}$. Справедлива

Лемма 2. *Для каждого* $n\in\mathbb{N}$ *существует единственный набор чисел* $\zeta_{nk}\in\mathbb{C}$, $k = 1,\ldots,s$, *такой, что*

$$\tilde f_n([z]_t) = e^{\mathrm{int}} + \frac{b^n}{a^n}e^{-\mathrm{int}} = f_n(t), \quad t\in[-\pi,\pi), \tag{9}$$

где

$$s = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2}, & n = 1,3,5,\ldots, \\ \dfrac{n+2}{2}, & n = 2,4,6,\ldots. \end{cases}$$

При этом $\zeta_{n1} = \dfrac{1}{a^n}$.

Определение 6 (см. [12]). Полиномы $\tilde{f}_n(z)$ вида (8) с коэффициентами ζ_{nk} такими, что верна формула (9), называются тильда-полиномами степени n.

Подставим параметризацию (4) некоторого эллипса Γ в выражение $[z] = x + \lambda y$. Затем выразим $\cos t$, $\sin t$ как функции переменных e^{it} и $e^{-\mathrm{it}}$ с помощью формулы Эйлера $e^{\mathrm{it}} = \cos t + i \sin t$. В результате получим выражение $[z]_t$ в (7), но при этом числа $a, b \in \mathbb{C}$ определены однозначно параметрами r_1, r_2, α эллипса Γ, а также числом λ, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ и имеют вид

$$a = a(\alpha, \lambda, r_1, r_2) = \frac{r_1\cos\alpha + ir_2\sin\alpha + \lambda(r_1\sin\alpha - ir_2\cos\alpha)}{2},$$
$$b = b(\alpha, \lambda, r_1, r_2) = \frac{r_1\cos\alpha - ir_2\sin\alpha + \lambda(r_1\sin\alpha + ir_2\cos\alpha)}{2}, \tag{10}$$
$$r_1 > 0, \quad r_2 > 0, \quad \alpha \in [0, 2\pi).$$

Относительно чисел a, b (10) справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Если* $\operatorname{Im}\lambda > 0$, *то* $a \neq 0$, $|a| > |b|$. *Если* $\operatorname{Im}\lambda < 0$, *то* $b \neq 0$, $|b| > |a|$.

В результате сделанных преобразований и с учетом обозначений (7) имеем равенство

$$[z]\big|_\Gamma = (x + \lambda y)\big|_\Gamma = ae^{\mathrm{it}} + be^{-\mathrm{it}} = [z]_t, \quad t \in [-\pi, \pi), \tag{11}$$

которое понимается в смысле определения 4.

С учетом (11), леммы 2 и определения 4 справедлива

Лемма 3. *Для каждого граничного полинома* $f_n(t)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, *вида* (6) *существует единственный тильда-полином* $\tilde{f}_n(z)$ (8) *такой, что*

$$\tilde{f}_n(z)\big|_\Gamma = f_n(t), \quad t \in [-\pi, \pi). \tag{12}$$

Следует отметить, что на формуле (12) основаны практически все приведенные ниже построения.

4. ГРАНИЧНАЯ СТРУКТУРА J-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ЭЛЛИПСЕ

Пусть матрица J_1 — жорданова форма матрицы $J \in \mathbb{C}^{\ell\times\ell}$, и пусть столбцы матрицы Q — это жорданов базис J. Тогда, как известно, справедливо равенство $J = QJ_1Q^{-1}$. Подставим это выражение в (1):

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} - QJ_1Q^{-1}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, \quad \phi = \phi(z),$$

и умножим обе части последнего равенства слева на матрицу Q^{-1}:

$$\frac{\partial}{\partial y}(Q^{-1}\phi) - J_1\cdot\frac{\partial}{\partial x}(Q^{-1}\phi) = 0. \tag{13}$$

Пусть в (13)

$$Q^{-1}\cdot\phi(z) = (g_1(z), \ldots, g_\ell(z))^{\mathrm{T}} = g^*(z), \tag{14}$$

где $g_k(z)$ — скалярные функции. Таким образом, с учетом (13) и (14) справедливо

Предложение 2. *Общее решение уравнения* (1) *представимо в виде*

$$\phi(z) = Q \cdot (g_1(z), \ldots, g_\ell(z))^{\mathrm{T}} = Q \cdot g^*(z), \tag{15}$$

где функция $g^*(z)$ (14) *есть решение уравнения* (13).

Нашей дальнейшей задачей будет определение структуры функций $g_k(z)$ в (14), (15).

Обозначим через $J_{\lambda_l}^{(m_l)}$ нижне треугольные жордановы клетки размера $m_l \times m_l$ с собственным значением λ_l матрицы J по главной диагонали. При этом $1 \le m_l \le \ell$. Тогда, как известно, жорданова $\ell \times \ell$-матрица J_1 имеет вид

$$J_1 = \operatorname{diag}\left(J_{\lambda_1}^{(m_1)}, J_{\lambda_2}^{(m_2)}, \ldots, J_{\lambda_s}^{(m_s)}\right), \quad m_1 + m_2 + \ldots + m_s = \ell. \tag{16}$$

С учетом блочно-диагональной структуры жордановой матрицы J_1 (16) достаточно определить структуру функций $g_k(z)$ для того случая, когда матрица J_1 есть жорданова клетка размера $m \times m$ с собственным значением λ по главной диагонали. Затем полученный результат распространим на общий случай.

Для определенности будем считать жорданову клетку $J_1 = J_\lambda^{(m)}$ нижне треугольной. Таким образом, с учетом обозначений (13) и (14) нужно найти общее решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial y} g^*(z) - J_\lambda^{(m)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} g^*(z) = 0, \tag{17}$$

где

$$J_\lambda^{(m)} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \ldots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Im} \lambda \neq 0, \tag{18}$$

есть нижне треугольная жорданова клетка размера $m \times m$. Пусть $g^*(z) = (g_1, \ldots, g_m)$ и запишем (17) более подробно с учетом (18):

$$\frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} g_1(z) \\ \vdots \\ g_k(z) \\ \vdots \\ g_m(z) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \ldots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} g_1(z) \\ \vdots \\ g_k(z) \\ \vdots \\ g_m(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Как нетрудно видеть, (19) распадается на следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно функций $g_k(z)$, $k = 1, \ldots, m$:

$$\begin{gathered} \frac{\partial g_1}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial g_2}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x} = \frac{\partial g_1}{\partial x}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x} = \frac{\partial g_{k-1}}{\partial x}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x} = \frac{\partial g_{m-1}}{\partial x}. \end{gathered} \tag{20}$$

Справедлива

Лемма 4. *Функция* $g_1(z)$ *в* (20) *является* λ*-голоморфной. При* $k \ge 2$ *функции* $g_k(z)$ *как решения уравнений* (20) *представимы в виде*

$$\begin{aligned} g_k(z) &= \sum_{r=1}^{k-1} \frac{y^{k-r}}{(k-r)!} \cdot \frac{\partial^{k-r} f_r(z)}{\partial x^{k-r}} + f_k(z) = \\ &= \sum_{r=1}^{k-1} \frac{y^{k-r}}{(k-r)!} \cdot \frac{d^{k-r} f_r(z)}{dz^{k-r}} + f_k(z), \quad k = 2,\ldots,m, \end{aligned} \tag{21}$$

где $f_k(z)$ *— произвольные* λ*-голоморфные функции.*

Доказательство. Функция $g_1(z) = f_1(z)$ будет λ-голоморфной в силу определения 2. Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что решение второго уравнения ($k = 2$) в (21) представимо в виде

$$g_2(z) = y \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} + f_2(z) = y \cdot \frac{df_1}{dz} + f_2(z), \quad k = 2, \tag{22}$$

где $f_2(z)$ — произвольная λ-голоморфная функция. Формула (22) совпадает с (21) при $k = 2$, т.е. ее можно считать *базой индукции*. Далее применяем индукцию по k: пусть формула (21) справедлива для g_{k-1}, т.е. имеет место равенство

$$g_{k-1}(z) = \sum_{r=1}^{k-2} \frac{y^{k-1-r}}{(k-1-r)!} \cdot \frac{d^{k-1-r} f_r(z)}{dz^{k-1-r}} + f_{k-1}(z). \tag{23}$$

При этом в (23) функции $f_1(z),\ldots,f_{k-1}(z)$ являются по предположению индукции λ-голоморфными. Будем искать функцию $g_k(z)$ в виде

$$g_k(z) = \sum_{r=1}^{k-1} \frac{y^{k-r}}{(k-r)!} \cdot \frac{\partial^{k-r} f_r(z)}{\partial x^{k-r}} + g'(x,y), \tag{24}$$

где $g'(x,y) \in C^1(D)$ есть некоторая функция, подлежащая определению.

Заметим, что формулы (24) и (21) отличаются только последним слагаемым $g'(x,y)$, которое нужно определить. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_k}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x} &= \sum_{r=1}^{k-1} \frac{y^{k-r-1}}{(k-r-1)!} \cdot \frac{\partial^{k-r} f_r(z)}{\partial x^{k-r}} + \\ &+ \sum_{r=1}^{k-1} \frac{y^{k-r}}{(k-r)!} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^{k-r} f_r(z)}{\partial x^{k-r}} + \frac{\partial}{\partial y} g'(x,y) - \\ &- \sum_{r=1}^{k-1} \lambda \frac{y^{k-r}}{(k-r)!} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^{k-r} f_r(z)}{\partial x^{k-r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial x} g'(x,y) = \\ &= \sum_{r=1}^{k-1} \frac{y^{k-r-1}}{(k-r-1)!} \cdot \frac{\partial^{k-r} f_r(z)}{\partial x^{k-r}} + \frac{\partial}{\partial y} g'(x,y) - \lambda \frac{\partial}{\partial x} g'(x,y) = \\ &= \sum_{r=1}^{k-2} \frac{y^{k-r-1}}{(k-r-1)!} \cdot \frac{\partial^{k-r} f_r(z)}{\partial x^{k-r}} + \frac{\partial}{\partial x} f_{k-1}(z) + \frac{\partial}{\partial y} g'(x,y) - \lambda \frac{\partial}{\partial x} g'(x,y) = \\ &= \sum_{r=1}^{k-2} \frac{y^{k-r-1}}{(k-r-1)!} \cdot \frac{\partial^{k-r} f_r(z)}{\partial x^{k-r}} + \frac{\partial}{\partial x} f_{k-1}(z) = \frac{\partial}{\partial x} g_{k-1}(z), \end{aligned} \tag{25}$$

если положить $g'(x,y) = f_k(z)$, где $f_k(z)$ — произвольная λ-голоморфная функция. Таким образом, согласно (25) функция $g_k(z)$ (21) есть решение уравнения

$$\frac{\partial g_k}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x} = \frac{\partial g_{k-1}}{\partial x},$$

что и требовалось. Лемма 4 доказана.

Заметим, что

$$y = \frac{x + (\lambda_1 + \lambda_2 i)y - [x + (\lambda_1 - \lambda_2 i)y]}{2\lambda_2 i} = \frac{[z] - \overline{[z]}}{2\lambda_2 i} = \frac{z - \overline{z}}{2\lambda_2 i}. \tag{26}$$

Подставим (26) в (21). Тогда с учетом леммы 4 доказана

Лемма 5. *Общее решение* $g^*(z) = (g_1, \ldots, g_m)$ *уравнения* (19) *представимо в виде*

$$\begin{gathered} g_1(z) = f_1(z), \\ g_k(z) = \sum_{r=1}^{k-1} \frac{1}{(k-r)!} \cdot \left(\frac{z - \overline{z}}{2\lambda_2 i}\right)^{k-r} \cdot \frac{d^{k-r} f_r(z)}{dz^{k-r}} + f_k(z), \quad k = 2, \ldots, m, \end{gathered} \tag{27}$$

где $f_k(z)$ *— произвольные* λ*-голоморфные функции.*

Ниже функции $g_k(z)$ будем использовать именно в виде (27). В силу (11) и замечания 3 при $q \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{z - \overline{z}}{2\lambda_2 i}\right)^q\bigg|_\Gamma &= \left(\frac{(a - \overline{b})e^{\mathrm{it}} + (b - \overline{a})e^{-\mathrm{it}}}{2\lambda_2 i}\right)^q = \\ &= \left(\frac{a - \overline{b}}{2\lambda_2 i}\right)^q \cdot e^{\mathrm{iqt}} + \left(\frac{b - \overline{a}}{2\lambda_2 i}\right)^q \cdot e^{-\mathrm{iqt}} + P_{q-1}(t), \end{aligned} \tag{28}$$

где функция $P_{q-1}(t)$ зависит от $e^{\pm \mathrm{ikt}}$ при $k < q$.

Пусть теперь $\tilde{f}_n(z) = \zeta_{n1}[z]^n + \ldots$ — тильда-полином (8) степени n. Тогда

$$\frac{d^q \tilde{f}_n(z)}{dz^q} = \zeta_{n1} n \cdot (n-1) \cdots (n-q+1) z^{n-q} + P_{n-q-1}(z), \tag{29}$$

где $P_{n-q-1}(z)$ — некоторый полином переменной $z = x + \lambda y$ степени $n - q - 1$. Выпишем граничное значение функции $\frac{d^q \tilde{f}_n(z)}{dz^q}$ на Γ, для чего подставим в правую часть (29) вместо z выражение $[z]_t = ae^{\mathrm{it}} + be^{-\mathrm{it}}$:

$$\begin{aligned} \frac{d^q \tilde{f}_n(z)}{dz^q}\bigg|_\Gamma &= \zeta_{n1} \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-q+1)(ae^{\mathrm{it}} + be^{-\mathrm{it}})^{n-q} + P_{n-q-1}(t) = \\ &= \zeta_{n1} \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-q+1) a^{n-q} e^{(\mathrm{n-q})\mathrm{it}} + \\ &+ \zeta_{n1} \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-q+1) b^{n-q} e^{-(\mathrm{n-q})\mathrm{it}} + P_{n-q-1}(t), \end{aligned} \tag{30}$$

где функция $P_{n-q-1}(t)$ зависит от $e^{\pm \mathrm{ikt}}$ при $k < n - q$.

Подставим теперь в (27) в качестве функций $f_r(z)$ выражения $\alpha_{nr}\tilde{f}_n(z)$, т.е. λ-голоморфные тильда-полиномы $\tilde{f}_n(z)$ степени n с некоторыми коэффициентами $\alpha_{nr} \in \mathbb{C}$. Нас интересует граничное значение полученной таким образом функции $g_k(z)$ на эллипсе $\Gamma = \partial K$. В силу (27), (28), (30) и произвольности выбора $q \in \mathbb{N}$ имеем, полагая в (30) $q = k - r$:

$$\begin{gathered} g_k(z)|_\Gamma = g_k(t) = \sum_{r=1}^{k-1} \alpha_{nr} \left[\frac{\zeta_{n1}}{(k-r)!} \cdot \left(\frac{a - \overline{b}}{2\lambda_2 i}\right)^{k-r} \cdot [n(n-1) \cdots (n-k+r+1) a^{n-k+r}]\right] \cdot e^{\mathrm{int}} + \\ + \sum_{r=1}^{k-1} \alpha_{nr} \left[\frac{\zeta_{n1}}{(k-r)!} \cdot \left(\frac{b - \overline{a}}{2\lambda_2 i}\right)^{k-r} \cdot [n(n-1) \cdots (n-k+r+1) b^{n-k+r}]\right] \cdot e^{-\mathrm{int}} + P_{kn-1}(t), \\ k = 2, \ldots, m, \end{gathered} \tag{31}$$

где функции $P_{kn-1}(t)$ зависят от $e^{\pm \mathrm{irt}}$ при $r < n$.

В целях упрощения дальнейших преобразований введем обозначения для выражений в квадратных скобках в равенстве (31):

$$\chi^{+}_{nkr} = \frac{\zeta_{n1}}{(k-r)!}\cdot\left(\frac{a-\overline{b}}{2\lambda_2 i}\right)^{k-r}\cdot[n(n-1)\cdots(n-k+r+1)]a^{n-k+r},$$

$$\chi^{-}_{nkr} = \frac{\zeta_{n1}}{(k-r)!}\cdot\left(\frac{b-\overline{a}}{2\lambda_2 i}\right)^{k-r}\cdot[n(n-1)\cdots(n-k+r+1)]b^{n-k+r}, \tag{32}$$

$$k = 2,\ldots,m.$$

С учетом леммы 5 в качестве функции $g_1(z)$ возьмем λ-голоморфный тильда-полином $\tilde{f}_1(z)$ степени n с коэффициентом $\alpha_{n1}\in\mathbb{C}$. Тогда в силу (6), (12), (31) и (32) имеем

$$g_1(z)\big|_{\Gamma} = g_1(t) = \alpha_{n1}\tilde{f}_1(t) = \alpha_{n1}\left(e^{\text{int}} + \frac{b^n}{a^n}e^{-\text{int}}\right),$$

$$g_k(z)\big|_{\Gamma} = g_k(t) = \left(\sum_{r=1}^{k-1}\alpha_{nr}\chi^{+}_{nkr}\right)\cdot e^{\text{int}} + \left(\sum_{r=1}^{k-1}\alpha_{nr}\chi^{-}_{nkr}\right)\cdot e^{-\text{int}} + P_{kn-1}(t),$$

$$k = 2,\ldots,m, \tag{33}$$

где функции $P_{kn-1}(t)$, как и в (31), зависят от $e^{\pm\text{irt}}$ при $r<n$.

Обобщим полученные результаты. Функции $g_k(z)$ (27) по построению есть общее решение (19) для того случая, когда матрица $J_1 = J^{(m)}_{\lambda}$ представляет собой одну жорданову клетку (18) размера $m\times m$.

Пусть теперь жорданова матрица J_1 имеет общий вид (16). Запишем (13) с учетом обозначений (14) и (16):

$$\frac{\partial}{\partial y}g^*(z) - \left(J^{(m_1)}_{\lambda_1}, J^{(m_2)}_{\lambda_2},\ldots,J^{(m_s)}_{\lambda_s}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x}g^*(z) = 0. \tag{34}$$

В силу (34) задача об определении структуры функции $g^*(z)$ распадается на s независимых подзадач вида (17) для каждой отдельной жордановой клетки $J^{(m_l)}_{\lambda_l}$ с числом λ_l по главной диагонали.

Примем следующие обозначения. Будем обозначать λ_l-голоморфные функции через $f^{(l)}_r = f^{(l)}_r(z)$. Обозначим через $g^{(l)}_k = g^{(l)}_k(z)$, $k=1,\ldots,m_l$, решение системы (20), соответствующее жордановой клетке $J^{(m_l)}_{\lambda_l}$ размера $m_l\times m_l$. Обозначим через a_l, b_l числа (10), найденные по параметрам α, r_1, r_2 некоторого эллипса Γ и собственному числу $\lambda_l = \lambda_{1l}+\lambda_{2l}i$ матрицы J.

С учетом сделанных обозначений, блочно-диагональной структуры матрицы J_1 и леммы 5 доказана

Лемма 6. *Общее решение* $g^*(z)$ *уравнения* (34) *имеет вид*

$$g^*(z)(g^{(1)}_1,\ldots,g^{(1)}_{m_1},g^{(2)}_1,\ldots,g^{(2)}_{m_2},\ldots,\ldots,g^{(s)}_1,\ldots,g^{(s)}_{m_s}), \tag{35}$$

где

$$g^{(l)}_1(z) = f^{(l)}_1(z),$$

$$g^{(l)}_k(z) = \sum_{r=1}^{k-1}\frac{1}{(k-r)!}\left(\frac{z-\overline{z}}{2\lambda_{2l}i}\right)^{k-r}\cdot\frac{d^{k-r}f^{(l)}_r(z)}{dz^{k-r}} + f^{(l)}_k(z), \tag{36}$$

$$k = 2,\ldots,m_l;\quad l = 1,\ldots,s.$$

При этом через $f^{(l)}_r = f^{(l)}_r(z)$ *обозначены произвольные* λ_l*-голоморфные функции.*

Из леммы 6 и предложения 2 вытекает

Лемма 7. *Пусть жорданова форма J_1 матрицы J имеет вид* (16), *и пусть столбцы матрицы Q есть жорданов базис матрицы J. Тогда общее решение уравнения* (1) *представимо в виде*

$$\phi(z) = Q \cdot g^*(z) = Q \cdot (g_1^{(1)},\dots,g_{m_1}^{(1)},\dots,\dots,g_1^{(s)},\dots,g_{m_s}^{(s)})^{\mathrm{T}}, \tag{37}$$

где функции $g_k^{(l)} = g_k^{(l)}(z)$ имеют вид (36).

Пусть $\tilde{f}_{nl}(z) = \zeta_{n1l}[z]^n + \dots$ есть λ_l-голоморфный тильда-полином (8) степени n. Для жордановой клетки размера $m_l \times m_l$ с собственным значением λ_l запишем числа $\chi^{\pm}_{nkr} = \chi^{(l)\pm}_{nkr}$ (32) с учетом введенных выше обозначений:

$$\chi^{(l)+}_{nkr} = \frac{\zeta_{n1l}}{(k-r)!} \cdot \left(\frac{a_l - \bar{b}_l}{2\lambda_{2l} i}\right)^{k-r} \cdot [n(n-1)\cdots(n-k+r+1)]a_l^{n-k+r},$$

$$\chi^{(l)-}_{nkr} = \frac{\zeta_{n1l}}{(k-r)!} \cdot \left(\frac{b_l - \bar{a}_l}{2\lambda_{2l} i}\right)^{k-r} \cdot [n(n-1)\cdots(n-k+r+1)]b_l^{n-k+r}, \tag{38}$$

$$k = 2,\dots,m_l; \quad l = 1,\dots,s.$$

Подставим в (36) в качестве функций $f_r^{(l)}(z)$ выражения $\alpha^{(l)}_{nr}\tilde{f}^{(l)}_n(z)$, т.е. λ_l-голоморфные тильда-полиномы $\tilde{f}^{(l)}_n(z)$ степени n с некоторыми коэффициентами $\alpha^{(l)}_{nr} \in \mathbb{C}$. Тогда с учетом обозначений (38) формулы (33) примут вид

$$g_1^{(l)}(z)\big|_\Gamma = g_1^{(l)}(t) = \alpha^{(l)}_{n1}\tilde{f}_{nl}(t) = \alpha^{(l)}_{n1}\left(e^{\mathrm{int}} + \frac{b_l^n}{a_l^n}e^{-\mathrm{int}}\right),$$

$$g_k^{(l)}(z)\big|_\Gamma = g_k^{(l)}(t) = \left(\sum_{r=1}^{k-1}\alpha^{(l)}_{nr}\chi^{(l)+}_{nkr}\right)\cdot e^{\mathrm{int}} + \left(\sum_{r=1}^{k-1}\alpha^{(l)}_{nr}\chi^{(l)-}_{nkr}\right)\cdot e^{-\mathrm{int}} + P^{(l)}_{kn-1}(t), \tag{39}$$

$$k = 2,\dots,m_l; \quad l = 1,\dots,s,$$

где функции $P^{(l)}_{kn-1}(t)$ зависят от $e^{\pm \mathrm{irt}}$ при $r < n$.

Полученный результат оформим в виде леммы.

Лемма 8. *Пусть в* (36) *функции $f_r^{(l)}(z)$ имеют вид $\alpha^{(l)}_{nr}\tilde{f}_{nl}(z)$, $\alpha^{(l)}_{nr} \in \mathbb{C}$, где через $\tilde{f}_{nl}(z) = \zeta_{n1l}z^n + \dots$ обозначен λ_l-голоморфный тильда-полином* (8) *степени n. Тогда справедливы формулы* (39), (38).

Замечание 4. В (38) имеем $a_l - \bar{b}_l \neq 0$, $b_l - \bar{a}_l \neq 0$, так как в противном случае $|a_l| = |b_l|$, что согласно предложению 1 противоречит условию $\operatorname{Im}\lambda_l = \lambda_{2l} \neq 0$. Кроме того, $\zeta_{n1l} \neq 0$, так как это старший коэффициент тильда-полинома $\tilde{f}_{nl}(z)$. Поэтому и числа $\chi^{(l)\pm}_{nkr} \neq 0$.

Докажем следующее утверждение, которое будет использовано ниже.

Лемма 9. *Пусть* $\phi(z)\big|_\Gamma \equiv 0$. *Тогда* $\phi(z) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $f_\lambda(z)$ есть λ-голоморфная функция. Тогда согласно лемме 1, если $f_\lambda(z)\big|_\Gamma = 0$, то $f_\lambda(z) \equiv 0$. Поэтому искомое утверждение вытекает из леммы 6 и предложения 2. Лемма 9 доказана.

В заключение этого раздела остановимся кратко на том случае, когда жордановы клетки в (16), (18) — верхне треугольные. Этот случай соответствует J^{T}-аналитическим функциям $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(z)$, удовлетворяющим уравнению

$$\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial y} - J^{\mathrm{T}}\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x} = 0, \quad z \in D, \tag{40}$$

где J^{T} — транспонированная матрица J. Так как $J = QJ_1Q^{-1}$, то с учетом (16) и блочно-диагональной структуры матрицы J_1 справедливы соотношения

$$J^{\mathrm{T}} = (QJ_1Q^{-1})^{\mathrm{T}} = (Q^{-1})^{\mathrm{T}}J_1^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}} = (Q^{\mathrm{T}})^{-1}J_1^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}, \tag{41}$$

$$J_1^{\mathrm{T}} = \operatorname{diag}\left((J_{\lambda_1}^{(m_1)})^{\mathrm{T}}, (J_{\lambda_2}^{(m_2)})^{\mathrm{T}}, \ldots, (J_{\lambda_s}^{(m_s)})^{\mathrm{T}}\right), \tag{42}$$

т.е. жорданов базис матрицы J^{T} — это столбцы матрицы $(Q^{\mathrm{T}})^{-1}$. Выполняя построения, аналогичные сделанным выше, приходим с учетом (41), (42) и обозначений (37) к выводу о том, что общее решение уравнения (40) имеет вид

$$\tilde{\phi}(z) = (Q^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot (g_{m_1}^{(1)}, \ldots, g_1^{(1)}, \ldots, \ldots, g_{m_s}^{(s)}, \ldots, g_1^{(s)})^{\mathrm{T}}, \tag{43}$$

где функции $g_k^{(l)} = g_k^{(l)}(z)$, как и в (37), вычисляются по формулам (36). Таким образом, для вычисления граничного значения функции $\tilde{\phi}(z)|_{\Gamma}$ в (43) можно применить лемму 8 и формулы (38), (39).

5. ЗАДАЧА ШВАРЦА В ЭЛЛИПСЕ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ

Примéним результаты разд. 4 к решению задачи Шварца для специальной правой части. Пусть $\omega = \omega(t)$, $t \in [-\pi, \pi)$ — параметризация (4) некоторого эллипса $\Gamma = \partial K$.

Пусть некоторая функция $\psi(\omega)$, $\omega \in \Gamma$, задана на эллипсе Γ. В соответствии с определением 4 под функцией $\psi_n(t)$ будем понимать функцию $\psi_n(t) = \psi(\omega(t))$, $t \in [-\pi, \pi)$.

Всюду ниже через $\phi_n = \phi_n(z)$ будем обозначать J-аналитический ℓ-вектор-полином степени n. Рассмотрим задачу Шварца (2) со следующей правой частью:

$$\begin{gathered} \operatorname{Re}\phi_n(z)|_{\Gamma} = \psi_n(t), \quad t \in [-\pi, \pi), \\ \psi_n(t) = \psi(\omega(t)) = (c_{n1}\cos nt + d_{n1}\sin nt, \ldots, c_{n\ell}\cos nt + d_{n\ell}\sin nt)^{\mathrm{T}}, \end{gathered} \tag{44}$$

где $c_{kl}, d_{kl} \in \mathbb{R}$. Таким образом, решение задачи (44) нужно найти именно в виде вектор-полинома степени n.

Согласно лемме 7 и (37) J-аналитический вектор-полином $\phi_\nu^*(z)$ степени $\nu \geq 1$ можно представить в форме

$$\phi_\nu^*(z) = Q \cdot \left(g_1^{(1)}(z), \ldots, g_{m_1}^{(1)}(z), \ldots, g_1^{(s)}(z), \ldots, g_{m_s}^{(s)}(z)\right)^{\mathrm{T}}, \tag{45}$$

где с учетом (36) в качестве λ_l-голоморфных функций $f_k^{(l)}(z)$ взяты λ_l-голоморфные тильда-полиномы $\tilde{f}_{\nu l}(z)$ *одной и той же степени* ν с коэффициентами $\alpha_{\nu r}^{(l)} \in \mathbb{C}$, т.е. $f_k^{(l)}(z) = \alpha_{\nu r}^{(l)} \cdot \tilde{f}_{\nu l}(z)$. С учетом обозначения (45) будем искать решение задачи (44) в виде

$$\phi_n(z) = \phi_0^* + \sum_{\nu=1}^{n} \phi_\nu^*(z), \quad \phi_0^* = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^\ell. \tag{46}$$

Для каждого $\nu = n, n-1, \ldots, 1$, вектор-полином $\phi_\nu^*(z)$ зависит от ℓ коэффициентов $\alpha_{\nu r}^{(l)} \in \mathbb{C}$. Их будем с учетом (46) последовательно искать из равенства

$$\operatorname{Re}\phi_n(z)|_{\Gamma} = \operatorname{Re}\phi_0^* + \sum_{\nu=1}^{n} \operatorname{Re}\phi_\nu^*(t) = \psi_n(t), \quad \phi_\nu^*(t) = \phi_\nu^*(z)|_{\Gamma}. \tag{47}$$

Таким образом, в силу (39), (38), (45), (47) и (44) для нахождения коэффициентов $\alpha_{\nu r}^{(l)}$, $\nu = n, n-1, \ldots, 1$, нужно последовательно решить следующие алгебраические $\ell \times \ell$-системы относительно переменных $\alpha_{\nu r}^{(l)} \in \mathbb{C}$, $\nu = n, n-1, \ldots, 1$:

$$\operatorname{Re}\left[Q \cdot \left(g_1^{(1)}(t), \ldots, g_{m_1}^{(1)}(t), \ldots, g_1^{(s)}(t), \ldots, g_{m_s}^{(s)}(t)\right)^{\mathrm{T}}\right] =$$

$$
\begin{gathered}
= \operatorname{Re}\Bigg[Q\cdot\Big(\alpha_{\nu 1}^{(1)}\tilde f_{\nu 1}(t), \alpha_{\nu 1}^{(1)}\chi_{\nu 21}^{(1)+}\cdot e^{i\nu t}+\alpha_{\nu 1}^{(1)}\chi_{\nu 21}^{(1)-}\cdot e^{-i\nu t},\ldots \\
\ldots,\sum_{r=1}^{m_1-1}\alpha_{\nu r}^{(1)}\chi_{\nu m_1 r}^{(1)+}\cdot e^{i\nu t}+\sum_{r=1}^{m_1-1}\alpha_{\nu r}^{(1)}\chi_{\nu m_1 r}^{(1)-}\cdot e^{-i\nu t}+\alpha_{\nu m_1}^{(1)} f_{\nu 1}(t),\ldots \\
\ldots,\alpha_{\nu 1}^{(s)}\tilde f_{\nu s}(t), \alpha_{\nu 1}^{(s)}\chi_{\nu 21}^{(s)+}\cdot e^{i\nu t}+\alpha_{\nu 1}^{(s)}\chi_{\nu 2s}^{(s)-}\cdot e^{-i\nu t},\ldots \\
\ldots,\sum_{r=1}^{m_s-1}\alpha_{\nu r}^{(s)}\chi_{\nu m_s r}^{(s)+}\cdot e^{i\nu t}+\sum_{r=1}^{m_s-1}\alpha_{\nu r}^{(s)}\chi_{\nu m_s r}^{(s)-}\cdot e^{-i\nu t}+\alpha_{\nu m_s}^{(s)} f_{\nu s}(t)\Big)^{\mathrm T}\Bigg] = \\
= (c_{\nu 1}\cos\nu t + d_{\nu 1}\sin\nu t,\ldots,c_{\nu\ell}\cos\nu t+d_{\nu\ell}\sin\nu t)^{\mathrm T}, \\
\nu = n, n-1,\ldots,1.
\end{gathered}
\tag{48}
$$

Заметим, что правая часть (48) при $\nu = n$ совпадает с функцией $\psi_n(t)$ (44).

После этого остается найти постоянную функцию ϕ_0^* в (46) как решение $\ell\times\ell$-системы

$$
\operatorname{Re}\phi_0^* = \operatorname{Re}(\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell)^{\mathrm T} = (c_1,\ldots,c_\ell)^{\mathrm T}, \quad \alpha_k\in\mathbb{C}, \quad c_k\in\mathbb{R}, \quad k = 1,\ldots,\ell. \tag{49}
$$

Как нетрудно видеть, система (49) всегда разрешима, а функция ϕ_0^* определена с точностью до комплексной вектор-константы.

Пусть

$$
\begin{gathered}
\alpha_{\nu r}^{(l)} = \alpha_{\nu r}^{(l)'} + i\alpha_{\nu r}^{(l)''}, \quad \alpha_{\nu r}^{(l)'}, \quad \alpha_{\nu r}^{(l)''}\in\mathbb{R}, \\
r = 1,\ldots,m_l, \quad l = 1,\ldots,s, \quad m_1+m_2+\ldots+m_s = \ell, \\
\hat\alpha_\nu = (\alpha_{\nu 1}^{(1)'},\alpha_{\nu 1}^{(1)''},\ldots,\alpha_{\nu m_1}^{(1)'},\alpha_{\nu m_1}^{(1)''},\ldots,\alpha_{\nu 1}^{(s)'},\alpha_{\nu 1}^{(s)''},\ldots,\alpha_{\nu m_s}^{(s)'},\alpha_{\nu m_s}^{(s)''})^{\mathrm T}, \\
\hat c_\nu(c_{\nu 1},d_{\nu 1},\ldots,c_{\nu\ell},d_{\nu\ell})^{\mathrm T}, \quad \hat\alpha_\nu, \quad \hat c_\nu\in\mathbb{R}^{2\ell}.
\end{gathered}
\tag{50}
$$

С учетом (50) комплексную $\ell\times\ell$-систему (48) можно рассматривать уже как вещественную $2\ell\times 2\ell$-систему относительно переменных $\alpha_{nr}^{(l)'}$, $\alpha_{nr}^{(l)''}$. Это и будет сделано ниже.

Определение 7. Обозначим матрицу вещественной $2\ell\times 2\ell$-системы (48) через $\hat Q_\nu\in\mathbb{R}^{2\ell\times 2\ell}$.

С учетом определения 7 и обозначений (50) системы (48) запишутся в компактном виде:

$$
\hat Q_\nu\cdot\hat\alpha_\nu = \hat c_\nu, \quad \nu = n, n-1,\ldots,1. \tag{51}
$$

Замечание 5. Матрица $\hat Q_\nu$ однозначно определяется собственными числами матрицы J, коэффициентами матрицы Q (жорданов базис J), а также параметрами α, r_1, r_2 эллипса Γ.

В итоге доказано следующее утверждение.

Лемма 10. *Пусть* $\det\hat Q_\nu\neq 0$, $\nu = n, n-1,\ldots,1$. *Тогда все системы* (51), (48) *однозначно разрешимы относительно вещественных переменных* $\hat\alpha_\nu$ (50).

Замечание 6. Допустим, что в условиях леммы 10 последовательно найдены вектор-коэффициенты $\hat\alpha_n,\hat\alpha_{n-1},\ldots,\hat\alpha_{\nu+1}$ как решения алгебраических систем (51). Тогда процесс нахождения оставшихся коэффициентов $\hat\alpha_\nu,\ldots,\hat\alpha_1$, а затем постоянной функции $\phi_0^* = (\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell)$, есть не что иное, как решение задачи вида

$$
\operatorname{Re}\phi_\nu(z)\big|_\Gamma = \psi_\nu(t) + \sum_{l<\nu}\psi_l(t), \tag{52}
$$

где функции $\psi_k(t)$ определены в (44).

Из леммы 10 с учетом (47) и (46) вытекает

Теорема 1. *Пусть* $\hat Q_\nu$ *— матрицы* $2\ell\times 2\ell$*-систем* (48), *и пусть*

$$
\det\hat Q_\nu\neq 0, \quad \nu = 1,\ldots,n. \tag{53}
$$

Тогда задача (44) *разрешима в эллипсе* K *в виде* ℓ*-вектор-полинома* $\phi_n(z)$ (46) *степени* n *для любой правой части* $\psi_n(t)$. *В частности, задача* $\operatorname{Re}\phi_0(z)|_\Gamma = c$ *имеет решение* $\phi_0 = c + ic_1$, *где* $c, c_1 \in \mathbb{R}^\ell$.

С учетом замечания 6 справедлива так же следующая

Теорема 2. *Пусть* $\hat{Q}_\nu$ — *матрица* $2\ell \times 2\ell$*-системы* (48), *и пусть* $\det \hat{Q}_n = 0$, *но при этом* $\det \hat{Q}_k \neq 0$, $k < n$. *Либо пусть* $\det \hat{Q}_1 = 0$. *Тогда однородная задача* (44), *т.е. задача* $\operatorname{Re}\phi_n(z)|_\Gamma = 0$, *имеет в эллипсе* K *решение в виде* ℓ*-вектор-полинома* $\phi_n(z)$ *степени* n.

Замечание 7. Довольно очевидно следующее. Пусть n — нечетное. Тогда при выполнении (53) ненулевыми будут только нечетные вектор-коэффициенты $\hat{\alpha}_\nu$ (50) как решения систем (48), поскольку для четных $\hat{\alpha}_\nu$ соответствующая система будет однородной. Аналогично, если n — четное, то ненулевыми будут только четные $\hat{\alpha}_\nu$.

6. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Весь данный раздел посвящен изложению основных определений и теорем из работы [9]. Эти результаты будут применены в следующем разделе.

Пусть функция $g(z) \in C(\overline{D})$, и пусть $\Gamma = \partial D$. Следуя [9], введем обозначения

$$g^+(\omega) = g(z)|_\Gamma, \quad \omega \in \Gamma. \tag{54}$$

Пусть область D ограничена гладким контуром Γ, составленным из связных компонент $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$. Область D может быть как конечной, так и бесконечной. Эти случаи различаем с помощью характеристики $æ_D$. Именно, положим

$$\begin{aligned} æ_D &= 1, \quad \text{если область } D \text{ конечна,} \\ æ_D &= 0, \quad \text{если область } D \text{ бесконечна.} \end{aligned} \tag{55}$$

Задачу Шварца (2) назовем *задачей S*. Пусть контур Γ ориентирован положительно по отношению к области D (т.е. область D остается слева относительно этой ориентации). Пусть

$$e(\omega) = e_1(\omega) + ie_2(\omega), \quad \omega \in \Gamma, \tag{56}$$

есть единичный касательный вектор к контуру Γ в точке ω, направленный согласно данной ориентации. В (56) через $e_1(\omega)$, $e_2(\omega)$ обозначены вещественные скалярные функции.

Определение 8. Пусть $\Gamma \in H^{1,\sigma+0}$, если $e(\omega) \in H^{\sigma+\varepsilon}(\Gamma)$ с некоторым $\varepsilon > 0$. Пусть $\phi(z) \in H^{1,\sigma+0}(\overline{D})$, если $\phi(z) \in H^{\sigma+\varepsilon}(\overline{D})$ с некоторым $\varepsilon > 0$.

Пусть E — единичная $\ell \times \ell$-матрица, J^{T} — транспонированная матрица J. В той же области D вместе с J-аналитическими функциями (1) рассмотрим J^{T}-аналитические ℓ-вектор-функции $\tilde{\phi}(z)$ (40). С помощью функции (56) образуем $\ell \times \ell$-матрицу

$$e_{J^{\mathrm{T}}}(\omega) = e_1(\omega) \cdot E + e_2(\omega) \cdot J^{\mathrm{T}}, \quad \omega \in \Gamma, \tag{57}$$

которая зависит от параметра ω.

С задачей S свяжем союзную задачу $\tilde{S}$. Она состоит в нахождении такой J^{T}-аналитической функции $\tilde{\phi}(z) \in H^\sigma(\overline{D})$ (40), для которой выполнено граничное условие

$$\operatorname{Re} e_{J^{\mathrm{T}}}\tilde{\phi}^+(\omega) = \psi(\omega), \quad \psi(\omega) \in H^\sigma(\Gamma).$$

Соответственно, при $\psi(\omega) \equiv 0$ будем говорить об *однородной союзной задаче* $\tilde{S}$:

$$\operatorname{Re} e_{J^{\mathrm{T}}}\tilde{\phi}^+(\omega) = 0, \quad \tilde{\phi}(z) \in H^\sigma(\overline{D}). \tag{58}$$

Для непрерывных ℓ-вектор-функций $f(\omega) = (f_1,\dots,f_\ell)$, $g(\omega) = (g_1,\dots,g_\ell)$, заданных на Γ, определим билинейную форму $\langle f,g\rangle$ по правилу

$$\langle f,g\rangle = \int\limits_\Gamma f(\omega)\cdot g(\omega)\cdot|d\omega| = \int\limits_\Gamma (f_1\cdot g_1 + \dots + f_\ell\cdot g_\ell)\cdot|d\omega|, \tag{59}$$

где $|d\omega|$ означает элемент длины дуги кривой Γ.

С учетом обозначений (55) и (59) справедливы следующие две теоремы.

Теорема 3. *Пусть $\phi(z)$ и $\tilde\phi(z)$ — решения задач S и $\tilde S$ соответственно с одной и той же граничной вектор-функцией $\psi(\omega)$. Тогда справедливо равенство*

$$\left\langle \phi^+(\omega), e_{J^\mathrm{T}}\tilde\phi^+(\omega)\right\rangle = 0.$$

Теорема 4. *Пусть все собственные значения матрицы $J\in\mathbb{C}^{\ell\times\ell}$ лежат в верхней полуплоскости. Имеют место следующие два утверждения.*

1. *В предположении $\Gamma\in H^{1,\sigma+0}$ задача S фредгольмова (т.е. имеет конечномерные ядро и коядро) в каждом из классов $H^\sigma(\bar D)$, а ее индекс равен*

$$\operatorname{Ind} S = \dim\operatorname{Ker} S - \dim\operatorname{Ker}\tilde S = \ell(2æ_D - m). \tag{60}$$

2. *Неоднородная задача S (2) для функции $\psi(\omega)\in H^\sigma(\Gamma)$ разрешима в классах Гёльдера $\phi(z)\in H^\sigma(\bar D)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия ортогональности*

$$\left\langle \psi(\omega), \operatorname{Im} e_{J^\mathrm{T}}\tilde\phi^+(\omega)\right\rangle = 0, \tag{61}$$

где $\tilde\phi(z)$ — произвольное решение однородной союзной задачи $\tilde S$ (58).

Замечание 8. В ядро задачи Шварца входят и те функции, действительная часть которых тождественно равна нулю.

7. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ШВАРЦА В ЭЛЛИПСЕ

Пусть $\omega(t) = (x(t), y(t))$, $t\in[-\pi,\pi)$ — параметризация (4) эллипса Γ. Запишем линейный элемент $|d\xi|$ дуги кривой Γ:

$$|d\omega(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt = p(t)dt, \tag{62}$$

где с учетом (4) имеем

$$p(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{r_2^2\cos^2 t + r_1^2\sin^2 t} \neq 0, \quad t\in[-\pi,\pi). \tag{63}$$

Обозначим через $(f(t), g(t))$ скалярное произведение двух вектор-функций $f(t) = (f_1,\dots,f_\ell)$ и $g(t) = (g_1,\dots,g_\ell)$, заданных на интервале $t\in[-\pi,\pi)$. Тогда с учетом обозначений (62), (63) билинейную форму (59) можно записать в виде

$$\langle f,g\rangle = \int\limits_{-\pi}^{\pi}[f_1(t)\cdot g_1(t) + \dots + f_\ell(t)\cdot g_\ell(t)]\cdot p(t)dt = (f(t), p(t)\cdot g(t)) = (f, p\cdot g). \tag{64}$$

Справедливы следующие два утверждения.

Предложение 3. *Матрица $e_{J^\mathrm{T}} = e_{J^\mathrm{T}}(\omega)$ (57) обратима для всех $\omega\in\Gamma$.*

Доказательство. С учетом (41) имеем

$$e_{J^\mathrm{T}} = e_1\cdot E + e_2\cdot J^\mathrm{T} = e_1\cdot E + e_2\cdot(Q^\mathrm{T})^{-1}J_1^\mathrm{T}Q^\mathrm{T} = (Q^\mathrm{T})^{-1}\cdot\left[e_1\cdot E + e_2\cdot J_1^\mathrm{T}\right]\cdot Q^\mathrm{T}. \tag{65}$$

Пусть жорданова форма J_1 матрицы $J = QJ_1Q^{-1}$ — нижне треугольная. Пусть $\lambda_l = \lambda_{1l} + \lambda_{2l}i$ — собственные значения матрицы J. Тогда с учетом обозначений (42) элементы главной диагонали верхне треугольной матрицы $\left[e_1 \cdot E + e_2 \cdot J_1^{\mathrm{T}}\right]$ имеют вид $e_1 + \lambda_l e_2$, $1 \le l \le s$. Для них справедливо соотношение

$$e_1(\omega) + \lambda_l e_2(\omega) = e_1(\omega) + (\lambda_{1l} + \lambda_{2l} i) e_2(\omega) \ne 0, \quad \omega \in \Gamma. \tag{66}$$

Действительно, в противном случае $e_2(\omega_0) = 0$ для некоторой точки $\omega_0 \in \Gamma$, так как $\lambda_{2l} \ne 0$. Поэтому и $e_1(\omega_0) = 0$, что противоречит определению функции $e(\omega)$ (56) как единичного касательного вектора к Γ. Из (65) и (66) вытекает искомое утверждение. Предложение 3 доказано.

Предложение 4. *Пусть* $\tilde{\phi}(z)$ *есть* J^{T}*-аналитическая функция* (40), *и пусть* $e_{J^{\mathrm{T}}}\tilde{\phi}(z)\big|_{\Gamma} = 0$. *Тогда* $\tilde{\phi}(z) \equiv 0$.

Доказательство. В силу предложения 3 имеем $\tilde{\phi}(z)\big|_{\Gamma} = 0$. Поэтому искомое утверждение вытекает из (43), (36) и леммы 1. Предложение 4 доказано.

Далее докажем следующую основную теорему настоящей статьи. Пусть эллипс $\Gamma = \partial K$ задан параметризацией (4).

Теорема 5. *Пусть все собственные значения матрицы* $J \in \mathbb{C}^{\ell \times \ell}$ *лежат в верхней полуплоскости. Пусть* $\hat{Q}_n$ *— матрица алгебраической системы* (48) *при* $\nu = n$. *Тогда выполнение соотношений*

$$\det \hat{Q}_n \ne 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{67}$$

является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи Шварца (2) *в эллипсе* K *с границей* Γ *для любой правой части* $\psi(\omega) \in H^{\sigma}(\Gamma)$ *в классах функций* $\phi(z) \in H^{\sigma}(\bar{K})$. *Данное решение при выполнении* (67) *единственно с точностью до вектор-постоянной.*

Доказательство. Так как эллипс Γ — аналитическая кривая, то $\Gamma \in H^{1,\sigma+0}$ с любым показателем $\sigma \in (0,1)$. Поэтому можно применять теорему 4.

Докажем достаточность. Пусть выполнены соотношения (67) и пусть с учетом обозначения (44)

$$\psi(\omega(t)) = \psi(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(t) = c_0 + \psi_1(t) + \psi_2(t) + \ldots, \quad c_0 = \psi_0 \in \mathbb{R}^{\ell}, \tag{68}$$

есть ряд Фурье граничной функции $\psi(t)$ в смысле определения 4. Пусть $\tilde{\phi}(z)$ есть J^{T}-аналитическая функция, см. (40). В силу теоремы 1, п. 2 теоремы 4, (64) и обозначения (54) справедливы равенства

$$\begin{gathered} \left\langle \psi_n(\omega), \quad \operatorname{Im} e_{J^{\mathrm{T}}} \tilde{\phi}^{+}(\omega) \right\rangle = (\psi_n(t), p(t) \cdot \operatorname{Im} e_{J^{\mathrm{T}}} \tilde{\phi}^{+}(t)) = 0, \\ n = 0,1,2,3\ldots, \quad \tilde{\phi}(z) \in \operatorname{Ker} \tilde{S}. \end{gathered} \tag{69}$$

Так как граничная функция $\psi(t)$ непрерывна по Гёльдеру, то ее ряд Фурье сходится равномерно (см. [13]). Поэтому его можно почленно интегрировать. Отсюда с учетом (69), (68) и (64) имеем

$$\begin{gathered} \left\langle \psi(\omega), \operatorname{Im} e_{J^{\mathrm{T}}} \tilde{\phi}^{+}(\omega) \right\rangle = \left([c_0 + \psi_1(t) + \psi_2(t) + \ldots], p(t) \cdot \operatorname{Im} e_{J^{\mathrm{T}}} \tilde{\phi}^{+}(t) \right) = \\ = (c_0, p(t) \cdot \operatorname{Im} e_{J^{\mathrm{T}}} \tilde{\phi}^{+}(t)) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\psi_n(t), p(t) \cdot \operatorname{Im} e_{J^{\mathrm{T}}} \tilde{\phi}^{+}(t) \right) = 0, \quad \tilde{\phi}(z) \in \operatorname{Ker} \tilde{S}. \end{gathered} \tag{70}$$

Равенство (70) в силу п. 2 теоремы 4 доказывает существование решения $\phi(z) \in H^{\sigma}(\bar{K})$ задачи Шварца.

Необходимость. Пусть $\det \hat{Q}_n = 0$ для некоторых значений n. Пусть r — минимальное из них, т.е. либо $\det \hat{Q}_r = 0$, $\det \hat{Q}_k \ne 0$ при $k < r$, либо $\det \hat{Q}_1 = 0$. Тогда в силу теоремы 2 в ядро задачи Шварца S входит по крайней мере один вектор-полином $\phi_r(z)$. Кроме того, в ядро задачи S входят постоянные решения однородной задачи S, размерность которых равна ℓ. Таким образом,

$$\dim \operatorname{Ker} S > \ell. \tag{71}$$

Обратимся к разд. 6. Поскольку граница эллипса состоит из одной компоненты связности, то $m = 1$. Согласно (55) $æ_D = 1$. Поэтому формула (60) для эллипса приобретает вид

$$\operatorname{Ind} S = \dim \operatorname{Ker} S - \dim \operatorname{Ker} \tilde{S} = \ell. \tag{72}$$

Из (71) и (72) вытекает, что $\dim \operatorname{Ker} \tilde{S} = \dim \operatorname{Ker} S - \ell > 0$. Поэтому существует такой ненулевой элемент $\phi'(z) \in \operatorname{Ker} \tilde{S}$, что $\operatorname{Im} e_{J^{\mathrm{T}}} \tilde{\phi}'(z)\big|_{\Gamma} \neq 0$. В противном случае получаем противоречие предложению 4. Покажем, что в этом случае можно подобрать такую функцию $\psi'(\omega(t))$, для которой равенство (61) не выполняется.

Действительно, пусть в обозначениях (44) $\operatorname{Im} e_{J^{\mathrm{T}}} \phi'^{+}(\omega(t)) = \psi_s(t) + \ldots$, где $\psi_s(t) \neq 0$. Рассмотрим функцию $\psi_s^*(t)$ такую, что скалярное произведение $(\psi_s^*(t), \psi_s(t)) \neq 0$. Тогда можно положить

$$\psi'(\omega(t)) = \frac{\psi_s^*(t)}{p(t)} \in H^{\sigma}(\Gamma). \tag{73}$$

Согласно (64) и п. 2 теоремы 4 задача S для правой части $\psi'(\omega)$ (73) неразрешима. Тем самым установлена необходимость условий (67).

Единственность. Пусть справедливы соотношения (67). Пусть $\tilde{\phi}(z) \in \operatorname{Ker} \tilde{S}$, т.е. по определению $\operatorname{Re} e_{J^{\mathrm{T}}} \tilde{\phi}^{+}(t) = 0$. Из (69) в силу произвольности выбора функции $\psi(\omega)$ вытекает, что $p(t) \cdot \operatorname{Im} e_{J^{\mathrm{T}}} \tilde{\phi}^{+}(t) = 0$. Согласно (63) $p(t) \neq 0$, поэтому $\operatorname{Im} e_{J^{\mathrm{T}}} \tilde{\phi}^{+}(t) = 0$. Отсюда согласно предложению 4 имеем $\tilde{\phi}(z) \equiv 0$. Таким образом, $\dim \operatorname{Ker} \tilde{S} = 0$. Поэтому в силу (72) ядро задачи S имеет размерность ℓ, т.е. состоит только из постоянных функций $\phi = ic$, $c \in \mathbb{R}^{\ell}$, что и требовалось. Теорема 5 доказана.

8. ЗАДАЧА ШВАРЦА В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Построения разд. 7 носят чисто теоретический характер, так как алгебраическая система (48) очень сложна для изучения даже при $\ell = 2$. В связи с этим в данном разделе применен альтернативный подход. Именно, для матриц $J \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ с разными собственными значениями проведена редукция задачи Шварца к скалярному функциональному уравнению (93), которое зависит от модуля $|l|$ комплексного параметра l (75). Этот параметр однозначно определяется жордановым базисом матрицы J, и, в отличие от определителя $\det \hat{Q}_n$, его несложно вычислить. Показано (теорема 10), что условие $|l| \in [0,1]$ является достаточным для разрешимости задачи Шварца в произвольном эллипсе K для любой функции $\psi(\omega) \in H^{\sigma}(\Gamma)$.

8.1. Редукция задачи Шварца к функциональному уравнению

Пусть матрица $J \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ имеет разные собственные значения $\mu \neq \lambda$, где $\operatorname{Im}\mu \neq 0$, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Обозначим через x собственный вектор, соответствующий μ, а через y — собственный вектор, соответствующий λ. Обозначим также через J_1 и Q жорданову форму и жорданов базис матрицы J соответственно:

$$J_1 = \operatorname{diag}(\mu, \lambda) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad Q = (x, y), \quad J = QJ_1Q^{-1}. \tag{74}$$

Будем предполагать, что один из собственных векторов, для определенности *вектор* $\mathbf{y}$, *не кратен вещественному.* Разложим комплексное сопряжение $\overline{\mathbf{y}}$ вектора $\mathbf{y}$ по жорданову базису $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ матрицы J:

$$\begin{gathered} \overline{\mathbf{y}} = l_1\mathbf{x} + l\mathbf{y}, \quad l_1, l \in \mathbb{C}, \\ l_1 = l_1(J) = \frac{\det(\overline{\mathbf{y}}, \mathbf{y})}{\det(\mathbf{x}, \mathbf{y})}, \quad l = l(J) = \frac{\det(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{y}})}{\det(\mathbf{x}, \mathbf{y})}. \end{gathered} \tag{75}$$

В (75) для нахождения чисел l_1, l были применены формулы Крамера. Ниже будет использовано только число l. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 11. *Модуль* $|l|$ *числа* l (75) *не зависит от выбора жорданова базиса* Q *матрицы* J. *Кроме того, число* l *инвариантно относительно вещественных преобразований, т.е. оно совпадает для матриц* J *и* BJB^{-1}, *где* $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Доказательство. Собственные векторы матрицы J определены с точностью до комплексного множителя. Поэтому пусть $Q^* = (a\mathbf{x}, b\mathbf{y})$, $a, b \neq 0$ — другой жорданов базис J. Обозначим через l^* число (75), вычисляемое по жорданову базису Q^*. Имеем

$$|l^*| = \left|\frac{\det(a\mathbf{x}, \overline{b\mathbf{y}})}{\det(a\mathbf{x}, b\mathbf{y})}\right| = \left|\frac{a\bar{b}\cdot\det(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}})}{ab\cdot\det(\mathbf{x}, \mathbf{y})}\right| = \left|\frac{a\bar{b}}{ab}\right|\cdot\left|\frac{\det(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}})}{\det(\mathbf{x}, \mathbf{y})}\right| = |l|, \quad a, b \neq 0,$$

что и требовалось.

Докажем инвариантность самого числа l (а не только его модуля) относительно вещественных преобразований. Так как векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ — собственные для матрицы J, то $J\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}$, $J\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$. Эти два равенства запишем в следующем виде:

$$BJB^{-1}\cdot B\mathbf{x} = \mu B\mathbf{x}, \quad BJB^{-1}\cdot B\mathbf{y} = \lambda B\mathbf{y}.$$

Таким образом, $Q^* = (\mathbf{x}', \mathbf{y}') = (B\mathbf{x}, B\mathbf{y})$ — жорданов базис матрицы $J^* = BJB^{-1}$, которая имеет те же собственные значения μ, λ. Обозначим, как и выше, через l^* число (75), которое найдем по жорданову базису Q^*. Имеем

$$l^* = \frac{\det(B\mathbf{x}, \overline{B\mathbf{y}})}{\det(B\mathbf{x}, B\mathbf{y})} = \frac{\det(B\mathbf{x}, B\bar{\mathbf{y}})}{\det(B\mathbf{x}, B\mathbf{y})} = \frac{\det B\cdot\det(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}})}{\det B\cdot\det(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = l,$$

что и требовалось. Лемма 11 доказана.

Преобразуем задачу Шварца $\operatorname{Re}\phi(z)|_\Gamma = (\psi_1, \psi_2)^{\mathrm{T}}$ (2) для $\ell = 2$. С учетом (75) и равенств $J\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}$, $J\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$ справедливы равенства

$$\begin{gathered} J\bar{\mathbf{y}} = J(l_1\mathbf{x} + l\mathbf{y}) = \mu l_1\mathbf{x} + \lambda l\mathbf{y} = \mu l_1\mathbf{x} + \lambda l\mathbf{y} \pm \mu l\mathbf{y} = \\ = \mu l_1\mathbf{x} + \mu l\mathbf{y} + \lambda l\mathbf{y} - \mu l\mathbf{y} = \mu(l_1\mathbf{x} + l\mathbf{y}) + (\lambda - \mu)l\mathbf{y} = \mu\bar{\mathbf{y}} + (\lambda - \mu)l\mathbf{y}. \end{gathered} \tag{76}$$

Таким образом, матрица $J_1 = (Q')^{-1}JQ'$ оператора J в базисе $Q' = (\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{y})$ имеет вид

$$J_1 = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ (\mu - \lambda)l & \lambda \end{pmatrix}, \quad \mu \neq \lambda. \tag{77}$$

После подстановки $J = Q'J_1(Q')^{-1}$ в (1) и умножения обеих частей на $(Q')^{-1}$, получим с учетом (77) следующие соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} g \\ F \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ (\mu - \lambda)l & \lambda \end{pmatrix}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} g \\ F \end{pmatrix} = 0, \quad (g, F)^{\mathrm{T}} = (Q')^{-1}\phi = (\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{y})^{-1}\phi. \tag{78}$$

Функция $g = g_\mu(z)$ согласно (78) является μ-голоморфной. При этом в силу (78) справедливо равенство

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \lambda\frac{\partial F}{\partial x} = l(\mu - \lambda)\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \mu \neq \lambda. \tag{79}$$

Подстановка $F = lg_\mu + f$ в (79) после несложных преобразований приводит к тождеству

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

т.е. $f = f_\lambda(z)$ — произвольная λ-голоморфная функция. Таким образом, общим решением (78) будут функции

$$g(z) = g_\mu(z), \quad F(z) = lg_\mu(z) + f_\lambda(z). \tag{80}$$

Далее пусть

$$g(z)\big|_\Gamma = u(x,y) + iv(x,y), \quad F(x,y)\big|_\Gamma = p(x,y) + iq(x,y), \tag{81}$$

где функции $u, v, p, q \in C(\Gamma)$ вещественные. В предположении $\phi(z) \in C(\overline{D})$ и с учетом (78) это обозначение корректно. Пусть

$$\mathbf{y} = (a_1, a_2) = (a + bi, c + di), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \tag{82}$$

есть собственный вектор матрицы J, который не кратен вещественному. Тогда с учетом (78), (81) и (82) общее решение $\phi(z)$ уравнения (1) для изучаемого типа матриц можно записать в виде

$$\phi(z) = Q' \cdot (g, F)^{\mathrm{T}} = (\overline{\mathbf{y}}, \mathbf{y}) \cdot (g, F)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \overline{a}_1 & a_1 \\ \overline{a}_2 & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u + iv \\ p + iq \end{pmatrix}. \tag{83}$$

Граничное условие $\operatorname{Re}\phi(z)\big|_\Gamma = (\psi_1, \psi_2)^{\mathrm{T}}$ в силу (83) запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left[\overline{a}_1(u + iv) + a_1(p + iq)\right]\big|_\Gamma &= \psi_1, \\ \operatorname{Re}\left[\overline{a}_2(u + iv) + a_2(p + iq)\right]\big|_\Gamma &= \psi_2. \end{aligned} \tag{84}$$

Предложение 5. *Решение* (84) *как неоднородной алгебраической системы относительно вещественных функций-переменных* u, v *единственно, и его можно найти в следующем виде*:

$$u = -p + r(\psi_1, \psi_2), \quad v = q + h(\psi_1, \psi_2), \tag{85}$$

где $r(\cdot)$, $h(\cdot)$ *— линейные функции своих переменных.*

Доказательство. Так как вектор $\mathbf{y}$ по условию не кратен вещественному, то с учетом обозначения (82) определитель Δ системы (84) относительно переменных u, v отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{86}$$

Поэтому решение системы (84) относительно u, v будет единственным. Заметим, что для произвольного $\xi \in \mathbb{C}$ справедливо тождество

$$\operatorname{Re}[\overline{\xi}(u + iv) + \xi(p + iq)]\big|_{u=-p, v=q} = \operatorname{Re}[\overline{\xi}(-p + iq) - \overline{\overline{\xi}(-p + iq)}] = 0. \tag{87}$$

После подстановки (85) в (84) переменные p, q в силу (87) тождественно сократятся. В результате получим следующую пару равенств:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\overline{a}_1(r + ih)] = \operatorname{Re}[(a - bi)(r + ih)]\big|_\Gamma = ar + bh = \psi_1, \\ \operatorname{Re}[\overline{a}_2(r + ih)] = \operatorname{Re}[(c - di)(r + ih)]\big|_\Gamma = cr + dh = \psi_2. \end{aligned} \tag{88}$$

Остается заметить, что система (88) имеет единственное решение относительно переменных r, h, поскольку ее определитель Δ совпадает с (86). Следовательно, (85) и есть искомое единственное решение системы (84). Предложение 5 доказано.

Далее заметим, что пара равенств вещественных функций (85) равносильна одному комплексному функциональному уравнению

$$(p + iq) + (u - iv) = r - ih. \tag{89}$$

Пусть $r - ih = \varphi$. Тогда с учетом обозначений (80) и (81) равенство (89) можно переписать в виде

$$f_\lambda + \overline{g}_\mu + l \cdot g_\mu\big|_\Gamma = r(\psi_1, \psi_2) - ih(\psi_1, \psi_2) = \varphi(\omega), \quad l \in \mathbb{C}. \tag{90}$$

Запишем число $l \in \mathbb{C}$ (75) в показательной форме: $l = |l| e^{i\xi}$. Сделаем в (90) следующие подстановки:

$$f_\lambda = f_\lambda^* \cdot e^{\frac{i\xi}{2}}, \quad g_\mu = g_\mu^* \cdot e^{-\frac{i\xi}{2}}, \quad \varphi = \varphi^* \cdot e^{\frac{i\xi}{2}}. \tag{91}$$

Тогда задача (90) после сокращения на $e^{\frac{i\xi}{2}}$ примет следующий вид:

$$f^*_\lambda(z) + \overline{g^*_\mu(z)} + |l| \cdot g^*_\mu(z)\Big|_\Gamma = \varphi^*(\omega). \tag{92}$$

Таким образом, задачи (90) и (92) равносильны. В итоге с учетом обратимости проведенных преобразований, (75) и (91) доказана

Теорема 6. *Пусть матрица* $J \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ *имеет разные собственные значения* μ, λ, *и пусть* $Q = (x, y)$ *— ее жорданов базис, где собственный вектор* $\mathbf{y}$ *не кратен вещественному. Тогда задача Шварца* (2) *в классе функций* $\phi = \phi(z) \in C(\bar{D})$ *равносильна граничной задаче для следующего скалярного функционального уравнения*:

$$f_\lambda(z) + \bar{g}_\mu(z) + l \cdot g_\mu(z)\Big|_\Gamma = \varphi(\omega), \quad \omega \in \Gamma, \quad l = \left|\frac{\det(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}})}{\det(\mathbf{x}, \mathbf{y})}\right|, \tag{93}$$

где $f_\lambda(z)$, $g_\mu(z) \in C(\bar{D})$ *— это, соответственно,* λ- *и* μ*-голоморфные функции.*

Замечание 9. Пусть решение уравнения (90) найдено для параметра $l \in \mathbb{C}$ (75). При этом скалярная граничная функция φ построена по вектор-функции (ψ_1, ψ_2) по формулам (88) и (90). Тогда с учетом (78) и (80) J-аналитическая функция $\phi(z)$ как решение задачи Шварца может быть восстановлена из равенства

$$\phi(z) = Q' \cdot (g, F)^{\mathrm{T}} = (\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{y}) \cdot (g_\mu, F)^{\mathrm{T}} = (g_\mu, lg_\mu + f_\lambda)^{\mathrm{T}}. \tag{94}$$

8.2. Изучение уравнения (93) *в эллипсе. Существование и единственность решений задачи Шварца*

В работе [10] доказана

Теорема 7 (А.П. Солдатов). *Пусть* $\Gamma = \partial D$ *— контур Ляпунова. Пусть* $(\operatorname{Im}\lambda) \cdot (\operatorname{Im}\mu) > 0$, $\varphi(\omega) \in H^\sigma(\Gamma)$. *Тогда уравнение* (93) *при* $l = 0$ *имеет единственное с точностью до постоянной решение* $g_\mu(z)$, $f_\lambda(z) \in H^\sigma(\bar{D})$.

Однако для произвольных $l \in \mathbb{R}$ однородная задача (93) не всегда имеет только постоянные решения, что доказывает следующий

Пример 3. Пусть $l = 5$, $\lambda = 2i$, $\mu = i$. Непосредственные вычисления показывают, что пара квадратичных функций

$$f_\lambda(z) = -3i(x + 2iy)^2 - i, \quad g_\mu(z) = i(x + iy)^2$$

будет решением однородной задачи (93) в эллипсе K с границей Γ: $x^2 + 8y^2 = 4$.

Таким образом, актуальной является задача о нахождении таких значений параметра $l \in \mathbb{R}$, для которых решение уравнения (93) в эллипсе существует и единственно. Это и сделано ниже. Пусть $\operatorname{Im}\mu \neq 0$, пусть параметры r_1, r_2, α определяют эллипс Γ. По аналогии с (10) введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1(\alpha, \mu, r_1, r_2) = \frac{r_1\cos\alpha + ir_2\sin\alpha + \mu(r_1\sin\alpha - ir_2\cos\alpha)}{2}, \\ b_1 &= b_1(\alpha, \mu, r_1, r_2) = \frac{r_1\cos\alpha - ir_2\sin\alpha + \mu(r_1\sin\alpha + ir_2\cos\alpha)}{2}. \end{aligned} \tag{95}$$

Выражения для a_1, b_1 в (95) отличаются от выражений для a, b в (10) формальной заменой λ на μ. При этом значения параметров r_1, r_2, α для (10) и (95) одинаковы. В [3] доказано следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть* $\operatorname{Im}\lambda > 0$, $\operatorname{Im}\mu > 0$, *числа* a, b, a_1, b_1 *для эллипса* Γ (4) *найдены по формулам* (10) *и* (95). *Пусть выполнены следующие соотношения*:

$$\Delta_n = \Delta_n(l) = l^2 \cdot \left|\frac{b^n}{a^n} - \frac{b_1^n}{a_1^n}\right|^2 - \left|1 - \frac{b^n}{a^n} \cdot \overline{\frac{b_1^n}{a_1^n}}\right|^2 \neq 0, \quad l \in \mathbb{R}, \quad l \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{96}$$

Тогда для любой граничной функции $\varphi(\omega) \in H^{\sigma}(\Gamma)$ *решение задачи* (93) *в эллипсе* K *с границей* $\Gamma = \partial K$ *в классе функций* f_{λ}, $g_{\mu} \in H^{\sigma}(\bar{K})$ *существует и единственно с точностью до постоянной.*

Непосредственная проверка выполнения всех соотношений (96) для фиксированных значений l, a, b, a_1, b_1 есть весьма сложная задача. Получим достаточные условия на параметр l, при которых соотношения (96) выполнены в произвольном эллипсе Γ.

Пусть $\operatorname{Im}\lambda > 0$, $\operatorname{Im}\mu > 0$, тогда согласно предложению 1 имеем $|b| < |a|$, $|b_1| < |a_1|$. Выразим с учетом этих двух неравенств и (96) параметр l из уравнения $\Delta_n(l) = 0$:

$$l = \frac{\left|1 - \frac{b^n}{a^n} \cdot \overline{\frac{b_1^n}{a_1^n}}\right|}{\left|\frac{b^n}{a^n} - \frac{b_1^n}{a_1^n}\right|}, \quad \left|\frac{b}{a}\right| < 1, \quad \left|\frac{b_1}{a_1}\right| < 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{97}$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма 12. *Пусть некоторые числа* a, b, a_1, b_1 *удовлетворяют неравенствам* (97), *причем*

$$\frac{b^n}{a^n} - \frac{b_1^n}{a_1^n} \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}.$$

Тогда для всех $n \in \mathbb{N}'$ *в* (97) *число* $l > 1$.

Доказательство. Пусть

$$\frac{b^n}{a^n} = \xi_1 e^{\mathrm{i}t_1}, \quad \frac{b_1^n}{a_1^n} = \xi_2 e^{\mathrm{i}t_2}, \quad \xi_1 < 1, \quad \xi_2 < 1, \quad n \in \mathbb{N}'.$$

Тогда с учетом (97) имеем

$$\begin{gathered} l = \frac{\left|1 - \frac{b^n}{a^n} \cdot \overline{\frac{b_1^n}{a_1^n}}\right|}{\left|\frac{b^n}{a^n} - \frac{b_1^n}{a_1^n}\right|} = \frac{\left|1 - \xi_1\xi_2 e^{\mathrm{i}(t_1 - t_2)}\right|}{\left|\xi_1 e^{\mathrm{i}t_1} - \xi_2 e^{\mathrm{i}t_2}\right|} = \\ = \frac{\left|1 - \xi_1\xi_2 e^{\mathrm{i}(t_1 - t_2)}\right|}{\left|e^{\mathrm{i}t_1}\right| \cdot \left|\xi_1 - \xi_2 e^{\mathrm{i}(t_2 - t_1)}\right|} = \frac{\left|1 - \xi_1\xi_2 e^{\mathrm{i}(t_1 - t_2)}\right|}{\left|\xi_1 - \xi_2 e^{\mathrm{i}(t_2 - t_1)}\right|}. \end{gathered} \tag{98}$$

Пусть $t = t_1 - t_2$ и запишем неравенство $l^2 > 1$ с учетом последнего выражения в (98):

$$\left|1 - \xi_1\xi_2 e^{\mathrm{i}t}\right|^2 > \left|\xi_1 - \xi_2 e^{-\mathrm{i}t}\right|^2. \tag{99}$$

Перепишем (99) с учетом формулы Эйлера $e^{\mathrm{i}t} = \cos t + i \sin t$:

$$(1 - \xi_1\xi_2 \cos t)^2 + \xi_1^2\xi_2^2 \sin^2 t > (\xi_1 - \xi_2 \cos t)^2 + \xi_2^2 \sin^2 t. \tag{100}$$

Раскроем скобки в (100). Проведя несложные преобразования и используя тождество $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, имеем последовательно следующие неравенства:

$$\begin{gathered} 1 - 2\xi_1\xi_2 \cos t + \xi_1^2\xi_2^2 \cos^2 t + \xi_1^2\xi_2^2 \sin^2 t > \xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 \cos t + \xi_2^2 \cos^2 t + \xi_2^2 \sin^2 t, \\ 1 - \xi_1^2 + \xi_2^2 \cos^2 t \cdot (\xi_1^2 - 1) + \xi_2^2 \sin^2 t \cdot (\xi_1^2 - 1) > 0, \\ 1 - \xi_1^2 + \xi_2^2(\xi_1^2 - 1) > 0, \quad -(\xi_1^2 - 1) + \xi_2^2(\xi_1^2 - 1) > 0, \\ (\xi_1^2 - 1)(\xi_2^2 - 1) > 0, \quad \xi_1 < 1, \quad \xi_2 < 1. \end{gathered} \tag{101}$$

Последнее неравенство в (101) не зависит от t, выполняется для всех $\xi_1 < 1$, $\xi_2 < 1$. Поэтому в силу (98), (99) и (100) имеем $l > 1$, что и требовалось. Лемма 12 доказана.

Из леммы 12 вытекает

Лемма 13. *Пусть числа* a, b, a_1, b_1 *удовлетворяют неравенствам* (97). *Тогда в* (96) *для* $l \in [0,1]$ *справедливы соотношения* $\Delta_n(l) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Если $n \in \mathbb{N}'$, то в силу леммы 12 равенство $\Delta_n(l) = 0$ может выполняться только при $l > 1$. Пусть $n \notin \mathbb{N}'$, т.е.

$$\frac{b^n}{a^n} - \frac{b_1^n}{a_1^n} = 0.$$

Тогда в силу (96) и неравенств (97) имеем

$$\Delta_n(l) \equiv -\left|1 - \frac{b^n}{a^n} \cdot \frac{\overline{b_1^n}}{\overline{a_1^n}}\right|^2 \neq 0, \quad \left|\frac{b}{a}\right| < 1, \quad \left|\frac{b_1}{a_1}\right| < 1,$$

что и требовалось. Лемма 13 доказана.

Таким образом, теперь можем доказать следующий важный результат относительно функционального уравнения (93).

Теорема 9. *Пусть* $\operatorname{Im}\lambda > 0$, $\operatorname{Im}\mu > 0$, *числа* a, b, a_1, b_1 *для эллипса* Γ (4) *найдены по формулам* (10) *и* (95). *Пусть параметр* $l \in \mathbb{R}$, *причем* $l \in [0, 1]$. *Тогда выполнено утверждение теоремы* 8.

Доказательство. Так как $\operatorname{Im}\lambda > 0$, $\operatorname{Im}\mu > 0$, то согласно предложению 1 выполнены неравенства (97). Следовательно, выполнены условия леммы 13, согласно утверждению которой справедливы формулы (96). Таким образом, с учетом условий настоящей теоремы выполнены условия теоремы 8, т.е. и ее утверждение. Теорема 9 доказана.

В итоге с учетом теорем 9, 6 и замечания 9 доказана следующая теорема существования и единственности решений задачи Шварца.

Теорема 10. *Пусть матрица* $J \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ *имеет разные собственные значения* λ, μ, *где* $\operatorname{Im}\lambda > 0$, $\operatorname{Im}\mu > 0$. *При этом хотя бы один из ее собственных векторов не кратен вещественному. Пусть так же для числа* $l = l(J)$ (75) *выполнено условие* $|l| \in [0,1]$.

Тогда для любой граничной функции $\psi(\omega) \in H^{\sigma}(\Gamma)$ *решение задачи Шварца в произвольном эллипсе* K *с границей* Γ *в классе функций* $\phi(z) \in H^{\sigma}(\overline{K})$ *существует и единственно с точностью до вектор-постоянной*.

Замечание 10. Пусть оба вектора матрицы J — вещественные. В этом случае преобразования настоящего раздела теряют смысл. Однако, как показано в [15], для таких матриц утверждение теоремы 10 тоже справедливо, причем в произвольной области D, ограниченной контуром Ляпунова.

8.3. Выражение модуля числа $l(J)$ (75) *через коэффициенты матрицы* J

Обозначим, как и выше, через $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\mu$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\lambda$ собственные векторы матрицы J, соответствующие ее разным собственным числам μ, λ. Пусть матрица

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

есть нетреугольная матрица.

Предложение 6. *С учетом сделанных обозначений справедливы формулы* $\mathbf{x}_\mu = (a_{11} - \lambda, a_{12})$, $\mathbf{y}_\lambda = (a_{11} - \mu, a_{12})$.

Доказательство. Согласно теореме Гамильтона-Кэли $(J - \lambda E)(J - \mu E) = 0$. Поэтому

$$J(J - \mu E) \cdot (1,0)^{\mathrm{T}} = (J - \lambda E + \lambda E)(J - \mu E) \cdot (1,0)^{\mathrm{T}} =$$
$$= (J - \lambda E)(J - \mu E) \cdot (1,0)^{\mathrm{T}} + \lambda (J - \mu E)(1,0)^{\mathrm{T}} = \lambda (J - \mu E)(1,0)^{\mathrm{T}}.$$

Таким образом, $\mathbf{y}_\lambda = (J - \mu E)(1,0)^{\mathrm{T}} = (a_{11} - \mu, a_{12})$. Аналогично для собственного вектора $\mathbf{x}_\mu$. Предложение 6 доказано.

Пусть $a_{21} \neq 0$. С учетом предложения 6 по формуле (75) имеем

$$l = \frac{\det(\mathbf{x}_\mu, \overline{\mathbf{y}}_\lambda)}{\det(\mathbf{x}_\mu, \mathbf{y}_\lambda)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \overline{a_{11}-\mu} \\ a_{21} & \overline{a}_{21} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{11}-\mu \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{(a_{11}-\lambda)\overline{a}_{21} - a_{21}(\overline{a_{11}-\mu})}{a_{11}a_{21} - \lambda a_{21} - a_{21}a_{11} + \mu a_{21}} = \frac{a_{11}\overline{a}_{21} - a_{21}\overline{a}_{11} - \lambda\overline{a}_{21} + \overline{\mu}a_{21}}{-\lambda a_{21} + \mu a_{21}} = \tag{102}$$

$$= \frac{a_{11}\overline{a}_{21} - \overline{a_{11}\overline{a}_{21}} - \lambda\overline{a}_{21} + \overline{\mu}a_{21}}{(\mu-\lambda)a_{21}} = \frac{2i\cdot\operatorname{Im}(a_{11}\cdot\overline{a}_{21}) + \overline{\mu}a_{21} - \lambda\overline{a}_{21}}{(\mu-\lambda)\cdot a_{21}}.$$

Символ l очень общий. Поэтому с учетом (102) обозначим через

$$t_{J,\lambda\mu} = |l| = \frac{|2i\cdot\operatorname{Im}(a_{11}\cdot\overline{a}_{21}) + \overline{\mu}a_{21} - \lambda\overline{a}_{21}|}{|(\mu-\lambda)\cdot a_{21}|}, \quad a_{21} \neq 0, \quad \mu \neq \lambda. \tag{103}$$

Отметим, что формулу для $|l|$ можно вывести, используя второй столбец матрицы J, если $a_{12} \neq 0$. В этом случае собственные векторы матрицы J имеют вид $\mathbf{x}_\mu = (a_{12}, a_{22}-\lambda)$, $\mathbf{y}_\lambda = (a_{12}, a_{22}-\mu)$. Проведя преобразования, аналогичные (102), получим

$$t_{J,\lambda\mu} = |l| = \frac{|2i\cdot\operatorname{Im}(a_{22}\cdot\overline{a}_{12}) + \overline{\mu}a_{12} - \lambda\overline{a}_{12}|}{|(\mu-\lambda)\cdot a_{12}|}, \quad a_{12} \neq 0, \quad \mu \neq \lambda. \tag{104}$$

Формулы (103) и (104) совпадают с точностью до замены коэффициентов a_{11}, a_{21} на a_{22}, a_{12}. Однако они не учитывают треугольные матрицы J, и в случае $a_{21} = 0$, либо $a_{12} = 0$ становятся некорректными. Но если матрица J треугольная, то она имеет хотя бы один вещественный собственный вектор $\mathbf{x}$. В этом случае

$$\overline{\det(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \det(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \det(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{y}}),$$

откуда согласно (75) $|l(J)| = 1$. Поэтому для треугольных матриц положим по определению: $t_{J,\lambda\mu} = |l| = 1$.

В заключение этого раздела приведем пример решения однородной задачи Шварца (3) в виде вектор-полинома третьей степени для матриц $J \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ с разными собственными значениями.

Пример 4. Пусть

$$J = \begin{pmatrix} 10i & -\dfrac{49}{3} \\ -\dfrac{27}{7} & -6i \end{pmatrix}, \quad \phi(z) = \begin{pmatrix} -6x(x^2+y^2-1) + (-20y^3 - 12x^2y + 18y)i \\ \dfrac{54}{7}y(x^2+y^2-1) + \left(-\dfrac{24}{7}x^3 + \dfrac{18}{7}x\right)i \end{pmatrix}. \tag{105}$$

Матрица J (105) имеет собственные значения $\lambda = 3i$, $\mu = i$. Вектор-полином $\phi(z)$ есть функция, J-аналитической с данной матрицей J. Имеем $\operatorname{Re}\phi(z)|_\Gamma = 0$ на единичной окружности Γ: $x^2 + y^2 = 1$.

9. МАТРИЦЫ С СОБСТВЕННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ, ЛЕЖАЩИМИ В ВЕРХНЕЙ И В НИЖНЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТЯХ

В классической постановке задачи Шварца (см. [4], [9], [10], [14], [15]) предполагается, что все собственные значения матрицы J лежат в верхней полуплоскости. В этом разделе задача Шварца рассмотрена в более общей постановке: собственные значения матрицы J лежат как выше, так и ниже вещественной оси. Показано, что данный случай сводится к рассмотренному выше с помощью несложных преобразований. При этом область $D \subset \mathbb{R}^2$ предполагается произвольной.

Пусть $\phi(z)$ есть J-аналитическая функция с матрицей $J = QJ_1Q^{-1}$, где с учетом обозначений (16) получим

$$J_1 = \operatorname{diag}(J_{\lambda_1}^{(m_1)}, \ldots, J_{\lambda_p}^{(m_p)}, J_{\mu_1}^{(n_1)}, \ldots, J_{\mu_q}^{(n_q)}), \quad \operatorname{Im}\lambda_k > 0, \quad \operatorname{Im}\mu_k > 0,$$

$$m_1 + \ldots + m_p = r, \quad n_1 + \ldots + n_q = s, \quad r + s = \ell, \tag{106}$$

$$Q = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \overline{\mathbf{y}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{y}}_s), \quad \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k \in \mathbb{C}^\ell, \quad J = QJ_1Q^{-1}.$$

Пусть так же $\phi^*(z)$ есть J^*-аналитическая функция с матрицей $J^* = Q^*J_1^*(Q^*)^{-1}$, где

$$J_1^* = \operatorname{diag}(J_{\lambda_1}^{(m_1)}, \ldots, J_{\lambda_p}^{(m_p)}, \overline{J}_{\mu_1}^{(n_1)}, \ldots, \overline{J}_{\mu_q}^{(n_q)}) = \operatorname{diag}(J_{\lambda_1}^{(m_1)}, \ldots, J_{\lambda_p}^{(m_p)}, J_{\overline{\mu}_1}^{(n_1)}, \ldots, J_{\overline{\mu}_q}^{(n_q)}),$$

$$\operatorname{Im}\lambda_k > 0, \quad \operatorname{Im}\mu_k > 0, \tag{107}$$
$$m_1 + \ldots + m_p = r, \quad n_1 + \ldots + n_q = s, \quad r + s = \ell,$$

$$Q^* = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s), \quad \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k \in \mathbb{C}^\ell, \quad J^* = Q^*J_1^*(Q^*)^{-1}.$$

Матрица J_1^* (107) отличается от J_1 (106) комплексным сопряжением жордановых клеток, соответствующих собственным значениям μ_k. С учетом сделанных обозначений справедлива

Лемма 14. *Пусть в* (107), (106) $\det Q^* \neq 0$ *и* $\det Q \neq 0$. *Тогда задача Шварца* $\operatorname{Re}\phi^*(z)|_\Gamma = \psi(\omega)$ (*задача* S^*) *разрешима в некоторых классах функций* $\phi^*(z)$, $\psi(\omega)$ *тогда и только тогда, когда разрешима задача Шварца* $\operatorname{Re}\phi(z)|_\Gamma = \psi(\omega)$ (*задача* S) *в тех же классах функций* $\phi(z)$. *При этом ядра обеих задач имеют одинаковую размерность и структуру.*

Доказательство. Используем предложение 2 и запишем (15) с учетом обозначений (106):

$$\phi(z) = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \overline{\mathbf{y}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{y}}_s) \cdot (f_1, \ldots, f_r, h_1, \ldots, h_s)^\mathrm{T}, \quad r + s = \ell. \tag{108}$$

В (108) функции f_k, h_k согласно лемме 6 имеют структуру (36) и согласно (34) являются решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial y}(f_1, \ldots, f_r, h_1, \ldots, h_s)^\mathrm{T} - J_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x}(f_1, \ldots, f_r, h_1, \ldots, h_s)^\mathrm{T} = 0. \tag{109}$$

Из (109), (107) и (36) вытекает равенство

$$\frac{\partial}{\partial y}(f_1, \ldots, f_r, \overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_s)^\mathrm{T} - J_1^* \cdot \frac{\partial}{\partial x}(f_1, \ldots, f_r, \overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_s)^\mathrm{T} = 0. \tag{110}$$

Поэтому согласно (15) и (107) справедливо равенство

$$\phi^*(z) = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s) \cdot (f_1, \ldots, f_r, \overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_s)^\mathrm{T}, \quad r + s = \ell. \tag{111}$$

В силу (111), (108) и равенств $\operatorname{Re}\xi = \operatorname{Re}\overline{\xi}$, $\operatorname{Re}(\xi_1 + \xi_2) = \operatorname{Re}\xi_1 + \operatorname{Re}\xi_2$ имеем

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}\phi^*|_\Gamma = \operatorname{Re}[(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s) \cdot (f_1, \ldots, f_r, \overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_s)^\mathrm{T}]|_\Gamma = \\ = \operatorname{Re}[(\mathbf{x}_1 \cdot f_1 + \ldots + \mathbf{x}_r \cdot f_r + \mathbf{y}_1 \cdot \overline{h}_1 + \ldots + \mathbf{y}_s \cdot \overline{h}_s)^\mathrm{T}]|_\Gamma = \\ = \operatorname{Re}[(\mathbf{x}_1 \cdot f_1 + \ldots + \mathbf{x}_r \cdot f_r + \overline{\mathbf{y}}_1 \cdot h_1 + \ldots + \overline{\mathbf{y}}_s \cdot h_s)^\mathrm{T}]|_\Gamma = \operatorname{Re}\phi|_\Gamma = \psi(\omega).\end{gathered} \tag{112}$$

Из (112) следует одновременная разрешимость задач S и S^* для одной и той же правой части $\psi(\omega)$ в одинаковых классах функций.

Пусть теперь $\psi(\omega) \equiv 0$, и пусть функция $\phi(z)$ (108) есть решение однородной задачи Шварца $\operatorname{Re}\phi(z)|_\Gamma = 0$. Тогда в силу (112) функция $\phi^*(z)$ (111) будет решением однородной задачи Шварца $\operatorname{Re}\phi^*(z)|_\Gamma = 0$. Это утверждение справедливо и в обратную сторону, что доказывает одинаковую размерность ядер задач S и S^*. Из (112) следует так же, что ядра задач S, S^* имеют также одинаковую структуру в следующем смысле. Пусть, например, известно, что $\operatorname{Ker}S$ состоит только из вектор-полиномов. Тогда то же самое можно сказать и относительно $\operatorname{Ker}S^*$. Лемма 14 доказана.

Следствием леммы 14 и теоремы 5 является следующее утверждение.

Лемма 15. *Пусть все собственные значения матрицы* J^* (107) *лежат ниже вещественной оси. Пусть при этом для матрицы* $J = \overline{J^*}$ (106) *и эллипса* $\Gamma = \partial K$ *выполнены соотношения* (67). *Тогда для* *любой граничной функции* $\psi(\omega) \in H^{\sigma}(\Gamma)$ *задача Шварца* $\operatorname{Re}\phi^*(z)\big|_{\Gamma} = \psi(\omega)$ *имеет единственное с точностью до вектор-постоянной решение* $\phi^*(z) \in H^{\sigma}(\bar{K})$.

Рассмотрим тот случай, когда условия леммы 14 не выполнены. Пусть

$$\lambda = i, \quad \mu = 2i, \quad J_1^* = \operatorname{diag}(\lambda, \bar{\mu}) = \operatorname{diag}(i, -2i), \quad Q^* = (\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}), \quad J^* = Q^* J_1^* (Q^*)^{-1}. \tag{113}$$

В (113) $\det Q^* \neq 0$, но $\det Q = \det(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, т.е. задача S теряет смысл. Покажем, что при таких предположениях ядро задачи S^* бесконечномерно.

Согласно (93) здесь $l = 0$. Поэтому в силу теоремы 6 однородная задача Шварца равносильна граничной задаче

$$f_{\lambda}(z) - \bar{g}_{\bar{\mu}}(z)\big|_{\Gamma} = f_{\lambda}(z) - g_{\mu}(z)\big|_{\Gamma} = 0,$$

т.е. задаче

$$f_{\lambda}(z)\big|_{\Gamma} = g_{\mu}(z)\big|_{\Gamma}. \tag{114}$$

Положим

$$f_{\lambda}(z) = (x + iy)^2, \quad g_{\mu}(z) = \frac{1}{2}(x + 2iy)^2 + 1, \quad \Gamma : \frac{1}{2}x^2 + y^2 = 1. \tag{115}$$

Непосредственно убеждаемся в том, что равенство (114) выполняется для функций (115) на эллипсе Γ. Но из (114) следует, что

$$[f_{\lambda}(z)]^n\big|_{\Gamma} = [g_{\mu}(z)]^n\big|_{\Gamma}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, в качестве решений задачи (114) можно взять любую пару функций

$$f_{\lambda}^{\prime}(z) = [f_{\lambda}(z)]^n, \quad g_{\mu}^{\prime}(z) = [g_{\mu}(z)]^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, задача (114) имеет бесконечно много линейно независимых решений. Поэтому если матрица J^* имеет вид (113), то в силу теоремы 6 ядро задачи Шварца в эллипсе (115) для J^*-аналитических функций бесконечномерно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
2. *Бицадзе А.В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
3. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
4. *Солдатов А.П.* Функции, аналитические по Дуглису. Новгород: Изд-во НовГУ, 1995.
5. *Солдатов А.П.* Гипераналитические функции и их приложения // Совр. матем. и ее приложения. 2004. Т. 15. С. 142–199.
6. *Vasilyev V.B.* General boundary value problems for pseudo differential equations and related difference equations // Adv. in Difference Equat. 2013. V. 289. P. 1–7.
7. *Vasilyev V.B.* Pseudo differential equations on manifolds with non-smooth boundaries // Differential and Difference Equations and Applications. 2013. V. 47. P. 625–637.
8. *Vasilyev V.B.* On some transmission problems in a plane corner // Tatra Mt. Math. Publ. 2015. V. 63. P. 291–301.
9. *Солдатов А.П.* Задача Шварца для функций, аналитических по Дуглису // Совр. математика и ее приложения. 2010. Т. 67. С. 99–102.
10. *Николаев В.Г., Солдатов А.П.* О решении задачи Шварца для J-аналитических функций в областях, ограниченных контуром Ляпунова // Дифференц. ур-ния. 2015. Т. 51. № 7. С. 965–969.
11. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Высш. школа, 1999.
12. *Nikolaev V. G.* A Class of Orthogonal Polynomials on the Boundary of an Ellipse // J. of Math. Sci. 2019. V. 239. № 3. P. 363–380.
13. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении. М.: Мир, 1985.
14. *Soldatov A.P.* On representation of solutions of second order elliptic systems on the plane // More progresses in analysis: Proc. of the 5th Intern. ISAAC Congress, Catania, Italy, 25–30 July (2005). 2009. V. 2. P. 1171–1184.
15. *Васильев В.Б., Николаев В.Г.* О задаче Шварца для эллиптических систем первого порядка на плоскости // Дифференц. ур-ния. 2017. Т. 53. № 10. С. 1351–1361.